

音場中の振動気泡の並進運動における粘性抗力

弘前大学・理工学研究科 城田 農¹(Minori Shirota)

東京農工大学・工学府 亀田 正治²(Masaharu Kameda)

¹Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

²Graduate School of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology

1 はじめに

超音波洗浄器や音響化学反応器に見られるような液中音響場において、気泡は体積変動（膨張・収縮運動）を行う。この体積変動によって気泡周囲液体が加速度を持つため、気泡間に相互作用力が働く。近接して置かれた2気泡が同位相で体積変動する場合には2気泡間に正味として接近力が、逆位相で体積変動する場合には反発力が作用することが良く知られている^{[1][2]}。

Batchelorは、同位相で体積変動を行う2気泡が接近するメカニズムについて、渦なし流れの仮定のもと、以下の運動方程式を用いて説明した^[2]。

$$M \frac{dU_1}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [M_0 (U_1 - U_2)] + M_0 \frac{dU_2}{dt} \quad (1)$$

ここで M は気泡内ガス質量、 M_0 は気泡が排除する液体の質量であり、また U_1 は着目気泡の並進運動速度、 U_2 は他気泡が着目気泡の位置に作り出す流れ場の速度を表す。

上式の右辺第二項はBjerknes力と呼ばれる。微小振幅波近似（ $U \cdot \nabla U = 0$ ）に基づくオイラーの運動方程式 $dU/dt = -\nabla p / \rho$ から、

$$M_0 \frac{dU_2}{dt} \approx -V \nabla p \quad (2)$$

と表わされる。ただし、 ρ は液体密度、 V は気泡体積を示す。ここで、2気泡間距離の中心に原点を持ち、原点からそれぞれの気泡中心へ向かう方向を正とする座標系を考える。膨張時には、周囲液体が各々の気泡内向きの加速度を持つため、一方の気泡が作り出す圧力場は $-\nabla p < 0$ となる。収縮時には逆に $-\nabla p > 0$ となる。このため、同位相で体積変動を行う2気泡のBjerknes力は、膨張時にはお互いを引き付けあう接近力として働き、収縮時にはお互いを遠ざける反発力となる。

一方、式(1)の右辺第一項は付加質量力である。気泡膨張時に得た付加質量力（液体慣性力）

は、収縮時に2気泡を接近させるように作用する。気泡収縮時は、気泡が小さくなるため Bjerknes力による反発は小さく、付加質量力による接近が卓越する。この結果、同位相で体積変動を行う2気泡は接近する。

ただし、体積変動をともなう気泡の並進運動を厳密に解析するためには、液体粘性抗力の影響を考慮に入れなければならない。気泡重心の移動量は、気泡収縮時が最も大きい。前述の通りこのときのBjerknes力は無視できるほど小さいため、付加質量力とバランスする力は粘性抗力となる。

本問題における粘性抗力の評価は易しくない。本問題は振動問題であるため、気泡表面に発達する粘性境界層厚さ δ は振動数 ω と動粘度 ν を用いて、 $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ の程度である。ここで、 δ が気泡半径 R に比べて十分に小さい場合には、粘性抗力として高レイノルズ数解が適用でき、一方で δ が大きい場合には低レイノルズ数解が適用できると考えられる。しかし、本問題では物体が体積変動を行うため、代表長さ・代表速度が変化する。このことにより、レイノルズ数が一義に定まらない。さらに、代表速度として並進運動速度と半径方向運動速度の2通りが考えられる。

最近、Magnaudet & Legendre^[7] は、体積変動をともなう球形気泡に対して、レイノルズ数の大小両極限において適用可能な粘性抗力の表記を理論的に導出した。そして、直接数値計算結果との比較によって、半径方向流速(dR/dt)を基準とするレイノルズ数が1より十分大きい場合、たとえ並進運動のレイノルズ数($=2R|U_1-U_2|/\nu$)が1より小さかったとしても、並進運動に対する粘性抗力には、高レイノルズ数流れの仮定から得られるLevichの抗力係数、

$$C_D = \frac{48}{Re} \quad (3)$$

が妥当である、と述べている。Levichの抗力は、静止液体中を高レイノルズ数で上昇する気泡に働く定常抗力として知られており、ポテンシャル流れを用いて算出した粘性散逸量から、あるいは気泡表面上での垂直応力を直接積分することにより求められる。

