

非圧縮正規直交ウェーブレットによる 一様等方乱流の非線形輸送の解析

岡山理科大 荒木 圭典 (ARAKI Keisuke)
 広島大理 岸田 圭史 (KISHIDA Keiji)
 広島大総合情報セ 岸場 清悟 (KISHIBA Seigo)
 東京農工大 鈴木 勝博 (SUZUKI Katsuhiko)

非圧縮正規直交ウェーブレットを用いた局所非線型エネルギー輸送の解析を行いました。その結果、非線型のエネルギー輸送は空間全体で一方向に生じるわけではなく、順輸送と逆輸送が同じオーダーで生じていることがわかりました。またエネルギー輸送が乱流中のコヒーレント構造と直接に関連していることの傍証を得ました。

1 普遍平衡領域の形成と非線形エネルギー輸送の局所性

一様等方乱流中におけるエネルギー輸送の局所性は、普遍平衡領域の存在を仮定する Kolmogorov の 1941 年の理論 (K41) を支える基本的前提のひとつです (文献 [1] 参照)。というのも、乱流の積分スケールにおける渦運動は、その生成機構 (せん断流、ジェット、格子乱流等) に依存して多様な形態を示します。したがって乱流中に普遍平衡領域が成立するためには、乱流の小さいスケールでの渦運動が、大きな渦運動の影響を直接に受けないことが必要となります。このエネルギー輸送のスケールに関する局所性の仮定は、非圧縮流体の Navier-Stokes 方程式 (NSE)

$$\text{運動方程式} : \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla P(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\text{拘束条件} : \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

のダイナミクスと首尾一貫しているのでしょうか。

これまでの研究は、Fourier 変換された Navier-Stokes 方程式 (F-NSE)

$$\text{運動方程式} : \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu |\tilde{\mathbf{k}}|^2 \right) \overline{\hat{u}_j(\mathbf{k}, t)} = i \tilde{k}_m P_{jn}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k}=0} \hat{u}_m(\mathbf{p}, t) \hat{u}_n(\mathbf{q}, t), \quad (3)$$

$$\text{拘束条件 (1)} : k_x u_x(\mathbf{k}) + k_y u_y(\mathbf{k}) + k_z u_z(\mathbf{k}) = 0, \quad (4)$$

$$\text{拘束条件 (2)} : u_j(\mathbf{k}) = \overline{u_j(-\mathbf{k})}. \quad (5)$$

に基づいて行われてきました、ここで速度場 $u_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L)$, 波数ベクトル $\tilde{k}_j = 2\pi k_j/L$, 射影演算子 $P_{jn}(\mathbf{k}) = \delta_{jn} - k_j k_n/k^2$ です。F-NSE に基づいた一様等方乱流中のエネルギー輸送は大きく分けて二つのアプローチがあります。まずシェル平均されたエネルギーの収支方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k, t) = \sum_{p, q} T(k, p, q) \quad (6)$$

に基づくものがあります。エネルギー輸送関数 $T(k, p, q)$ を、直接数値計算 [2, 3, 4] あるいはクロージャー (EDQNM[2, 4], LRA-LDIA[5]) によって直接に評価する試みでは、

$q \ll p \sim k$ あるいは $p \ll q \sim k$ を満たす極端に非局所な波数の組に対して大きな値をとることがわかっています。一方で、式 (6) の両辺を k について 0 から切断波数 k_{cut} まで積分し、 k_{cut} を通過するエネルギー流束 $\Pi(k_{cut})$ を評価する方法があります。この方法に基づいた解析では、直接数値計算 [6] およびクロージャー (TFM[7], LRA-LDIA[8]) のいずれにおいても、 $\Pi(k_{cut})$ に対して相対的に局所的な相互作用の寄与が大きいことを示しています。このように F-NSE に基づいたアプローチは、定性的な『見た目』が異なる結論を導いています。これらの間を首尾一貫して理解する道はあるのでしょうか。

2 非線形エネルギー輸送のウェーブレット解析 (文献 [9])

