

情報力学からカオスへ

東京理科大学理工学部情報科学科

大矢雅則

1. 導入

力学系のカオスの研究は、(1)力学的エントロピー、(2)リアプノフ指数(3)フラクタル次元(4)エルゴート理論(5)分岐構造などにより行われているが[2,3,9,17]、これらは、それぞれの対象に対して個別に使われていることが多い。こうした状況の中で、様々な分野における力学系のカオスを統一的に扱うために、様々な複雑さと状態変化の力学の融合した理論が情報力学(I D)である[20,11,23,22]。

力学系のカオスの度合いを測る、カオス尺度は、情報力学における2つの複雑量を用いて定義される。今までに、このカオス尺度によるいくつかのカオス現象の解析が試みられ、その有用性が示されている[24,12,14,15]。さらに、I Dは状態変化の力学を扱うから、古典系ではKolmogorov-Sinaiによって定義され、量子系ではConnes-Stormerによって始められた力学的エントロピーを複雑量の立場から定式化できる[1,16,21]。

この論文では、I Dの定義の説明から始め、I Dにおける複雑さとは何か、カオス尺度はどのように考えられるか、それらの数学的側面を中心に説明する。

2. 情報力学

情報力学はさまざまな領域を統一的に扱う一つの方法として考え出された理論であるが、その背景と他の数理科学との関わりは文献[22]を参照していただくことにし、ここではI Dの数理的な部分を簡単に説明しよう。

自然科学の対象となる様々な系の在り様は、“状態”という概念によって記述され、系の力学は状態の変化によって記述される。こうした系の状態変化の基本は次の一次構造であると考えてよい。

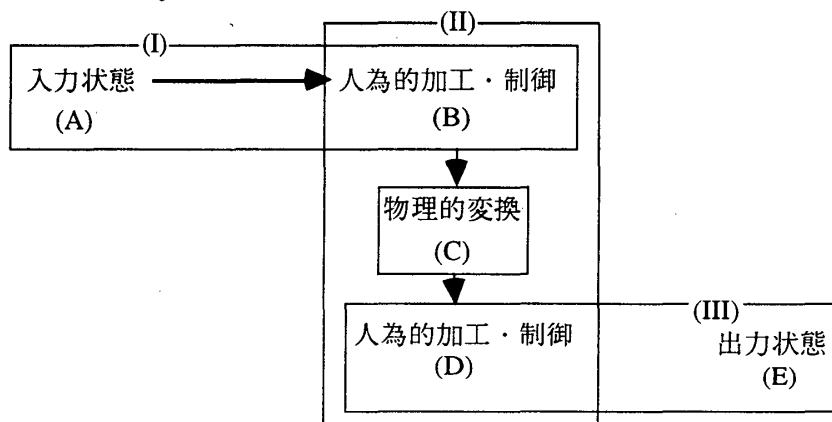


図1. 状態変化

上の(I)(=A+B)を入力系, (II)(=B+C+D)を変換(チャネル)系, 特に (C)を実変換系, (III)(=D+E)を出力系と呼ぶ。

この一次構造が階層をなすと, 様々な系ができ上がることになり, そうしてできた高次構造に複雑さを付加した理論がIDである。

入力系は, 準備された状態, シグナル, 符号化されたシグナルなどと呼ばれる状態, いわゆる, “裸”の状態を人為的に加工したり, 制御したりして目的に応じたものに作り替える系で, こうして作られた状態を“衣を着た(入力)状態”あるいは“準備された状態”と呼ぶ。この衣を着た状態が意図的には制御できない実変換系で外的変化を受け, 出力状態として取り出されるのである。なお, 最も基本的な構造は, BとDを除いた「A→C→E」であることは断るまでもないであろう。

そこで, 系の研究は次の三つ組 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(G))$ を適当に定めることによってなされているといえる。

- (1) 系において考察の対象(観測量など)となるものの全体 $\mathcal{A}$
 - (2) $\mathcal{A}$ の元になる科学的量(観測値など)を対応させる処方箋(仕方)の集合 $\mathcal{G}$
 - (3) $\mathcal{A}$ の元や $\mathcal{G}$ の元の変化を表す, $g \in G$ をパラメーターにもつ写像 $\alpha(G)$
- それゆえ,

「 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(G))$ に数理構造を与える。⇔系を記述する理論が決まる」
ということになるのである。

さらに, 入力系と出力系をおのおの形式的に $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(G))$ と $(\mathcal{A}', \mathcal{G}', \alpha'(G'))$ で表し, $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}'$ への変換 Λ^* それ自体を以下チャネルと呼ぶ。これは α が系の内的変化を与えるのに対し, Λ^* は人為的な変化も含めて系全体の変化を記述するものである。その意味で, α は Λ^* の一部と考えることができるものである。

さまざまな力学が上の(I)~(III)のスキームで説明できるが, ここでは省略する[11,22]。

ところで, 上の(II)に対応するチャネルは他の系を包含する階層性をもっているといえる。例えば, 第三の系 $(\mathcal{B}, \mathcal{G}_0, \beta)$ と $(\mathcal{B}', \mathcal{G}'_0, \beta')$ が入出力系に影響を及ぼす次の形もその一例である。このような変換もチャネルである。

$$\mathcal{G} \rightarrow \boxed{\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}'_0} \rightarrow \mathcal{G}'$$

この例は物理学でよく出くわす, いわゆる開放系の構造を有しているものでもある。なお, $\mathcal{G}$ 全体でなく, $\mathcal{G}$ の一部である $\mathcal{S}$ の中で考えることが必要になることがある。このとき $\mathcal{S}$ を基準系と呼ぶ。