Magnaudet & Legendreの解析の以前から、音響キャビテーション気泡の並進運動にはLevichの抗力係数が一般的に用いられていた^[3-6]。最近の音響キャビテーション気泡の運動解析^{[8][9]}でも同様である。しかし、振動気泡に対する高レイノルズ数解の適用妥当性は、実験的に検証されていない。特に高粘度液体中あるいは振動数が小さい場合には、振動流による粘性境界層厚さ δ が厚くなるため、高レイノルズ数解が適用できなくなることが予想される。

本研究では、体積変動をともなう気泡並進運動に対する粘性抗力を実験的に評価した。高速度拡大接写撮影により、気泡並進運動のみならず半径方向運動の詳細も同時に取得する精密実験を行った。得られた実験結果と、Magnaudet & Legendreにより導出されたモデルとの比較を行い、音場中の振動気泡の並進運動における粘性抗力を評価した。

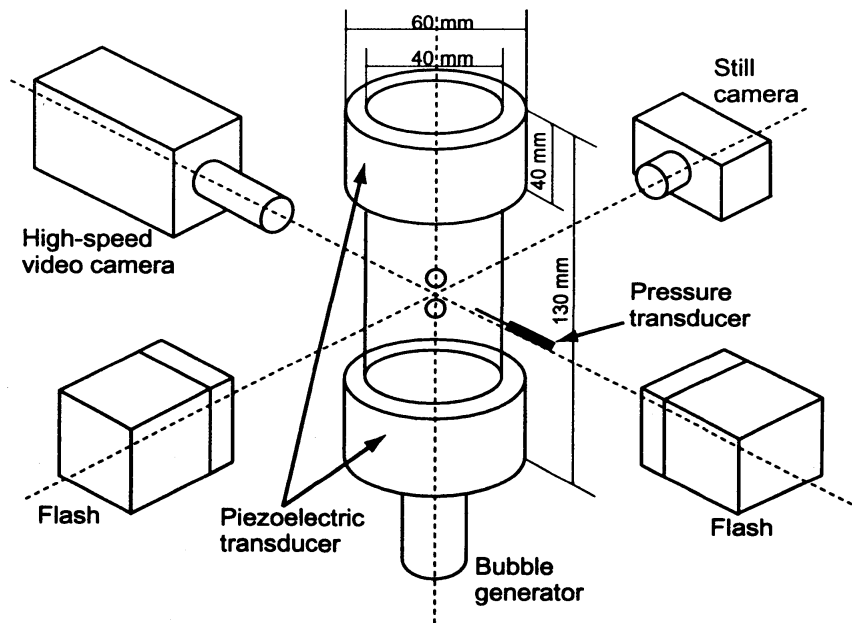


Fig. 1 Schematic diagram of a levitation cell and camera configuration for image capturing.

2 実験装置・方法

実験装置の概要をFig. 1に示す。音場の発生には、一対の円筒形圧電セラミックスの間にガラス管を挟んだ音響共振管^[10]を用いた。音響共振管の内径は40 mm、高さは130 mmである。圧電セラミックスは呼吸モード（半径方向に伸び縮みする）で動くものである。駆動信号をファンクションジェネレータから発信し、パワーアンプによって増幅し、圧電セラミックスに印加した。音響場の測定には、超小型半導体圧力トランスデューサ(Kulite, XCQ-062-25A)を用いた。

気泡は、共振管下部に取り付けた気泡発生装置^[11]により発生させた。2 個の気泡が共振管中央(定在音場の腹) に到達したところで、加振、圧力計測、および撮影をおこなった。撮影は、直交して配置された一眼レフカメラ、および高速度カメラ(島津製作所, HPV-1) を用いておこなった。