この問題に対し著者らは非圧縮正規直交ウェーブレット (以下ヘリカル・ウェーブレット (HWL) と呼びます) を用いて各空間解像度 (空間スケール) 間の非線形エネルギー輸送を解析しました。HWL は複素ヘリカル波 [10] を 3 次元のマザー・ウェーブレット¹ の Fourier 係数 $\hat{\psi}_\epsilon(\mathbf{k})$ を用いてユニタリー変換することで得られます [12]。システムサイズが L の周期境界条件における各 HWL 基底は

$$\psi_{j\epsilon l s}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{2^{3j}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\psi}_\epsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2^j}\right) \frac{e_\theta(\mathbf{k}) + i s e_\varphi(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \exp\left[2\pi i \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{L} - \frac{l}{2^j}\right)\right], \quad (7)$$

によって与えられます、ここで $\{e_r(\mathbf{k}), e_\theta(\mathbf{k}), e_\varphi(\mathbf{k})\}$ は Fourier 空間における球座標基底です。この基底関数は空間解像度 j 、異方性 ϵ 、位置 l およびヘリシティ s を代表する 4 個の添字を持っています。速度場の HWL スペクトルは次の式で与えられます:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \sum_{j\epsilon l s} \mathbf{u}_{j\epsilon l s}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

ここで $\mathbf{u}_{j\epsilon l s}(\mathbf{x}, t) := u_{j\epsilon l s}(t) \psi_{j\epsilon l s}(\mathbf{x})$, $u_{j\epsilon l s}(t) = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \psi_{j\epsilon l s}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ です。

スケール間のエネルギー輸送の解析を、F-NSE のエネルギー収支方程式 (6) の HWL アナログを用いて調べました。まず速度場の HWL スペクトルを位置・異方性、ヘリシティに関して縮約して

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t), \text{ where } \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{\epsilon, l, s} \mathbf{u}_{j\epsilon l s}(\mathbf{x}, t). \quad (9)$$

これを NSE (式 (1)) に代入し、 $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$ との内積をとると、スケールエネルギー・スペクトルの収支方程式

$$\frac{dE_j}{dt} = \sum_m \sum_n \langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_n \rangle + \nu \sum_m \langle \mathbf{u}_j | \nabla^2 \mathbf{u}_m \rangle \quad (10)$$

を得ます。非線形エネルギー輸送関数 $\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_n \rangle$ を調べた結果²、(1) 輸送関数は from-

¹3次元のマザー・ウェーブレットは、1次元のスケール関数 (ファザー・ウェーブレットとも呼ばれる) $\psi_0(x)$ 、マザー・ウェーブレット $\psi_1(x)$ を用いて、 $\psi_\epsilon(x, y, z) := \psi_\xi(x) \psi_\eta(y) \psi_\zeta(z)$ (ξ, η and $\zeta = 0$ or 1 , $\epsilon := \xi + 2\eta + 4\zeta$) によって与えられます (文献 [11] §3.5 参照)。

²われわれは非線形エネルギー輸送関数 $\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_n \rangle$ を $\mathbf{u}_m$ と $\mathbf{u}_n$ に関して対称化しません。というのも $\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_n \rangle$ の m, n に関する和は E_j の非線形収支を、 j, m に関する和は E_n の非線形収支 (に負号をつけたもの) を厳密に与えるからです。 m, n に関して対称化しなかったおかげで、 $\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_n \rangle$ は E_m の収支方程式にはまったく現れないことに留意してください。以上が $|\mathbf{u}_n\rangle$ を **from-mode**、 $\langle \mathbf{u}_n |$ を **to-mode**、 $|\mathbf{u}_m\rangle$ を **by-mode** と呼ぶ根拠です (詳細は文献 [13] を参照)。対称化された輸送関数、例えば文献によく現れる対称化された Fourier エネルギー輸送関数では、各モードのエネルギー収支に関するこのようなすっきりとした関係はありません。

mode $|u_m\rangle$, by-mode $|u_n\rangle$ に関して非対称な分布になっている、(2) モード j のエネルギーは主に $n = j - 1$ の from-mode から流入し、モード $n = j + 1$ の from-mode へと流出していく、(3) それ以外の from-mode からの輸送への寄与は相対的にとても小さい、(4) by-mode に関する分布は主に $m = j - 2$ を中心とする (from-mode の分布と比べて) 広がった分布になっているが、低波数側で発散する傾向はまったく見られない。これらの事実よりわれわれは赤外・紫外発散しないという意味でエネルギー輸送は局所的であると結論しました。

