

# $GL_p$ -bundle の非可換幾何

信州大学理学部 浅田明 (Akira Asada)

次の微分幾何の問題は, 可積分系と関係が深い.

(i) (行列値)1-形式  $\theta$  が  $g^{-1}dg$  と書ける条件を求めよ.

(ii) (行列値)2-形式  $\Theta$  が  $d\theta + \theta \wedge \theta$  と書ける条件を求めよ.

$M$  を polarization  $E$  を持つ Hilbert 空間,  $I_p$  を  $M$  の線形作用素の作る  $p$ -Schatten ideal とする時, (i), (ii) の非可換版は

(i)'  $I_p$  の値を取る  $K$  が  $g^{-1}[E, g]$  と書ける条件を求めよ.

(ii)'  $I_p$  の値を取る  $R$  が  $EK + KE + K^2$  と書ける条件を求めよ.

となる. (i), (ii) の (局所) 解を非 Abel Poincaré 補題と呼んでいるので ([2], [1] 参照), (i)', (ii)' の解は非可換 Poincaré 補題と呼ぶ事にする.

以下では非可換 Poincaré 補題を中心に,  $GL_p$ -bundle の非可換幾何的取扱について話す. これは前回の研究会での話 ([3]) の続きだが, 前回話した非可換特性類は,  $GL_p$ -bundle は  $U_1$ -bundle に同値な事実証明出来たので必要なくなった. これについて

も報告する.

# 1. 群 $GL_p$ , 環 $gl_p$ と非可換形式

$\mathcal{H}$  を polarization  $\varepsilon = P_+ - P_-$  を持つ Hilbert 空間,  $B(\mathcal{H})$ ,  $GL(\mathcal{H})$ ,  $U(\mathcal{H})$  を, それぞれ  $\mathcal{H}$  の有界線形作用素の作る環, 逆を持つ有界線形作用素の作る群, Unitary 作用素の作る群とする.  $\mathcal{H}$  の compact 作用素の全体  $I_c$  は  $B(\mathcal{H})$  の唯一の極大 ideal だが

$$I_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid \sum |(Te_n, e_n)|^p < \infty, \text{ ある } O.N\text{-basis } \{e_n\} = \gamma\}$$

も ideal で  $p$ -Schatten ideal と呼ばれる. 定義から  $p > q$  なら

$I_p \subset I_q$  だが, 更に

$$(1) \quad I_p^2 = I_{p/2}$$

である.  $\varepsilon$  と  $I_p$  を用いて

$$gl_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$

$$GL_p = \{T \in GL(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$

$$U_p = GL_p \cap U(\mathcal{H})$$

とおく.  $T \in GL_p$  の時  $|T| \in GL_p$  となるから,  $GL_p$  を構造群とする paracompact 空間上の fibre bundle ( $GL_p$ -bundle) は  $U_p$  を構造群とする bundle と同値である.

$P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$ ,  $P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$  とすれば, 直和分解  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  により,

$T \in B(\mathcal{H})$  は  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と  $(2, 2)$ -行列の形に書ける.

$$T^d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad T^0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{とした時}$$

$$\varepsilon T = T \varepsilon \Leftrightarrow T = T^d, \quad \varepsilon T = -T \varepsilon \Leftrightarrow T = T^0$$

となる.

$$(2) \quad \delta_+ T = \{\varepsilon, T\} = \varepsilon T + T \varepsilon, \quad \delta_- T = [\varepsilon, T] = \varepsilon T - T \varepsilon$$

と書く事にする.  $\delta_+ \delta_- = \delta_- \delta_+ = 0$  である.

定義  $T_{i_0 i_k}, T_{i_0}, \dots, T_{i_k} \in \mathfrak{gl}_p$  の時

$$\sum T_{i_0 i_k} \delta_- T_{i_0} \delta_- T_{i_k}$$

の形の元を非可換  $k$ -形式 (非可換  $k$ -次微分形式) と呼ぶ.