発生させた音場の周波数、音圧は、(1)34.5kHz, 100 kPa, (2) 19.2kHz, 25 kPa の2 種類である。それぞれの実験で用いた高速度撮影の撮影速度は250,000, 125,000 frames/s である。いずれの場合も気泡の体積振動が最大となる近傍の大きさを持つ気泡(半径0.1 mm程度) を発生させた。液体には動粘度50 mm²/sのシリコンオイル(信越化学KF96-50), 気体には空気を用いた。

3 運動方程式

2個の球形気泡 i ($i = 1, 2$)の半径および並進運動をFig. 2のような座標系で解析する。このとき半径方向運動の方程式(4), 並進運動の方程式(5)は,

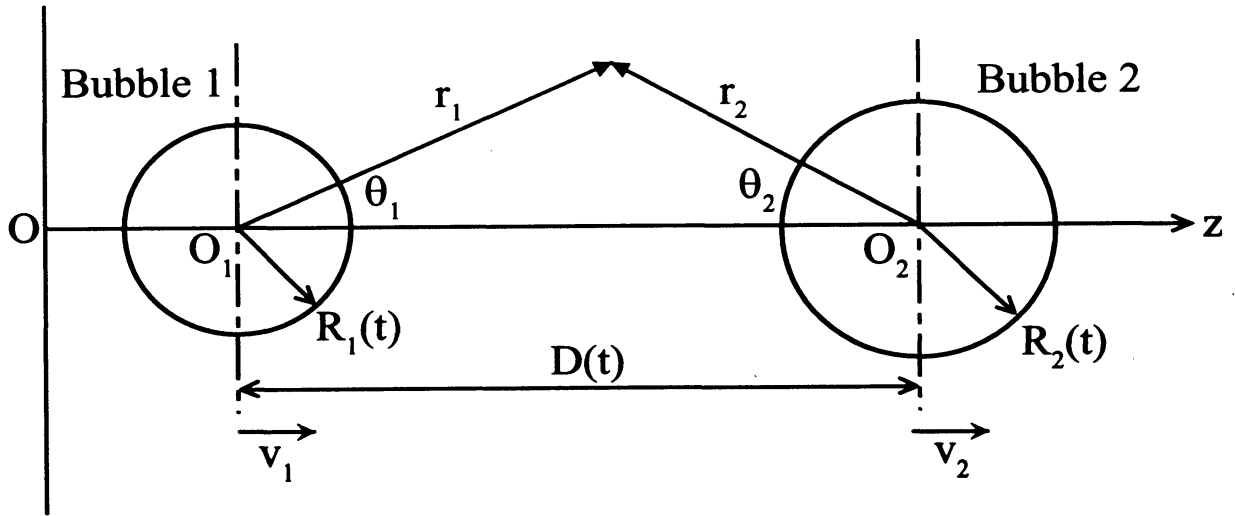


Fig.2 Coordinate system used in the present analysis.

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\dot{R}_i}{c_l}\right) R_i \ddot{R}_i + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}_i}{3c_l}\right) \dot{R}_i^2 \\
 &= \frac{1}{\rho_l} \left(1 + \frac{\dot{R}_i}{c_l} + \frac{R_i}{c_l} \frac{d}{dt}\right) \left(p_g - \frac{2\sigma}{R_i} - \frac{4\mu_l \dot{R}_i}{R_i} - p_{l\infty}\right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_{3-i}^2 \dot{R}_{3-i}}{D}\right)
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho_l V_i v_{ri} \right) = \rho_l V_i \frac{d}{dt} \left(\frac{R_{3-i}^2 \dot{R}_{3-i}}{D^2} \right) - F_v \quad (5)$$