“情報力学”の“力学”に次ぐ“情報”の意味は, シヤノンがエントロピーを情報の量的表現になっていることを見い出したことに由来する。

従来から, エントロピーはある物理系のもつ複雑さとか混沌さ, 不確定さといっ

たものを表す量であると考えられてきたが、シャノンは

「系のもつ情報量＝系から得られた知見＝系の複雑さ」

と考え、系のもつ情報をエントロピーを用いて量化し情報を科学として扱う一つの方法を見出したのである。

このように、情報という概念は曖昧さ、混沌さ、複雑さといった考えと深く関わっているが、この情報という概念を頭において、他の複雑量も絡めて、新たに抽出した複雑量を系の力学に付加したものが情報力学である。

情報力学の系の複雑さには2種類のものがある。一つは、ある基準系 S から見た状態 φ 自体の有する複雑量 $C(\varphi)$ であり、もう一つは状態 φ が他の状態 ψ へ変化したとき、 φ から ψ へ伝達された複雑さ $T(\varphi, \psi)$ (以下、伝達複雑量と呼ぶ) である。特に、 φ がチャネル Λ^* によって $\psi = \Lambda^* \varphi$ と変換されるとき、この伝達複雑量は $T^S(\varphi; \Lambda^*)$ と表すことが多い。これらの複雑量は、系の有する不確定さを表すものを含まなければならない。しかも、力学系のカオス的な振る舞いの記述も可能にするものでなければならないから、少なくともそれらは次の性質を有して欲しい： $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(G))$ と $(\mathcal{A}', \mathfrak{S}', \alpha'(G'))$ を二つの力学系とし、それらの合成系を $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \tau(K))$, $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ としたとき、二つの複雑量の満たすべき条件は次の(1)～(5)である[20,11,23].

(1) 正值性：考察の対象となる $S \subset \mathfrak{S}$ に対して、

$$C^S(\varphi) \geq 0$$

(2) 不変性：素な状態の集合 $ex\mathfrak{S}$ から $ex\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ 上の全ての端点の集合) への全単射 j に対して、

$$\begin{aligned} C^S(\varphi) &= C^{j(S)}(j(\varphi)) \\ T^S(\varphi; \Lambda^*) &= T^{j(S)}(j(\varphi); \Lambda^*) \end{aligned}$$

(3) 加法性： $\Phi = \varphi \otimes \psi \in S_i$, $\varphi \in S$, $\psi \in \bar{S}$ に対して、

$$C^{S_i}(\Phi) = C^S(\varphi) + C^{\bar{S}}(\psi)$$

(4) 基本不等式： $0 \leq T^S(\varphi; \Lambda^*) \leq C^{\bar{S}}(\varphi)$

(5) 複雑さの保存： $T^S(\varphi; id) = C^S(\varphi)$ (なお、 id は恒等変換を表す。)

特に、 $S = \mathfrak{S}$ であるときは、 C^S , T^S を単に C , T として略記する。

これらの複雑さの例として、以下、本論文で用いる古典と量子系のエントロピー及び C^* 系のエントロピー型の複雑量を挙げておく。

例1 (古典系のエントロピー)

$$\varphi = (p_i) = \sum_i p_i \delta_i : \text{確率分布}$$

$\Lambda^* = (p(j|i))$: 遷移確率行列

$C(\varphi) = C(p) = -\sum_i p_i \log p_i$: シヤノンエントロピー

$T(\varphi; \Lambda^*) = I(p; \Lambda^*) = \sum_{i,j} p(j|i) p_i \log \frac{p(j|i)}{(\Lambda^* p)_j}$: 相互エントロピー

例2 (量子系のエントロピー)

$\varphi = \rho$: ヒルベルト空間上の密度作用素

$C(\varphi) = S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$: フォン・ノイマンエントロピー

$T(\varphi; \Lambda^*) = I(\rho; \Lambda^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda^* E_k, \Lambda^* \rho); \{E_k\} \right\}$: 量子相互エントロピー

ただし, $S(\cdot, \cdot)$ は梅垣の相対エントロピー, $\sup$ は ρ の全てのシャッテン分解 $\{E_k\}$ に対して取っている.

実際, S と I が複雑さの条件を満足することが分かる[23].

例3 (C^* 系のエントロピー型の複雑量)

$(\mathcal{A}, \mathfrak{G}(\mathcal{A}), \alpha(G)), (\mathcal{A}', \mathfrak{G}(\mathcal{A}'), \alpha'(G'))$: C^* 力学系

$S : \mathfrak{G}(\mathcal{A})$ の弱*-コンパクトかつ凸な部分集合

$\varphi = \int_S \omega d\mu$: $\varphi \in S$ を重心とする端点 (純粋状態) 分解

$M_\varphi(S)$: $\varphi = \int_S \omega d\mu$ を与える S 上の最大測度全体

$F_\varphi(S)$: φ の重心分解を与える有限な台を持つ測度全体とする.

このとき, 荒木[5]やウールマン(Uhlman)[28]の相対エントロピー $S(\cdot, \cdot)$ を用いて

$$T_1^S(\varphi; \Lambda^*) \equiv \sup \left\{ \int_S S(\Lambda^* \omega, \Lambda^* \varphi) d\mu; \mu \in M_\varphi(S) \right\}$$

$$T_2^S(\varphi; \Lambda^*) \equiv \sup \left\{ S \left(\int_S \omega \otimes \Lambda^* \omega d\mu, \varphi \otimes \Lambda^* \varphi \right); \mu \in M_\varphi(S) \right\}$$

$$T_3^S(\varphi; \Lambda^*) \equiv \sup \left\{ \int_S S(\Lambda^* \omega, \Lambda^* \varphi) d\mu; \mu \in F_\varphi(S) \right\}$$

$$C_j^S(\varphi) \equiv T_j^S(\varphi; id), \quad (j=1, 2, 3)$$

を定めると, これらの各ペア (C_j^S, T_j^S) は I D の複雑量と伝達複雑量になることが分かる[23].