定義から非可換  $k$ -形式  $\in I_p^k$ , 特に非可換 2-形式  $\in I_{p/2}$  である

補題 1,  $\delta_- (2k\text{-非可換形式}) = (2k+1)\text{-非可換形式}$ ,

$$\delta_+ ((2k+1)\text{-非可換形式}) = (2k+2)\text{-非可換形式}$$

注意 より精密に, 次が成立する.

$$\{\text{非可換 } 2k\text{-形式}\} / I_p^{2k+1} = (I_p^{2k} / I_p^{2k+1})^d$$

$$\{\text{非可換 } (2k-1)\text{-形式}\} / I_p^{2k} = (I_p^{2k-1} / I_p^{2k})^0.$$

## 2. 非可換接続と非可換曲率

$\xi = \{g_{uv}\}$  を多様体  $M$  上の  $GL_p$ -bundle とする.

定義  $I_p$  の値を取る (連続, 又は可微分) 関数の集まり  $\{K_u\}$  が

$$(3) \quad (\varepsilon + K_u) g_{uv} = g_{uv} (\varepsilon + K_v)$$

を満す時,  $\omega$  の非可換接続, 又  $\{R(K_u)\} = \{R_u\}$

$$(4) \quad R(K_u) = \varepsilon K_u + K_u + K_u^2$$

を,  $\{K_u\}$  の(非可換)曲率と言う.

$\{u\}$  に関する  $(C^\infty\text{-級})$  1 の分割を  $\{e_u\}$  とした時

$$K_u = \sum e_w g_{uw}^{-1} [\varepsilon, g_{uw}]$$

とおけば (3) をみたすから

補題 2  $M$  が paracompact な Hilbert 多様体の時,  $M$  上の  $GL_p$ -bundle は非可換 1-形式に値を取る非可換接続を持つ. 特にと  $U_p$ -bundle であれば, Hermite 作用素の値を取る非可換 1-形式の非可換接続を持つ.

系 同じ仮定で,  $\omega$  は  $Id_2$  に値を取る非可換曲率を持つ.

尚非可換接続, 非可換曲率の形式的性質は通常の接続, 曲率 ( $gl_p$  に値を取る 1-形式と 2-形式) と同じである ([3]).

### 3. 非可換 Poincaré 補題, I. 局所問題.

最初に, 比較の爲非 Abel Poincaré 補題に関する結果をまとめておく ([2]).

行列値微分形式  $\phi = \sum \phi_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  に対し

$$I\phi = \sum I(\phi)_{i_1 \dots i_{p-1}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

$$I(\phi)_{i_1 \dots i_{p-1}} = \int_0^1 t^p \sum_{j=1}^m x_j \phi_{j, i_1 \dots i_{p-1}}(x_t) dt$$

$$I_\theta(\phi) = I(\theta \wedge \phi), \quad P_\theta(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} I_\theta^n(\phi)$$

とおく. 但し  $\theta$  は行列値 1-形式である. この時

$$dP_\theta(\phi) = \theta \wedge P_\theta(\phi) + P_\theta(d\phi - I((d\theta + \theta \wedge \theta) \wedge P_\theta(\phi)))$$

が成立する. 特に  $d\theta + \theta \wedge \theta = 0$  或  $\theta = g^{-1}dg$  と (局所的に) 書ける為の必要十分条件で  $g$  は  $P_\theta(1)$  (1 は単位行列) で与えられる ([1] 参照). これは 1-次元非 Abel Poincaré 補題である.

2-次元非 Abel Poincaré 補題 (曲率形式の候補者を与えて接続形式を求める問題) は次の様に述べられる.

1-形式  $\phi$  と  $p$ -形式  $\beta$  に対し

$$J_\phi(\beta) = (-1)^{p+1} P_\phi(1)^{-1} (-1)^{p+1} (I(P_\phi(1)\beta))$$

とおく. 1-形式  $\beta$  と 2-形式  $\alpha$  に対し

$$T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - J_\beta \left( D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right), \quad D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\alpha + [\beta, \alpha] \\ \alpha - (d\beta + \beta \wedge \beta) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} J_\beta(\alpha) = J_\beta(\alpha) \\ J_\beta(\beta) = J_\beta(\beta) \end{matrix}$$

とおいた時, すべての  $n$  について

$$T^n \begin{pmatrix} \oplus \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oplus \\ \theta_n \end{pmatrix}$$

がなりたてば,  $\lim \theta_n = \theta$  が存在して  $d\theta + \theta \wedge \theta = \oplus$  となり, 逆も正しい.

非可換 Poincaré 補題は, Hermite 作用素の値を取る,  $I_p$ -値関数  $K$  と  $R$  に対してだけ保られているので, 以下その事を仮定

する.