われわれはまた Fourier 空間を等比列、等差列に分解して、各々の分解におけるシェル平均されたエネルギー収支を調べ、等比分解の場合にはウェーブレットと定性的に一致する結果を得ました。また等差分解の場合には、文献 [2, 3, 4] と同様の非局所エネルギー輸送の卓越が見られましたが、この解析法には空間分解能の点で問題があることを Fourier 変換の不確定性原理に基づいて議論しました。

3 スケール・位置エネルギースペクトル

非線型エネルギー輸送はスケールの意味では局所的であるということが明らかになりました。さらに解析を一步進めて、HWL 基底の特徴である位置の情報を用いて、非線型エネルギー輸送の空間分布を調べることにしましょう。

速度場の HWL スペクトルを異方性、ヘリシティに関して縮約して

$$u(x, t) = \sum_{j,l} u_{jl}(x, t), \text{ where } u_{jl}(x, t) = \sum_{\epsilon, s} u_{j\epsilon ls}(x, t). \quad (11)$$

これを NSE(式 (1)) に代入し、 $u_{jl}(x, t)$ との内積をとると、スケール・位置エネルギースペクトルの収支方程式

$$\frac{dE_{jl}}{dt} = \sum_{m,l'} \sum_{n,l''} \langle u_{jl} | u_{ml'} | u_{nl''} \rangle + \nu \sum_{m,l'} \langle u_{jl} | \nabla^2 u_{ml'} \rangle \quad (12)$$

を得ます。ただし非線型輸送 $\langle u_{jl} | u_{ml'} | u_{nl''} \rangle$ は各 (j, m, n) 毎に $2^{3j} \times 2^{3m} \times 2^{3n}$ 個もあって、とても扱えそうな代物ではないので、以下では from-mode と by-mode の位置に関する情報を縮約した

$$\langle u_{jl} | u_m | u_n \rangle = \sum_{l'} \sum_{l''} \langle u_{jl} | u_{ml'} | u_{nl''} \rangle \quad (13)$$

を取り扱います。以下、これを『局所非線型エネルギー輸送 (関数)』と呼ぶことにします。

これより、われわれは局所非線型エネルギー輸送に関し次の点について考察をすすめることにします。

- 局所非線型エネルギー輸送は活発か静かか？
非線型エネルギー輸送 $\langle u_j | u_m | u_n \rangle$ の値が小さいときに、各局所非線型エネルギー輸送の値そのものが小さいのか、それとも大きな振幅どうしの打消しあいが生じて、結果として小さい値に収まっているのか？
- いわゆる『逆輸送 (back scatter)』は生じているのか？生じているとすれば、どの程度の大きさで生じているのか？
- スケール・位置エネルギースペクトル E_{jl} とどの程度の相関を持つのか？

本報告では from-mode が $j = 4$ のものを扱うことにします。速度場は文献 [9] で解析したものと同一ものを扱います。

3.1 局所非線型エネルギー輸送は活発か静かか？

本節では非線型エネルギー輸送と局所非線型エネルギー輸送の定量的な関係について調べます。まず両者の間には次の関係式が成り立ちます：

$$\langle j|m|n\rangle = \sum_l \langle j,l|m|n\rangle. \quad (14)$$

(以下、 u のスペクトルの添え字のみを括弧内に書く事にします。) ここで右辺の和を正の値を持つ項からの寄与と負の値を持つ項からの寄与に分解します：

$$\langle j|m|n\rangle = \langle j|m|n\rangle_+ + \langle j|m|n\rangle_-, \quad (15)$$

$$\langle j|m|n\rangle_{\pm} = \frac{1}{2} \sum_l \left(\langle j,l|m|n\rangle \pm |\langle j,l|m|n\rangle| \right). \quad (16)$$