と表わされる。ここで、気泡体積 $V = 4\pi R^3/3$, D は2気泡重心間距離であり, $\dot{R}$ 及び $\ddot{R}$ はそれぞれ半径方向速度及び加速度を表す。また, c_l は音速, σ, μ_l は表面張力係数, 粘度であり, 添え字 l は液体を表す。また, p_g は気泡内圧力, $p_{l\infty}$ は無限遠方圧力であり, v_r は気泡重心速度 v_i と液流速との相対速度,

$$v_{ri} = \begin{cases} v_1 + (R_2^2/D^2) \dot{R}_2 & (i=1) \\ -v_2 + (R_1^2/D^2) \dot{R}_1 & (i=2) \end{cases} \quad (6)$$

を表す。ただし, 上式を導出する際に, 球形2気泡の運動に対する速度ポテンシャルのうち $O((R/D)^3)$ までの項を用いた。

式(5) の F_v は粘性抗力項である。前述の通り, Magnaudet & Legendre^[7] は, 気泡が体積変化をとめないながら並進運動を行う場合, たとえ並進運動レイノルズ数 $Re (= 2|v_r|R/\nu)$ が1より

小さい場合でも、半径方向レイノルズ数 $Re' (=2R|\dot{R}|/\nu_l)$ が1 より十分大きければ、粘性抗力はLevichの粘性抗力 $F_{V,L}$ となることを理論的に見出している。

$$F_{V,L} = \left(\frac{48}{Re} \right) \pi R_i^2 \frac{1}{2} \rho_l \nu_l |\dot{v}_r| \quad (7)$$

彼らは、また、ストークス近似に基づき、 Re, Re' がともに1 より十分小さい気泡並進運動に対して、履歴力を含む粘性抗力 $F_{V,M}$ を導出している。

$$F_{V,M} = \left(\frac{16}{Re} \right) \pi R_i^2 \frac{1}{2} \rho_l \nu_l |\dot{v}_r| + 8\pi\mu_l \int_0^t \left\{ w(\tau, t) \frac{d}{d\tau} [R_i(\tau) \dot{v}_r(\tau)] \right\} d\tau \quad (8)$$

ただし、 w は、

$$w(\tau, t) = \exp \left[9\nu_l \int_{\tau}^t \frac{dt'}{R_i(t')^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\sqrt{9\nu_l \int_{\tau}^t \frac{dt'}{R_i(t')^2}} \right] \quad (9)$$

4 結果と考察

Magnaudet & Legendre^[7]が導出した粘性抗力の振動気泡運動への適用妥当性を評価するため、運動方程式(4), (5)を数値的に解き、実験結果を比較した。初期状態で静止した2気泡に対して、実験から得た液体圧力の時間変化を p_{∞} として与えた。また、式(4)のガス圧力 p_g は、気泡内熱拡散の影響を取り入れた数値計算法^[10]により求めた。

気泡体積変動が大きい場合と、比較的穏やかな場合について、比較結果を以下に示す。

まず、気泡体積変動が大きい場合の結果をFig. 3に示す。Fig. 3(c)から、式(4)を解いて得た半径方向の運動は、実験結果と良く一致していることがわかる。本研究で対象としている気泡並進運動は、気泡の半径方向運動によって誘起されるため、Fig. 3(c)に示されるように半径方向運動が良く予測できていることは、並進運動の有効な評価にとって重要である。

気泡並進運動を評価するため、Fig. 3(d) に 2 気泡重心間距離の時間推移を示す。この図を見ると、実験結果(exp) は高レイノルズ数解($F_{V,L}$) およびストークス近似解($F_{V,M}$) のいずれにも漸近していないことがわかる。つまり、Fig. 3 に示す実験結果は、中間レイノルズ数領域の気泡運動を表している。この実験条件でのレイノルズ数をFig. 3(e)に示す。半径方向レイノルズ数 Re' の最高値は100 程度である。また並進運動レイノルズ数 Re は Re' と比べ一桁小さい。

Magnaudet & Legendreの解析によると、Fig. 3のように Re 数が1より十分に大きい条件下では、粘性抗力には高レイノルズ数解を適用すべきである。しかし、実験結果が示すように、 Re が