定理 1. (i)  $K$  が (非可換) 平坦,  $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2 = 0$ , とする際の必要十分条件は  $U_p$  の値を取る関数  $g$  が存在して

$$(5) \quad K = g^{-1}[\varepsilon, g]$$

と (局所的に) 書ける事である.

(ii)  $R = \varepsilon K + K\varepsilon + K^2$ ,  $K$  は  $I_p$  の値を取る関数, と書ける際の必要十分条件は次の (a), (b) である.

(a)  $I + R$  は positive 作用素になる.

$$(b) \quad [\varepsilon, R] \in I_p^2$$

$K$  が平坦なら  $(\varepsilon + K)^2 = I$  となり,  $K(x) \in I_p$  から  $\varepsilon + K(x)$  は  $\varepsilon$  と同じ spectre 型を持つ. 従って (i) は次の補題 3 に帰着する.

補題 3.  $\varepsilon_u$  が  $\mathcal{A}$  の polarization の値を取る関数なら, 局所的に  $\varepsilon_u$  と同じ regularity を持つ, unitary 作用素の値を取る関数  $h_u$  があって  $\varepsilon_u = h_u^{-1}\varepsilon h_u$  と書ける. 更に  $\varepsilon + \varepsilon_u$  が mod.  $I_p$  で逆を持てば,  $h_u$  は  $U_p$  に値を取る. 但し  $\varepsilon_u \in \mathcal{O}I_p$  とする.

証明 (藤井一幸氏に与る).  $\varepsilon_u(x)$  と  $\varepsilon$  の spectre 型が等しいから,  $\varepsilon_u(x_0) = \varepsilon$  と仮定して良い.  $\eta = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\varepsilon_u)$  とおくと  $\eta(x_0) = 1$ ,  $\varepsilon\eta = \eta\varepsilon_u$  だから,  $\eta$  が逆を持つ範囲で  $\varepsilon_u = \eta^{-1}\varepsilon\eta$  である. 又  $\eta^*\varepsilon = \varepsilon_u\eta^*$  だから

$$\eta\eta^*\varepsilon = \eta\varepsilon_u\eta^* = \varepsilon\eta\eta^*$$

である. 従って  $(\eta\eta^*)^{1/2}$  も  $\varepsilon$  と交換し

$$h = (\eta\eta^*)^{-1/2} \eta$$

は unitary,  $h^{-1}\varepsilon h = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1/2}\varepsilon(\eta\eta^*)^{-1/2}\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\varepsilon\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\eta\varepsilon_u = \varepsilon_u$

となって前半が得られる. 後半は  $\varepsilon_u = h^{-1}\varepsilon h$  の時

$$\begin{aligned} [\varepsilon, \varepsilon_u] &= \varepsilon h^{-1}\varepsilon h - h^{-1}\varepsilon h \varepsilon = \varepsilon h^{-1}(\varepsilon h - h \varepsilon) + h^{-1}\varepsilon(\varepsilon h - h \varepsilon) \\ &= (\varepsilon + h^{-1}\varepsilon h) h^{-1}(\varepsilon h - h \varepsilon) = (\varepsilon + \varepsilon_u) h^{-1}[\varepsilon, h] \end{aligned}$$

から解る.

$R = \varepsilon K + K \varepsilon + K^2$  なら  $I + R = (\varepsilon + K)^2$  だから  $I + R$  は positive である.

逆に  $I + R$  が positive の時  $I + R = \sum \lambda_i P_i$  と spectral 分解出来  $\lambda_i \geq 0$  である. 符号の不定性を残したまま

$$(I + R)^{1/2} = \sum \pm \sqrt{\lambda_i} P_i$$

と書く.  $K = (I + R)^{1/2} - \varepsilon$  と置けば  $R = \varepsilon K + K \varepsilon + K^2$  だから,  $K \in I_p$  となる様  $I + R$  の固有値の平方根の符号を定める事が問題である. (b) から  $I + R$  の固有値は有限個を除いて,  $I + R^d$  の固有値の擾動として定められ,  $I + R^d$  の固有値の平方根の符号は,  $I + R^d$  と  $\varepsilon$  が同時対角化されるから,  $\varepsilon$  から定められる.