また, これらは量子エントロピー論における S -混合エントロピー $S^S(\varphi)$ [19] およびコンヌ・ナーホフ・チリング(Connes-Narnhofer-Thirring; CNT)エントロピー $H_\varphi(\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の部分代数) と関わっており[8], さらに, 力学系の分類に役立つ力学的エントロピーの一般形が次節で見えるようにこの伝達複雑量を用いて定められる.

上の3つの他にも, チャイテン(Chaitin)の複雑量, ファジーエントロピー, ある種のフラクタル次元などが I D の複雑量になっていることが分かっている[23].

このとき, 情報力学は次のように定義される.

[定義 2.1] 情報力学とは, 組

$$\{\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(G); \mathcal{A}', \mathfrak{G}', \alpha'(G'); \Lambda^*; C^S(\varphi), T^S(\varphi; \Lambda^*); R\}$$

のことをいう. ここで, R は操作 (観測) に関わる各要素間の “関係” を表す.

上の定義では, 入力系と出力系は一般に異なるものとしてあるが, 当然同じものでもよいことに注意しておく. 例えば, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ の場合も物理系ではかなり多いのである. このとき, 情報力学は組

$$\{\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(G); \Lambda^*; C^S(\varphi), T^S(\varphi; \Lambda^*); R\}$$

で与えられることになる.

したがって, 各系において, その系を数理的に取り扱うためには,

- (i) $\{\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(G); \mathcal{A}', \mathfrak{G}', \alpha'(G')\}$ に数学的な構造をあたえること;
- (ii) チャンネル Λ^* を決め, その特質を調べること;
- (iii) 二つの複雑量 $C^S(\varphi), T^S(\varphi; \Lambda^*)$ を定め, それらを用いて系の様相を記述すること; がまず必要になる.

対象となっている系に応じて, 上の (i)(ii)(iii) を決めることによって, その系を論理的に扱う素地ができ上がるのである. 情報力学によって様々な系が同じ土俵上で議論できるが, ID そのものの持つ数理構造, 例えば, 状態の集合とチャンネルの集合上に定められた実数値を取る関数である複雑量の特徴付けなどの研究はこれから大切な課題である.

3. カオス尺度

微分方程式で記述される力学系の解の振る舞いを調べる従来のカオスの研究では, カオスの判定を行う量的な尺度としてリアプノフ指数がよく用いられている. この指数は, 解の収束や発散の度合い(速さ)によって解の軌道の安定性を測る尺度である. しかし, リアプノフ指数は負の値や $-\infty$ を取ることや計算が難しいときがあり, 力学系によっては, 扱い易いとは言えない場合がある.

また, 昨今, 古典カオス力学系を量子化して, 量子系でどのように振る舞うかや古典系でカオスを生じる原因が量子力学のレベルでどこにあるのかといった量子カオスの研究がなされている. これらの研究は, 従来, 量子準位統計, ランダム行列論, グッツビラーの跡公式などの研究として行われているが [4,6,7,10,27], その研究の基礎となるのはエネルギーと波動関数に対応するシュレディンガー方程式の固有値と固有関数である.

そこで, 文献 [12,24,25] では, 古典系における差分方程式系の写像をもとにして状態の確率分布を作り, シャノンエントロピーと相互エントロピーから構成されるカ

オス尺度を用いてロジスティック写像, 2進変換 (ベルヌーイシフト) やパイこね変換, ティンカーベル写像のカオス尺度を計算して, これらの写像のカオスの振る舞いを調べた. また, 量子系では, その複雑さとしてフォン・ノイマンエントロピーと量子相互エントロピーを用いてカオス尺度を構成し[26], 密度作用素として表される量子状態自身のスピン系の非線形な変換の下での一般的振る舞いをカオス尺度を用いて考察を行った[25,15]. (外磁場の影響の下でのスピン1/2系の振る舞いについては論文[13,14]を参照して頂きたい.)

[定義3. 1 (カオス尺度(CD))] 状態 φ とチャネル Λ^* に関するカオス尺度(CD)は

$$D(\varphi; \Lambda^*) \equiv C(\Lambda^* \varphi) - T(\varphi; \Lambda^*)$$

で与えられる.

カオス尺度は対象としている系に依存して構成される. このカオス尺度を使うと, 力学系がカオスであるかどうかを以下のように判定することが出来る:

$D > 0 \Rightarrow$ 力学系はカオス的である.

$D = 0 \Rightarrow$ 力学系は安定している.

古典系におけるカオス尺度

この節では, 差分方程式系の代表的なモデルであるロジスティック写像, 2進変換 (ベルヌーイシフト) やパイこね変換, リアプノフ指数の計算が困難であるティンカーベル写像に対し, カオス尺度を計算し, その軌道の振る舞いを考察する.

以下では, 時刻 n での写像点をその次元に合わせて, 次の形で記述する.

$$\begin{aligned} x_n & \quad (1\text{次元の場合}) \\ \mathbf{x}_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) & \quad (2\text{次元以上の場合}) \end{aligned}$$

古典系におけるリアプノフ指数

決定論的カオスの研究において, リアプノフ指数はその挙動がカオス的な振る舞いをするかどうかを判定する量としてよく用いられている. この量は軌道の指数関数的な発散や収束の度合い(速さ)を測る尺度で, その値が正であるとき, 軌道がカオス的な振る舞いをしていると判定する. 滑らかな1次元写像 f に対してそのリアプノフ指数は

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(f) \quad \lambda_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left| \frac{df}{dx}(x_k) \right|$$

で定義され, 一般の m 次元写像 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $f_j \equiv f_j(x_1, \dots, x_m)$ ($j=1, \dots, m$) で系の力学

が、 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ を初期点とし、 $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$ ($n \in \mathbf{N}$) とする。このとき、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ のヤコビ行列 $J(\mathbf{x})$ は

$$J(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

で定義される。そこで、初期値 $\mathbf{x}_0$ で時刻 n におけるヤコビ行列 $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$ となり、行列は $J_n(\mathbf{x}_0)J_n(\mathbf{x}_0)^T$ の k 番目に大きい固有値の平方根を μ_k^n とする。このとき、初期値 $\mathbf{x}_0$ に対するリアプノフ指数 $\lambda(\mathbf{f})$ は

$$\lambda(\mathbf{f}) = \log \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_k^n)^{\frac{1}{n}} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

で与えられる[3].