図1に $\langle 4|m|n\rangle$, $\langle 4|m|n\rangle_+$, $\langle 4|m|n\rangle_-$ を示しました。図より (1) HWL の位置毎に正負の寄与に分解しても、相互作用はスケールの意味で相対的に局所的、すなわち赤外・紫外部にいくにつれて減少している、(2) from-mode $|4\rangle$ は、全体としては輸送量が0であるにも関わらず、局所的にはとても活発である、すなわち同じ解像度内での相互作用 (ここではこれを sweeping と呼ぶ) の大きさは隣接する解像度の from-mode からの寄与と同じオーダーである。以上よりエネルギーのやり取りは、スケールの意味で局所的なものどうしの間で順輸送・逆輸送ともに活発であることがわかりました。

3.2 逆輸送 (back scatter) はどの程度生じているのか？

本節では逆輸送の量について定量的に調べます。

まず用語を確定しておきましょう。局所非線型エネルギー輸送 $\langle j,l|m|n\rangle$ のうち、値が正のものを『正輸送』、負のものを『負輸送』と呼ぶことにします。これに対して、「大きいスケールから小さいスケールへとエネルギーを渡すもの」すなわち「 $j > n$ かつ値が正のもの」もしくは「 $j < n$ かつ値が負のもの」を『順輸送』、逆のものを『逆輸送』と呼ぶことにしましょう。

前節であきらかになったように、局所相互作用は同じオーダーの『正輸送』と『負輸送』が拮抗しています。表1に局所非線型エネルギー輸送 $\langle 4,l|u|n\rangle := \sum_m \langle 4,l|m|n\rangle$ の正輸送・負輸送をまとめました。

(a)	u_n	+	-	振幅比	(b)	u_n	+	-	体積比
	u_3	0.9540	-0.1280	7.45:1.00		u_3	77.71%	22.29%	3.49:1.00
	u_4	0.6353	-0.6353	1.00:1.00		u_4	50.81%	49.19%	1.03:1.00
	u_5	0.1361	-0.4934	1.00:3.63		u_5	32.35%	67.65%	1.00:2.09
	u	0.9875	-0.4060	2.43:1.00		u	64.40%	35.60%	1.81:1.00

表1: 局所非線型エネルギー輸送 $\langle 4,l|u|n\rangle$ の (a) 非線型輸送される量、(b) 順輸送・逆輸送の生じている部分の体積比。下線は『順輸送』の定義に合うもの。

表より以下のことが明らかになりました: (1) 逆輸送は空間全体の2割から3割程度の部分で生じる、(2) 順輸送と逆輸送のエネルギーの比は、それらの体積比と一致しない、エネルギー量の差の方が体積の差より大きい傾向にある。(3) sweeping (同じ解像度内での相互作用) は、正・負輸送されるエネルギー量が等しい (これは自明) のみならず、正・負

輸送の生じる部分の体積もほぼ等しい。逆輸送に関しては、ウェーブレット関数の振幅の振動のために、偽りの逆輸送が見えている可能性もありますので、さらに慎重な解析が必要となります。

3.3 E_{jl} との相関

本節では局所非線型エネルギー輸送の空間的な分布について調べます。

図2に局所非線型エネルギー輸送 $\langle 4, l | u | u \rangle$ の空間分布を示しました。図には振幅の大きいもののみを示してあります。 E_{4l} の振幅の大きい部分を図中にメッシュで示しています。図よりスケール・位置エネルギースペクトル E_{4l} と局所非線型エネルギー輸送の大きい部分とは、空間的な相関を持っています。

空間相関を調べるために、スケール・位置エネルギースペクトルと局所非線型エネルギー輸送の散布図 (E_{4l} , $\langle 4, l | u | u \rangle$) を、 $\langle 4, l | u | u \rangle$ が正のものと負のものに分けて表示しました。図より全体として弱い正の相関があることがわかりました。興味深い点として、分布の概形がほとんど一致しており、両者の差は主に散布点の出現頻度の差であることが見て取れます。