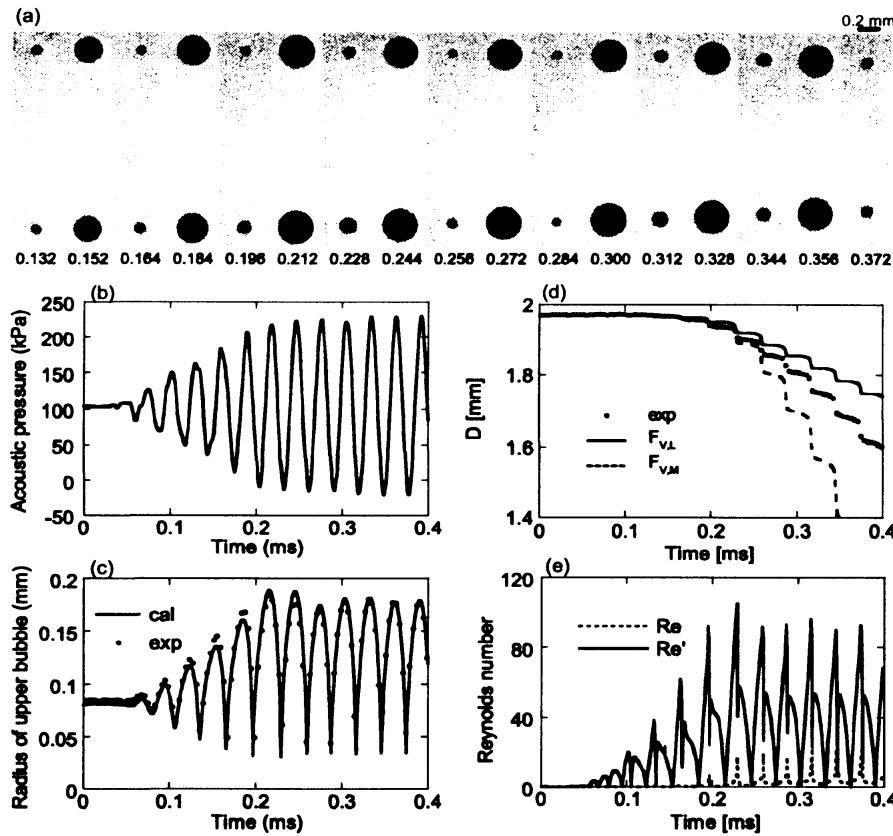


Fig. 3 Attractive motion of a pair of bubbles under strong acoustic forcing. (a) Selected frames of images captured by using high-speed video camera with elapsed time below each image in ms. (b) Liquid pressure measured in experiment and used in the calculation. Evolution of (c) radius of upper bubble, (d) separate distance D between two bubbles, and (e) actual Reynolds number Re , and Reynolds number based on the radial motion Re' .