この時  $\sum |\lambda_i - 1|^p < \infty$  から  $\sum |\sqrt{\lambda_i} - 1|^p < \infty$  となる事により,  $K \in I_p$  が得られる. 尚この議論から  $\varepsilon K + K \varepsilon + K^2 = \varepsilon K' + K' \varepsilon + K'^2$  なら

$$(6) \quad K' = eK, \quad e = I - 2P, \quad P \text{ は有限次元空間への射影}$$

となる.

#### 4. 非可換曲率の性質

[3] で述べた様には,  $\{K_u\}, \{R_u\} = \{R(K_u)\}$  を  $\mathcal{U}_p$ -bundle 上の Hermite 非可換接続, 及び曲率とする時, 次の (a), (b) が成立する.

(a)  $I + R_u(x)$  が致す所逆を持たなければ,  $\mathcal{U}$  は trivial である.

(b)  $R_u(x)$  が  $I_q$  の値を取れば,  $\mathcal{U}$  は  $\mathcal{U}_q$ -bundle と同値である ( $p > q$  とする).

(a) は補題 3 と  $\mathcal{H}$  の unitary 作用素の群が可縮という Kuiper の定理から導かれる. (b) は摂動論の Rellich-Kato の定理から, 任意の  $x$  の近傍で  $\mathcal{H}$  の射影の値を取る連続 (又は可微分) 関数  $P_T$  で

$$P_T \mathcal{H} = \ker(\varepsilon + K_u(x)) \oplus \{\varepsilon + K_u(x) \text{ の } + \text{ 固有空間} \}$$

となるものの存在が言え, この事と補題 3 から得られる.

(b) と補題 2 から次の定理が得られる

定理 2. Paracompact 多様体 (又は  $C^\infty$ -smooth 多様体) 上の  $GL_p$ -bundle は位相的 bundle (又は可微分 bundle) として,  $\mathcal{U}_1$ -bundle と同値である. 特に非可換接続, 非可換曲率としては, trace を持つものを取り得る.

## 5 非可換 Poincaré 補題 II, 大域問題

$M$  は paracompact, 位相的 bundle の時,  $C^\infty$ -smooth ( $C^\infty$ -級の 1 の分割を持つ, paracompact な Hilbert 多様体なら充分), 可微分 bundle の時, とし  $K$ ,  $R$  は  $M$  上連続, 又は微分可能な Hermite 且  $I_p$  の値を取る関数とする. ことわらないうち, 以下表われる関数は  $K$ ,  $R$  と同じ regularity を持つとする.

定理 3.  $K$  が  $M$  上で  $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2 = 0$  をみたせば

$$K = g^{-1}[\varepsilon, g],$$

となる  $M$  から  $U_p$  への関数  $g$  が存在する.

証明 Local には  $K = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$  と書ける.

$$(fg)^{-1}[\varepsilon, fg] = g^{-1}\{f^{-1}[\varepsilon, f]g + g^{-1}[\varepsilon, g]\}$$

から  $C_{uv} = g_u g_v^{-1}$  とおくと,  $\{C_{uv}\}$  は  $M$  上の  $U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$ -bundle を定める. 従って Kuiper の定理から  $C_{uv} = h_u^{-1} h_v$ ,  $h_u: U \rightarrow U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$  と書け,  $h_u g_u = h_v g_v$ ,  $(h_u g_u)^{-1}[\varepsilon, h_u g_u] = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$  故に定理が得られる.

$R$  が定理 1, (ii) の (a), (b) をみたせば, 局所的に

$$R = \varepsilon K_u + K_u \varepsilon + K_u^2, \quad K_u = (I + R)^{\frac{1}{2}}_u - \varepsilon,$$

と書け,  $(I + R)^{\frac{1}{2}}_u = e_{uv} (I + R)^{\frac{1}{2}}_v$  とおけば

$$e_{uv} = I - 2P_{uv}, \quad P_{uv} \text{ は有限次元空間への射影}$$

となる.  $I+R$  が  $M$  上 open dense な集合で, 単純固有値  $\lambda$  を持たなければ  $\{e_{uv}\}$  は (幾分) 可授になるが,  $M$  上の Hermite 且  $I_p$  の値を取る関数  $S$  を取って  $I+R+TS$  が  $T>0$  で定理 1, (ii) の (a), (b) をみたし,  $M$  の open dense な集で, 単純固有値  $\lambda$  を持たない様出来るから,  $\{e_{uv}\}$  は可授と仮定して良い. この時  $e_{uv}(\alpha)$  は  $\mathbb{Z}_2^\infty$  ( $\mathbb{Z}_2$  の無限直和) の元と思えるから,  $\{e_{uv}\}$  は  $\mathbb{Z}_2^\infty$ -係数の  $M$  上の Čech 1-cycle を定める. そうすれば標準的な議論で次の定理が得られる.