References

- [1] Frisch, U., *Turbulence*, (Cambridge Univ. Press, New York, 1995).
- [2] Domaradzki, J. A. and Rogallo, R. S., *Phys. Fluids A* **2**, 413 (1990).
- [3] Yeung, P. K. and Brasseur, J. G., *Phys. Fluids A* **3**, 884 (1991).
- [4] Ohkitani, K. and Kida, S., *Phys. Fluids A* **4**, 794 (1992).
- [5] Kida, S. and Goto, S., *J. Fluid Mech.* **345**, 307 (1997).
- [6] Zhou, J., *Phys. Fluids A* **5**, 2511 (1993).
- [7] Kraichnan, R. H., *J. Fluid Mech.* **47**, 525 (1971).
- [8] Kaneda, Y., *Phys. Fluids* **29**, 701 (1986).
- [9] Kishida, K., Araki, K., Kishiba, S., and Suzuki, K., *Phys. Rev. Lett.* **83** 5487 (1999).
- [10] Moses, H. E., *SIAM J. Appl.* **21**, 114 (1971).
- [11] Meyer, Y., *Wavelets and Operators* (Cambridge University Press, New York, 1992).
- [12] Araki, K., Suzuki, K., Kishida, K., and Kishiba, S., preprint; e-print is available at <http://xxx.lanl.gov/abs/math-ph/?9904015>.
- [13] 岸田圭史, 博士論文 (広島大学, 2000).