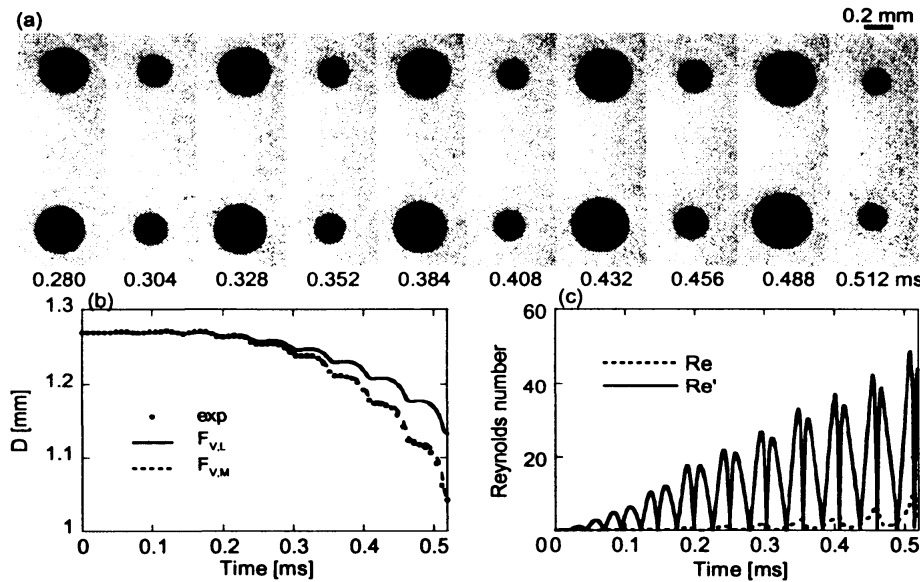


Fig. 4 Attractive motion of a pair of bubbles under moderate acoustic forcing. (a) Selected frames of images captured by using high-speed video camera with elapsed time below each image in ms. Evolution of (b) separate distance D between two bubbles, and (c) actual Reynolds number Re , and radial Reynolds number Re' .

$O(10)$ では、高レイノルズ数解は粘性抗力を大きく見積もる。

次に、気泡体積変動が穏やかな場合の解析結果をFig. 4に示す。ここでは、 Re' の瞬時値の最高値は50程度である。Fig. 4(b)から、並進運動に対する実験結果はストークス近似解(F_{VM})に漸近していることがわかる。すなわち、Fig. 4の実験においても、Fig. 3の実験同様に、高レ

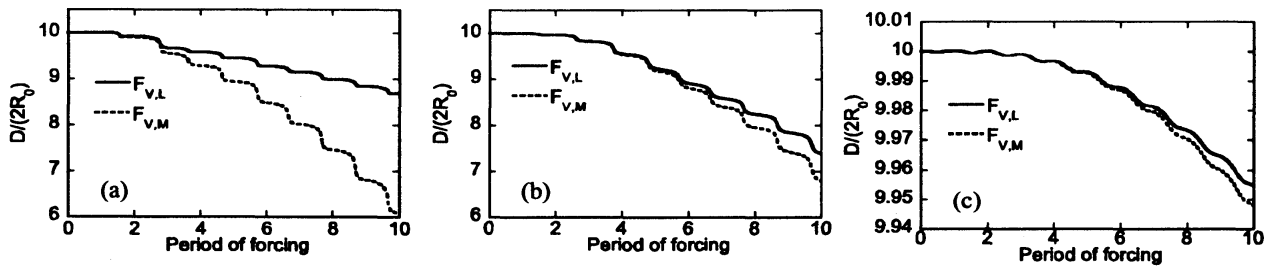


Fig. 5 Time evolution of separate distance between two bubbles obtained by numerical calculation: (a) $v=50 \text{ mm}^2/\text{s}$, $P_a=130 \text{ kPa}$, (b) $v=5 \text{ mm}^2/\text{s}$, $P_a=50 \text{ kPa}$, (c) $v=5 \text{ mm}^2/\text{s}$, $P_a=5 \text{ kPa}$.

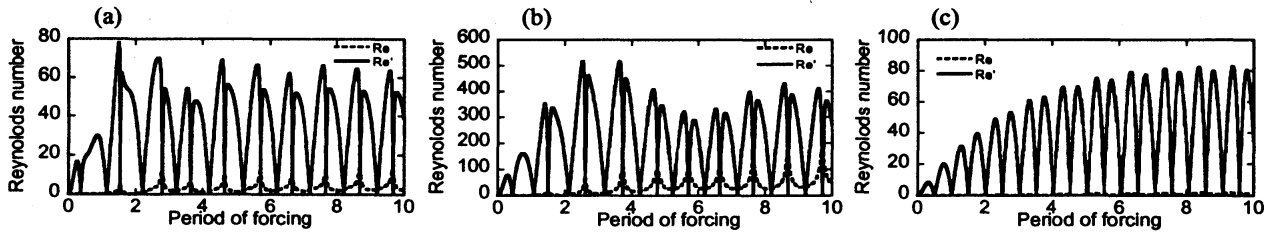


Fig. 6 Reynolds numbers for bubble motions in each case in Fig. 5 (a), (b) and (c).