古典系のエントロピー型カオス尺度の計算アルゴリズム

$I = [a, b]^m$, $\mathcal{F}$ を I から I への滑らかな写像 ($\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_n)$ (差分方程式)) とする。このとき、カオス尺度 D_c を計算するアルゴリズムは文献 [26, 25, 12, 24] において次のように与えられている:

$\{A_k\}$ を I の有限分割

$$I = \bigcup_k A_k \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$$

差分方程式によって決定される軌道の状態 $\varphi^{(n)}$ は確率分布 $(p_i^{(n)})$ によって定義される。すなわち、 $\varphi^{(n)} = \sum_i p_i^{(n)} \delta_i$ である。ただし、 δ_i は (i, i) 成分のみが 1 である正方行列であり、初期値 $x \in I$ と定義関数 1_{A_i} を使って、

$$p_i^{(n)} \equiv \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{m+n} 1_{A_i}(\mathcal{F}^k x)$$

で表される。初期値 x が I 上の測度 ν に依存しているときは、

$$p_i^{(n)} \equiv \frac{1}{n+1} \int_I \sum_{k=m}^{m+n} 1_{A_i}(\mathcal{F}^k x) d\nu$$

で与えられる。また、時刻 n と時刻 $n+1$ の同時確率分布 $(p_{i,j}^{(n,n+1)})$ は

$$p_{i,j}^{(n,n+1)} \equiv \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{m+n} 1_{A_i}(\mathcal{F}^k x) 1_{A_j}(\mathcal{F}^{k+1} x)$$

または、

$$p_{i,j}^{(n,n+1)} \equiv \frac{1}{n+1} \int_I \sum_{k=m}^{m+n} 1_{A_i}(\mathcal{F}^k x) 1_{A_j}(\mathcal{F}^{k+1} x) dv$$

で定義される。このとき、時刻 n でのチャネル Λ_n^* は

$$\Lambda_n^* \equiv \left(\frac{p_{i,j}^{(n,n+1)}}{p_i^{(n)}} \right) \Rightarrow \varphi^{(n+1)} = \Lambda_n^* \varphi^{(n)}$$

で決定される。エントロピー型カオス尺度は以下で定義される。

$$D_c(\varphi^{(n)}; \Lambda_n^*) = \sum_i p_i^{(n)} S(\Lambda_n^* \delta_i) = \sum_{i,j} p_{i,j}^{(n,n+1)} \log \frac{p_{i,j}^{(n,n+1)}}{p_i^{(n)}}.$$

このカオス尺度を3.3節～3.5節で著名な写像に適用し、カオス尺度の有用性を議論する。

ロジスティック写像のリアプノフ指数とカオス尺度

ロジスティック写像 f_a は、

$$f_a(x_n) = ax_n(1-x_n), x_n \in [0, 1], \quad 0 \leq a \leq 4$$

で定義され、パラメーター a の値によって安定解を持たない場合が生じ、以下の図のような分岐構造を持っている。

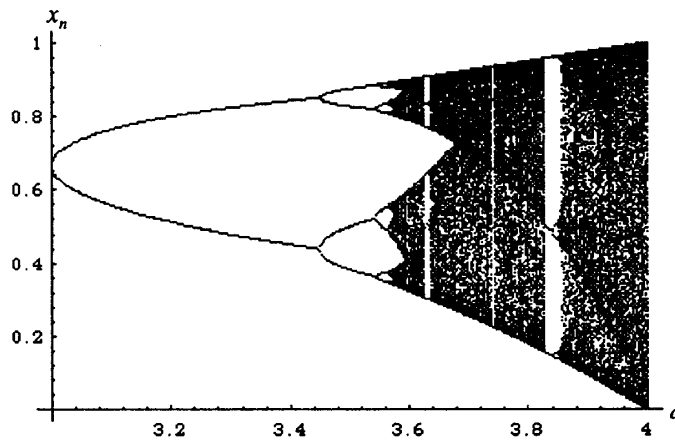


図1. ロジスティック写像の分岐図

図2, 図3は, 3.0から4.0までの1000個の a について $n=10000$ ステップの写像を用いてリアプノフ指数 λ_n とカオス尺度 D_c を計算した結果である[25,24].