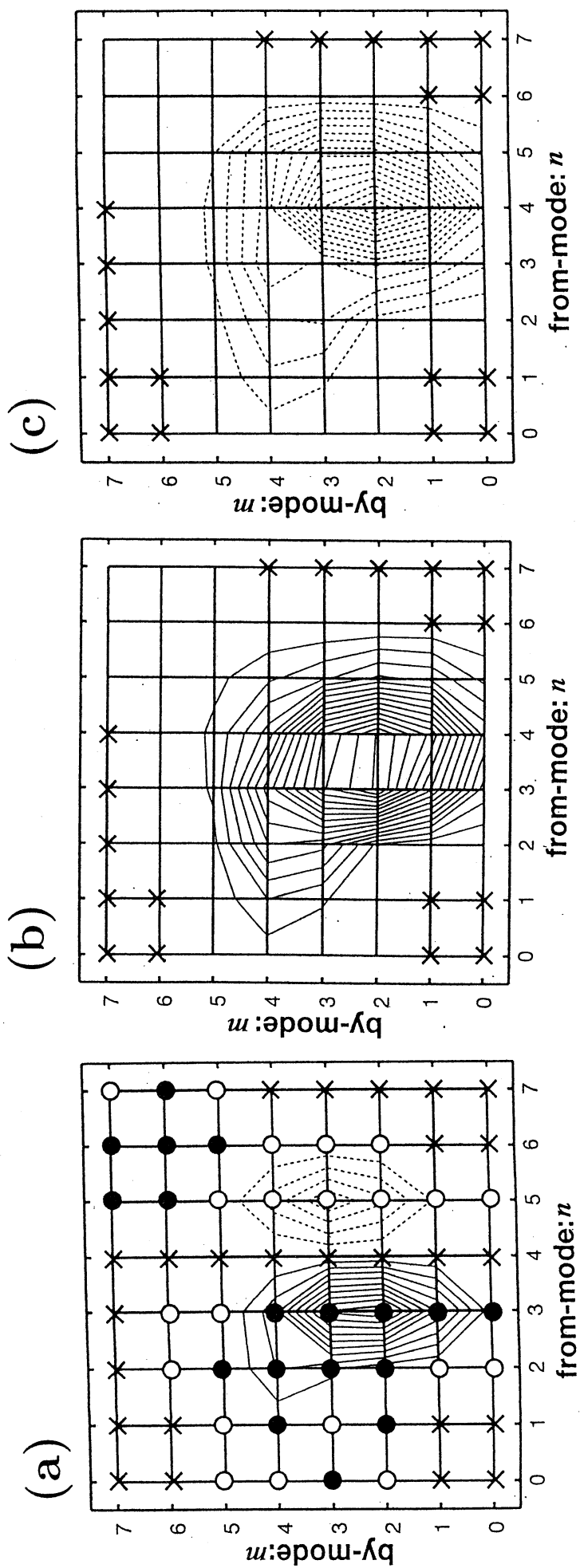


図 1: 非線型エネルギー輸送: (a) 全体 $\langle 4|m|n \rangle$, (b) 正輸送 $\langle 4|m|n \rangle_+$, (c) 負輸送 $\langle 4|m|n \rangle_-$. 等高線の間隔は (a), (b), (c) で共通であり、(a) の図の振幅の最大値の 10% にとっている。