定理 4.  $\{e_{uv}\}$  の定める  $H^1(M, \mathbb{Z}_2^\infty)$  の元は  $R$  だけで定まる. この元を  $\circ(R)$  と書くと  $\circ(R) = 0$  が  $R = \varepsilon K + K\varepsilon + K^2$  と  $M$  上で書ける層の必要十分条件である. 特に  $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$  であれば,  $R$  は常に  $M$  上で  $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2$  と書ける.

## 6. 非可換 Poincaré 補題と $U_p$ -bundle の不変量

$\mathcal{U} = \{g_{uv}\}$  を  $M$  上の  $U_p$ -bundle とし,  $\{R_u: \mathcal{U} \rightarrow I_p, \text{ 且 Hermite}\}$  は, 各  $R_u(\alpha)$  が定理 1, (ii) の (a), (b) をみたし

$$(7) \quad g_{uv}^{-1} R_u g_{uv} = R_v$$

となるものとする ( $\mathcal{U}$  上の関数として連続又は可微分).

もし  $(I+R_u)^{\frac{1}{2}}$  は,  $(I+R_u)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon \in I_p$ , 且

$$(8) \quad g_{uv}^{-1} (I+R_u)^{\frac{1}{2}} g_{uv} = (I+R_v)^{\frac{1}{2}}$$

となる様取れば,  $K_u = (I+R_u)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$  は

$$(9) \quad g_{uv}^{-1} K_u g_{uv} + g_{uv}^{-1} [\varepsilon, g_{uv}] = K_v$$

をみたすから、 $\{K_u\}$  の非可換接続になる。

実数  $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の時  $\{tR_u\}$  も  $\{R_u\}$  と同じ性質を持つ。もし  $(I+tR_u)^{1/2} \in I_p$  と

$$(I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon \in I_p, \quad g_{uv}^{-1} (I+tR_u)^{1/2} g_{uv} = (I+tR_v)^{1/2}$$

となる様取れば、

$$K_{u,t} = (I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon,$$

とあって、 $\{K_{u,t}\}$  は  $\{K_u\}$  の非可換接続であり、 $\lim_{t \rightarrow 0} K_{u,t}$  は平坦になるから  $\{K_u\}$  は trivial になる。 $I+tR_u(x)$  の spectre 分解は

$$I+tR_u(x) = \sum (1+t\lambda_i(x)) P_i, \quad I+R_u(x) = \sum (1+\lambda_i(x)) P_i,$$

だから、もし  $1+\lambda_i(x) \neq 0$  なら、 $(1+t\lambda_i(x))^{1/2}$  の符号は  $(1+\lambda_i(x))^{1/2}$  の符号から定められる。特に  $\{R_u\}$  が  $\{K_u\}$  の非可換曲率で  $I+R_u(x)$  が常に逆を持つば、 $\{K_u\}$  が trivial になる事がこの事から解る。

$1+\lambda_i \geq 0$  なら  $1+t\lambda_i \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , だから、 $I+R_u(x)$  が 0-mode を持つても  $I+tR_u(x)$ ,  $t < 1$ , は 0-mode を持たない。この場合、 $(I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon \in I_p$  となる  $(I+tR_u)^{1/2}$  は、 $R_u$  が非可換曲率であっても、その非可換接続からは定められない。しかし

$$(10) \quad (I+tR_u)^{1/2} = e_{uv} g_{uv} (I+tR_v)^{1/2} g_{uv}$$

$e_{uv} = I - 2P_{uv}$ ,  $P_{uv}$  は有限次元空間への射影

は成立し、 $e_{uv}$  は  $t$  に無関係に取れる。又  $(I+tR_u)^{1/2}_a$  も  $(I+tR_u)^{1/2}_a - \varepsilon \in I_p$  をみたせば

$$(11) \quad (I + tR_u)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_u (I + tR_u)^{\frac{1}{2}}$$

$\varepsilon_u = I - 2P_u$ ,  $P_u$  は有限次元空間への射影

となる.