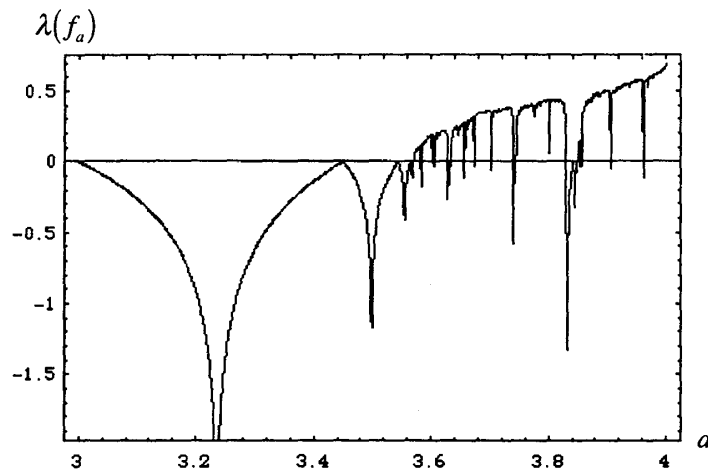


図2. ロジスティック写像のリアプノフ指数

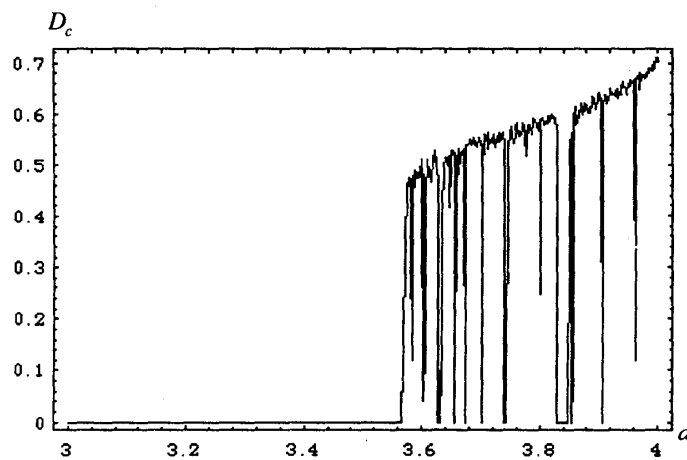


図3. ロジスティック写像のカオス尺度

リアプノフ指数が負の所はカオス尺度は0, 正の所はカオス尺度も正となり, カオス尺度とリアプノフ指数が1対1に対応している.

パイコネ変換のリアプノフ指数とカオス尺度

2次元カオスの一つであるパイコネ変換のカオス尺度を計算しリアプノフ指数との比較を試みる. ここでは, パイコネ変換 f_a として

$$f_a(\mathbf{x}_n) = f_a(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = \begin{cases} \left(2ax_1^{(n)}, \frac{1}{2}ax_2^{(n)} \right) & (0 \leq x_1^{(n)} \leq 0.5) \\ \left(a(2x_1^{(n)} - 1), \frac{1}{2}a(x_2^{(n)} + 1) \right) & (0.5 < x_1^{(n)} \leq 1) \end{cases}$$

ただし, $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $0 \leq a \leq 1$.

を考える. 以下は a による軌道図の変化を表したものである.

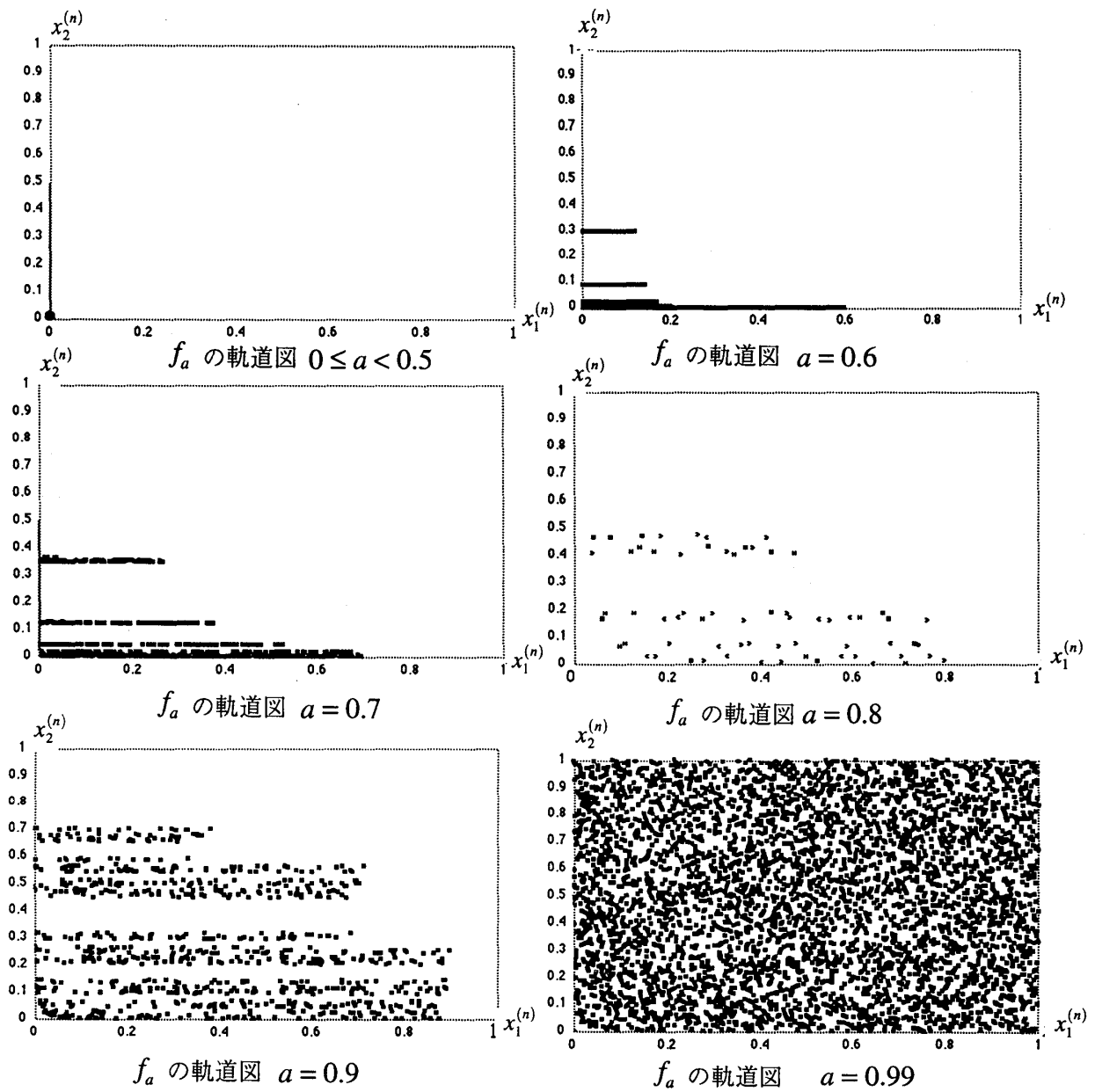


図4. パイこね変換の軌道図

図5, 図6はパイこね変換に対するリアプノフ指数とカオス尺度を計算した結果である[12].