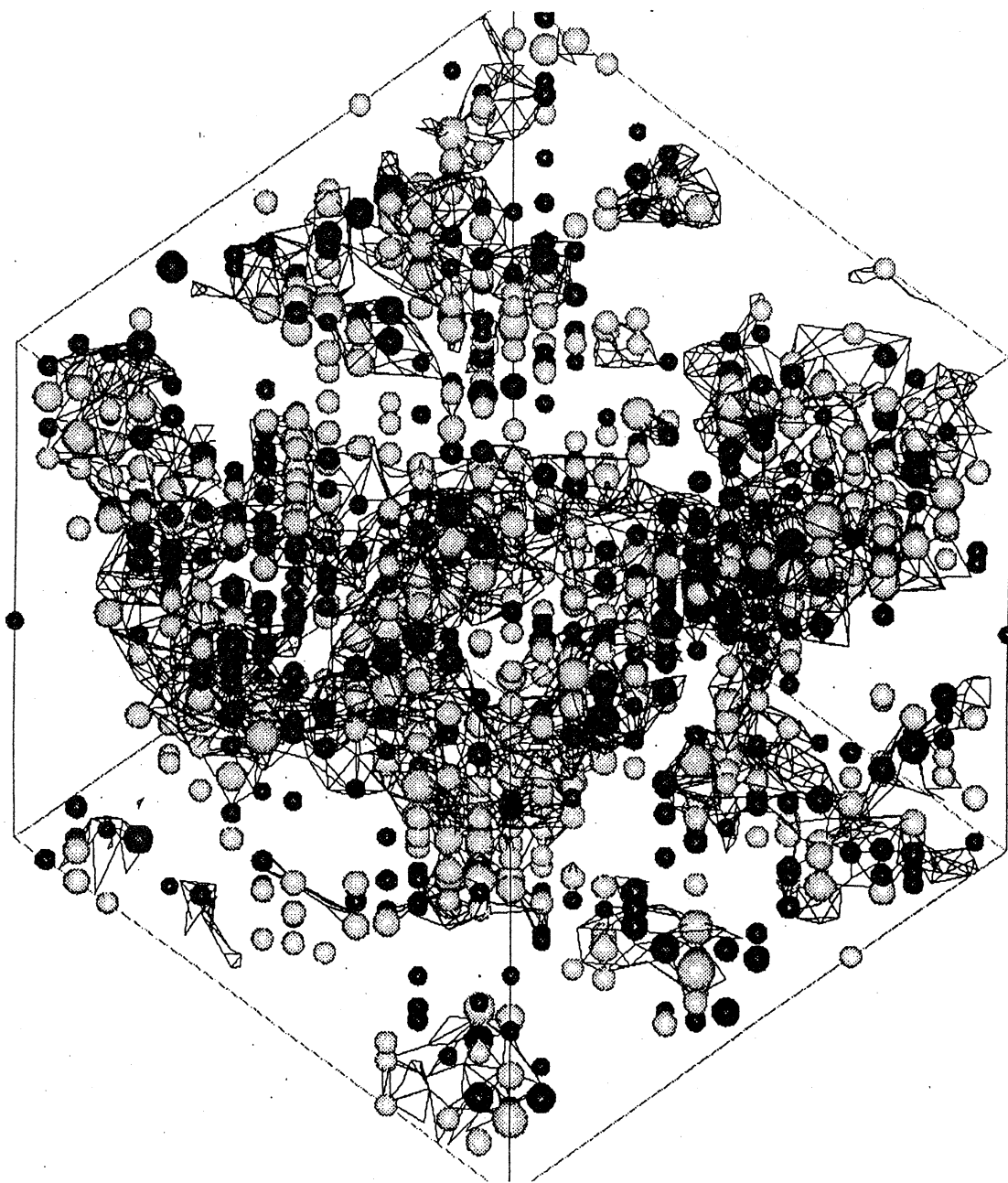


図 2: 局所非線型エネルギー輸送 $\langle 4, l | m | n \rangle$ の空間分布。白玉は正輸送を、黒玉は負輸送を示している。

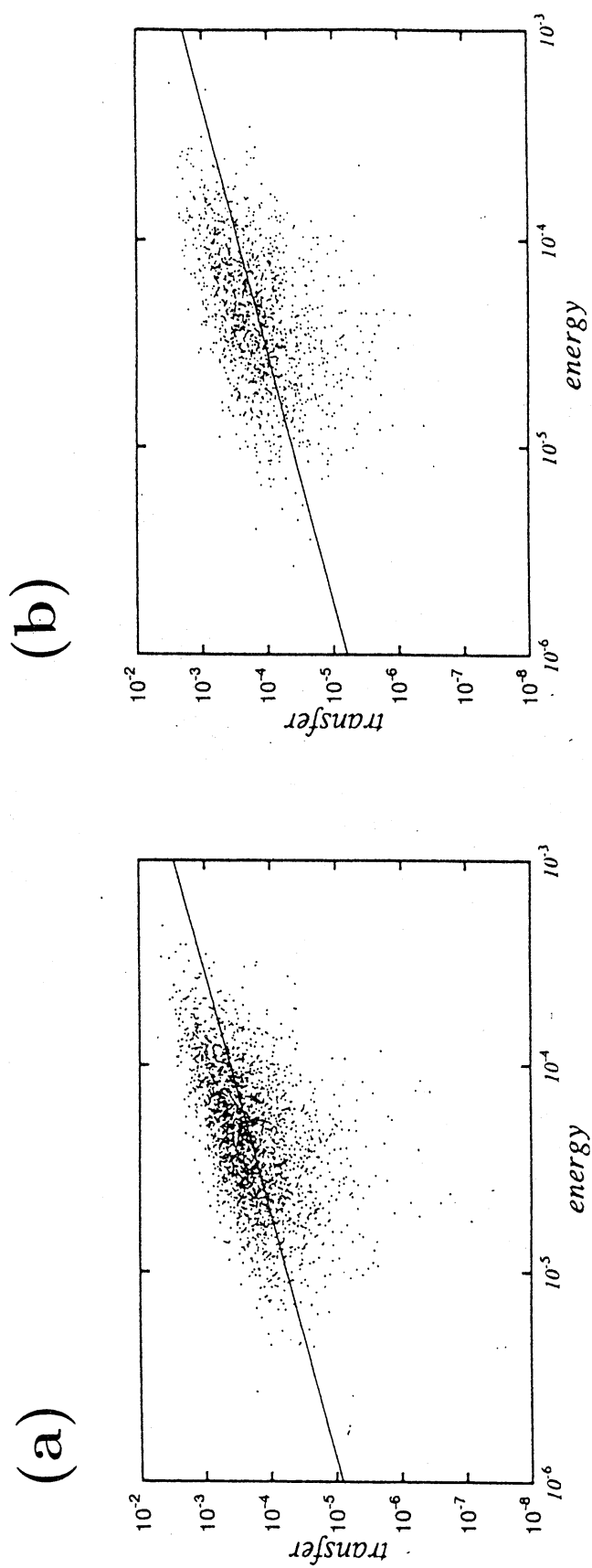


図 3: スケール・位置エネルギースペクトルと局所非線型エネルギー輸送の相関: (a) 正輸送 $\langle 4, l | m | n \rangle > 0$, (b) 負輸送 $\langle 4, l | m | n \rangle < 0$.