(10), (11) から次の cocycle 関係と同値関係が導かれる.

$$(12) \quad e_{uv} g_{uv} \cdot e_{vw} g_{vw} \cdot e_{wu} g_{wu} = 1,$$

$$(13) \quad \{e_{uv}\} \sim \{\varepsilon_u^{-1} e_{uv} g_{uv} \cdot \varepsilon_v g_{uv}^{-1}\}.$$

ここで,  $\{e_{uv}\}$ ,  $\{\varepsilon_u\}$  の交換関係は

$$(14) \quad e_{uv} e_{uw} = e_{uw} e_{uv}, \quad e_{uv} g_{uv} e_{wx} g_{wx} = g_{wx} e_{wx} g_{wu} e_{uv}$$

$$(15) \quad \varepsilon_u e_{uv} = e_{uv} \varepsilon_u, \quad \varepsilon_u g_{uv} \varepsilon_v g_{vu} = g_{uv} \varepsilon_v g_{vu} \varepsilon_u$$

である. 尚  $\{g_{uv}\} \in \{h_u^{-1} g_{uv} h_v\}$  に取りかえると

$$\{e_{uv}\} \rightarrow \{h_u^{-1} e_{uv} h_v\}, \quad \{\varepsilon_u\} \rightarrow \{h_u^{-1} \varepsilon_u h_u\}$$

と変る.

上記を定式化する爲,  $Z_2^\infty$  を (定理4と同じ議論をして),  $R_u$  と可換な有限次元射影を用いて表現すれば  $g_{uv}^{-1} Z_2^\infty g_{uv}$  は  $R_v$  と可換な有限次元射影による  $Z_2^\infty$  の表現である事を注意する. この事からきによって twist された  $Z_2^\infty$  の層  $Z_2^\infty(\xi)$  が出来,  $H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$  がきだけで定まる. (12), (13) から  $\{e_{uv}\}$  から  $H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$  の元  $\circ(R)$  が定まる. 尚交換関係 (15) から, きが non-trivial の時,  $B^1(\mathcal{U}, Z_2^\infty(\xi))$  はかなり小さくなる.

$Z_2^\infty$  は discrete だから  $R$  が parameter  $s$  に連続的に依存している時  $\circ(R)$  は不変である. 特に  $\{R_u\}$  としてきの非可換曲率を取

れば、非可換曲率全体の集合は弧状連結だから  $o(R_{\mu\nu})$  は  $\omega$  だけで定まる。従って次の定理が得られる。

定理 5.  $\{R_{\mu\nu}\}$  を  $\omega$  の非可換曲率とすれば  $o(R_{\mu\nu}) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2^{\infty})$  は  $\omega$  だけで定まる。この元を  $o(\omega)$  とすれば  $o(\omega) = 0$  となる必要十分な条件は  $\omega$  が trivial な事である。

$o(\omega)$  からより計算しやすい不変量を導く事は今後の問題である。尚この研究の主な部分は昨年(93年) Bologna 滞在中出来た。滞在の機会を承えて頂いた Vaz Ferreira 教授と CNR, 及び程々討論した Almeida 教授に感謝します。

#### 文献 (尚 [3] の引用文献参照)

- [1] Almeida, P.: A direct approach to one variable noncommutative calculus, *Port. Math.* 46 (1987),  
 ————: Calcul explicite de l'holonomie (上記の résumé, 3 p).
- [2] Asada, A.: Non Abelian Poincaré Lemma, *Lect. Notes Math.* 1209 (1986), 37-65
- [3] Asada, A.: 非可換接続と超対称性, *数研研講究金庫* 822 (1993), 70-83  
 ————: Non-commutative geometry of  $GL_p$ -bundles, preprint 42 p).

尚非可換幾何の標準 model への応用について最近次の論文が発表された。

- Kastler, D.: A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in non-commutative geometry, I, II,  
*Rev. Math. Phys.* 5 (1993), 477-532, Várilly, J.C.-Gracia-Bondía, J.M.: Connes' noncommutative  
 differential geometry and the standard model, *J. Geo. Phys.* 12 (1993), 223-301.