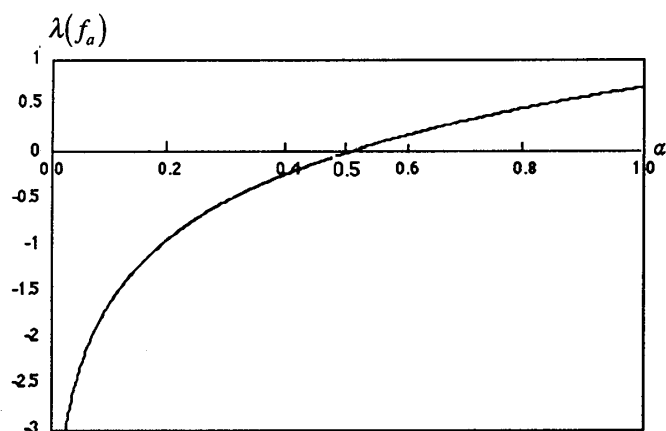


図5. パイこね変換のリアプノフ指数

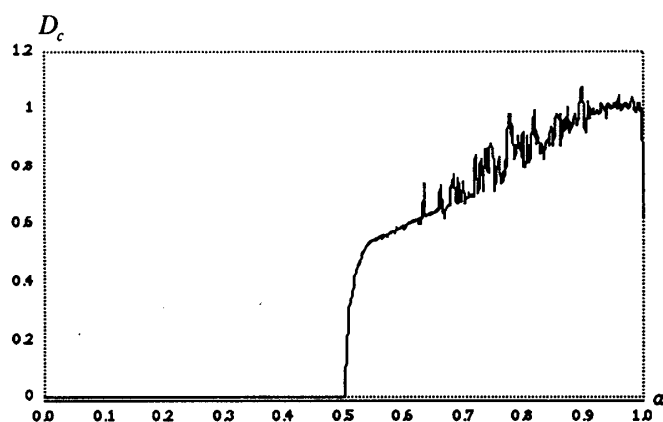


図6. パイこね変換のリアプノフ指数

2進変換とパイこね変換に対して、 $0 \leq a \leq 0.5$ のときは、リアプノフ指数は負の値、カオス尺度は0の値を取っている。 $0.5 < a \leq 1$ のときは、リアプノフ指数とカオス尺度は共に正の値を取りその挙動が一致している。しかしながら、 $a=0$ では、リアプノフ指数は $-\infty$ の値を取ってしまっていることがわかる。

ティンカーベル写像のカオス尺度

この節では、パイこね変換より複雑な挙動を示すティンカーベル写像(Tinkerbel map)をカオス尺度を用いて考察する。

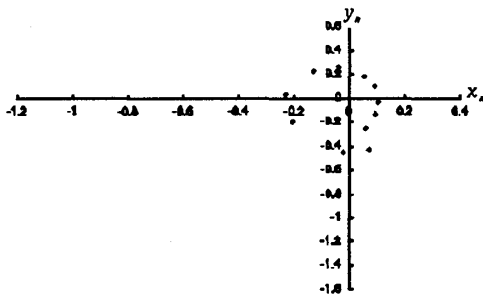
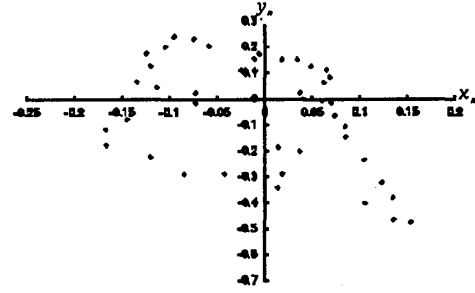
ティンカーベル写像は

$$f(\mathbf{x}_n) = f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ = \left((x_1^{(n)})^2 - (x_2^{(n)})^2 + c_1 x_1^{(n)} + c_2 x_2^{(n)}, 2x_1^{(n)} x_2^{(n)} + c_3 x_1^{(n)} + c_4 x_2^{(n)} \right)$$

で定義される写像である。ここでは、

$$\begin{aligned}
f_a(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) &= \left((x_1^{(n)})^2 - (x_2^{(n)})^2 + ax_1^{(n)} + c_2x_2^{(n)}, 2x_1^{(n)}x_2^{(n)} + c_3x_1^{(n)} + c_4x_2^{(n)} \right), \\
f_b(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) &= \left((x_1^{(n)})^2 - (x_2^{(n)})^2 + c_1x_1^{(n)} + c_2x_2^{(n)}, 2x_1^{(n)}x_2^{(n)} + bx_1^{(n)} + c_4x_2^{(n)} \right), \\
I &= [-1.2, 0.4] \times [-0.7, 0.3], \\
-0.4 \leq a \leq 0.9, 1.9 \leq b \leq 2.9, \\
(c_1, c_2, c_3, c_4) &= (-0.3, -0.6, 2.0, 0.5), \\
(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= (0.1, 0.1)
\end{aligned}$$

に対してカオス尺度を計算する． $1001 \leq n \leq 4000$ の n に対して，写像点 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ をプロットしてみよう．軌道が安定しているときは， $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ が周期的に同じ点に折り重なるため，写像点の数が有限になる．図7，図8は軌道が安定している場合の f_a と f_b の軌道図である．

図7. f_a の軌道図($a = 0.243$)図8. f_b の軌道図($b = 2.65$)

それに対し，軌道が不安定(カオス的)になる場合は，時刻 n に関してランダムな挙動を示し，軌道が複雑になる．図9，図10は軌道がカオス的になる場合の f_a と f_b の軌道図である．

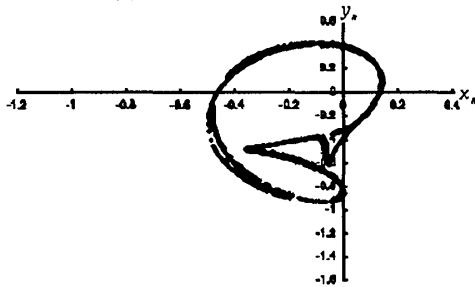
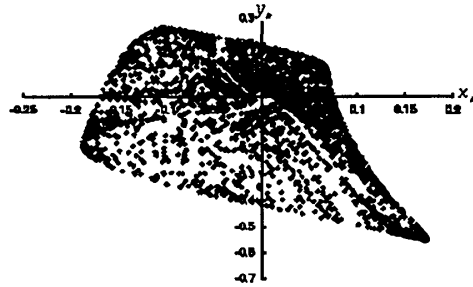
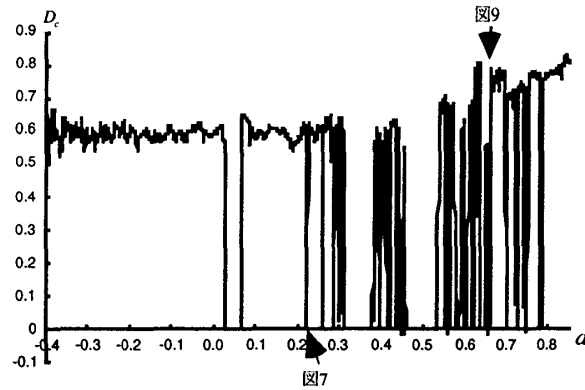
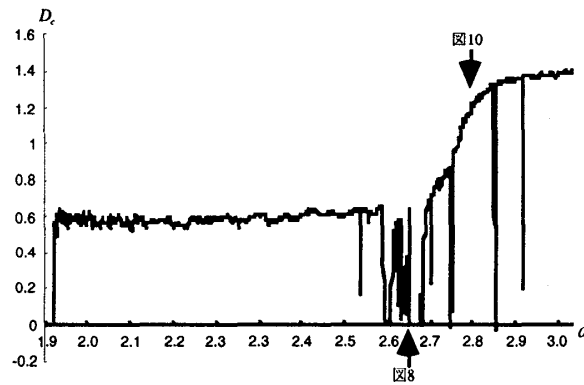
図9. f_a の軌道図($a = 0.670$)図10. f_b の軌道図($b = 2.8$)

図11，図12はティンカーベル写像 f_a と f_b に対するカオス尺度を計算した結果である[12].

図 1 1. f_a に対するカオス尺度図 1 2. f_b に対するカオス尺度

4. 量子系におけるカオス尺度

この章では、量子系において、von Neumann エントロピーと量子相互エントロピーを用いて定義されるエントロピー型カオス尺度を用いてスピン系の非線形な変換の下での一般的振る舞いを考察する。

4. 1. 量子系のエントロピー型カオス尺度の計算アルゴリズム

ここでは、状態が密度作用素 ρ として記述される量子系のエントロピー型カオス尺度について説明する[26,15]. $\mathcal{F}^*$ をある状態を他の状態に写すチャネルとし、 ρ を初期状態とする. 時間 m 後の状態は $\mathcal{F}^{*m}\rho$ となる. そのシャッテン分解 (1次元スペクトル分解) が $\sum_k \lambda_k^{(m)} E_k^{(m)}$ によって記述されているとし、 $\otimes_1^n \mathcal{H}$ 上のチャネル Λ_n^* を

$$\Lambda_n^* \sigma = \sigma \otimes \mathcal{F}^* \sigma \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^{*(n-1)} \sigma, \quad \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$$

で定義する. このとき、エントロピー型カオス尺度 D_q を

$$D_q(\rho; \Lambda_n^*) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_k \lambda_k^{(m)} S(\Lambda_n^* E_k^{(m)}; \{E_k^{(m)}\}) \right\}$$

によって定義する.

4. 2. 量子スピン系のカオス

スピン1/2系の状態 ρ は, $\|\bar{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1$ を満足する $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)^t \in R^3$ に対して,

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{\sigma} \cdot \bar{X})$$

で与えられる. ここで, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^t$ で

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である. このとき, 以下の補題が成り立つ[15].

<補題 4. 1> スピン1/2系の状態 ρ のシャッテン分解は

$$\rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} E_{\alpha} \quad (\alpha = \pm 1)$$

で一意的に与えられる. ただし,

$$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{2} (1 + \alpha \|\bar{X}\|), \quad E_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(I + \alpha \frac{\vec{\sigma} \cdot \bar{X}}{\|\bar{X}\|} \right).$$

いま, $f: R^3 \rightarrow R^3$ を $\|f(\bar{X})\| \leq 1$ を満足する3次元写像であるとする. このとき, この f を用いて, 量子スピン1/2系の非線形変換 $\Lambda_f^*: \rho \rightarrow \Lambda_f^* \rho$ を

$$\Lambda_f^* \rho = \frac{1}{2} (I + \vec{\sigma} \cdot f(\bar{X}))$$

で定義する. このとき, 以下の定理が成り立つ.

<定理 4. 1> : $\Lambda_f^* \rho$ のシャッテン分解が $\Lambda_f^* \rho = (\Lambda_f^*)^j \rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{(j)} E_{\alpha}^{(j)}$, $\Lambda_f^* E_{\alpha}^{(m)}$ の

シャッテン分解が $\Lambda_f^* E_{\alpha}^{(m)} = (\Lambda_f^*)^j E_{\alpha}^{(m)} = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} F_{\alpha\beta}^{(m,j)}$ で表されるものとする. このとき, 任意の f に対して, ある定数 m のカオス尺度は

$$D_q(\rho; \Lambda_n^*) = \inf \left\{ -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha} (\omega_{\beta}^{\alpha})^{(k)} \log (\omega_{\beta}^{\alpha})^{(k)} ; E = \{E_k^{(m)}\} \right\}$$

で与えられる。ただし,

$$\lambda_{\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(1 + \alpha \left\| f^m(\bar{X}) \right\| \right)$$

$$\omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} = \frac{1}{2} \left(1 + \beta \left\| f^j \left(\alpha \frac{f^m(\bar{X})}{\left\| f^m(\bar{X}) \right\|} \right) \right\| \right)$$

ここで, 次のようなパイこね型変換写像を定義する.

[定義 4. 1] $(x_n, y_n, z_n)' \in \mathbf{R}^3$ に対して,

$$f(x_n, y_n, z_n) = \begin{cases} f_1(x_n, y_n, z_n) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x_n < 0 \right) \\ f_2(x_n, y_n, z_n) & \left(0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

ただし,

$$f_1(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$f_2(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} a - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

もし, $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x_n| \leq 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < |y_n| \leq 1 \right)$ ならば, $x_n = 0 (y_n = 0)$ である.

以下の図は, $x_0 = y_0 = z_0 = 0.3$, $m = 100, n = 200$ のときのカオス尺度 D_q の a に関する推移を表している.

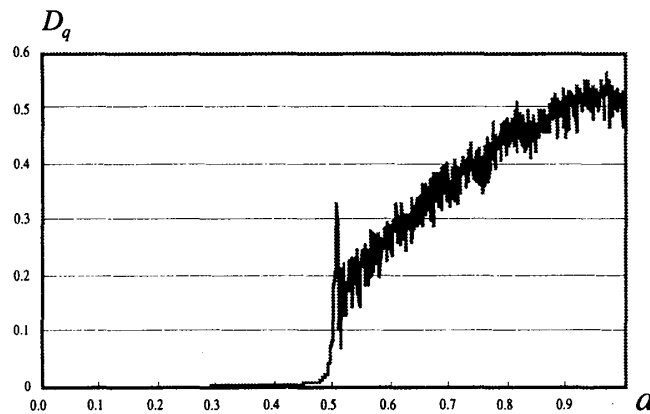


図 1 3. パイこね型変換のカオス尺度

参考文献：

- [1] L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe, Note on quantum dynamical entropies, Reports on Mathematical Physics, 38, No.3, 457-469, 1996.
- [2] S. Akashi, The asymptotic behavior of ε -entropy of a compact positive operator, J.Math.Anal.Appl., 153, 250-257, 1990.
- [3] K.T. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke, *Chaos-An Introduction to Dynamical Systems*-, Textbooks in Mathematical Sciences, Springer, 1996.
- [4] R. Alicki, Quantum geometry of noncommutative Bernoulli shifts, Banach Center Publications, Mathematics Subject Classification 46L87, 1991.
- [5] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebras, Publ. RIMS Kyoto Univ., 11, 809-833, 1976.
- [6] F. Bennatti, *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Springer (1993).
- [7] G.Casati, G.Maspero and D.Shepeliansky: Relaxation process in a regime of quantum chaos, Phys. Rev. E 56, R6233, 1997.
- [8] A. Connes, H. Narnhoffer and W. Thirring, Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras, Acta Mathematica, 134, 289-306, 1975.
- [9] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic dynamical Systems*, Benjamin, 1986.
- [10] H. Hasegawa, Dynamical formulation of quantum level statistics, Open Systems and Information dynamics, 4, 359-377, 1997.
- [11] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [12] K. Inoue, M. Ohya and S. Sato, Application of chaos degree to some dynamical systems, to appear in Chaos, Solitons & Fractals.
- [13] 井上 啓・上川原 一, カオス尺度によるカオス現象の解析, 物性研究, in this volume.
- [14] 井上 啓・上川原 一・大矢雅則, 量子エントロピー型カオス尺度を用いたスピントロポンのカオスの解析, 投稿中.
- [15] K. Inoue, A. Kossakowski and M. Ohya, On quantum chaos in a spin system, to appear.
- [16] A. Kossakowski, M. Ohya and N. Watanabe, Quantum Dynamical Entropy for Completely Positive Map, to appear in Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability.
- [17] M. Misiurewicz, Absolutely continuous measures for certain maps of interval, Publ. Math. IHES, 53, 17-51, 1981.
- [18] M. Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Trans. Information Theory, 29, No.5, 770-774, 1983.
- [19] M. Ohya, Entropy transmission in C^* -dynamical systems, J. Math. Anal. Appl., 100, 222-235, 1984.
- [20] M. Ohya, Information dynamics and its applications to optical communication processes, Lecture Note in Physics, 378, 81-92, 1991.
- [21] M. Ohya, State change, complexity and fractal in quantum systems, Quantum Communications and Measurement, 2, 309-320, 1995.
- [22] 大矢雅則, 小嶋 泉 (編著), 量子情報と進化の力学, 牧野書店, 1996.
- [23] M. Ohya, Complexity and fractal dimensions for quantum states, Open Systems and Information Dynamics, 4, 141-157, 1997.
- [24] 大矢雅則・小坂稔, 情報力学によるカオス現象の考察, IEICE, J80-A, No.12, 2138-2144, 1997.
- [25] M. Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, International Journal of Theoretical Physics, 37, No.1, 495-505, 1998.
- [26] Complexity in dynamics and computation, to appear in The Proceedings of Classical and Quantum White Noise, Kluwer Academic Publishers.
- [27] M. Toda, Crisis in chaotic scattering of a highly excited van der Waals complex, Physical Review Letters, 74, No.14, 2670-2673, 1995.
- [28] A. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, Commun. Math. Phys., 54, 21-32, 1977.