レイノルズ数解は粘性抗力を大きく見積もった。

以上の実験事実とは異なり, Reddy & Szeri^[8]は音響場中における気泡運動を対象とした数値解析によって, Re が $O(1)$ の運動においても高レイノルズ数解とストークス近似解は, ほぼ同様な並進運動を予測することを示している. 本研究と, Reddy & Szeriの解析との解析条件の顕著な違いは, 液体動粘度と, 代表気泡半径及び加振周波数である. Reddy & Szeriの解析は, 水もしくは血流中のマイクロバブルの運動を対象としているため, 動粘度は1もしくは $5 \text{ mm}^2/\text{s}$ 程度であり, 気泡径は $1 \mu\text{m}$ オーダーである.

Reddy & Szeriの解析との相違点のうち, 液体動粘度の影響を評価するために, 同じ初期気泡半径を持つ2気泡に対して, 正弦波(振幅 p_a)状の p_{∞} を与えた計算を行い, いくつかの粘度に対して数値解を求めた. 初期気泡半径 R_0 は, (a), (b), (c)いずれの場合も, 気泡1, 2ともに $R_0=0.09 \text{ mm}$ とし, また初期気泡間距離 $D_0=10R_0$ である. 加振周波数は $f=34.5 \text{ kHz}$ とした.

Fig. 5に計算結果を示す. Fig. 5(a)は $v=50 \text{ mm}^2/\text{s}$, $p_a=130 \text{ kPa}$ であり, Fig. 3と同程度の半径方向運動を行う条件である. Fig. 5(b), (c)では, Reddy & Szeriの解析に合わせて $v=5 \text{ mm}^2/\text{s}$ と減少させ, また音圧を(b) $p_a=50 \text{ kPa}$, (c) $p_a=5 \text{ kPa}$ と変化させた.

Fig. 5(a)では高レイノルズ数解とストークス近似解とに著しい差異が生じているのに対して, (b), (c)に示される $v=5 \text{ mm}^2/\text{s}$ の計算結果では, 高レイノルズ数解とストークス近似解との差異が小さい. (b)では Re' は最高で500程度にまで達しており(Fig. 6), (a)よりも一桁大きいにも関わらず, 高レイノルズ数解とストークス近似解との差異は小さい. また, (a)とほぼ同程度の大きさの Re' である(c)においても, 高レイノルズ数解とストークス近似解はほぼ同一である. 以上のように, $v=5 \text{ mm}^2/\text{s}$ の計算では, Reddy & Szeriが示したように, 高レイノルズ数解とストークス解は, ほぼ同様な並進運動を予測することが, 本計算結果においても示された.

以上の結果は、振動気泡の並進運動における粘性抗力が、気泡半径・速度の瞬時値を用いたレイノルズ数だけでは整理できないことを示している。

本問題の場合は、レイノルズ数に加えて、振動気泡周りの粘性境界層厚さと気泡径との関係も考慮に入れる必要がある。はじめに述べたように、振動流の境界層厚さは $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ の程度である。気泡半径との比 δ/R がゼロに近ければ、境界層内での速度勾配及び粘性散逸量（粘性抗力）が大きくなり、レイノルズ数の大小によらず、高レイノルズ数解が妥当になると思われる。本実験条件である $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$, $f=34.5 \text{ kHz}$, $R_0=0.1 \text{ mm}$ では、 $\delta/R_0 \approx 0.2$ であり、粘性境界層厚さの影響が無視できないため高レイノルズ数解とストークス解とに著しい差異が生じたと考える。一方で、 $\nu=5 \text{ mm}^2/\text{s}$ では $\delta/R_0 \approx 0.07$ と減少し、その結果、ストークス近似解と高レイノルズ数解との差異が低減したと考える。

なお、気泡振動振幅が大きい場合 δ/R は一周期の間に有意に変化するため、粘性抗力を正しく評価するためには、気泡振動振幅の影響を考慮に入れた解析が必要である。

5 まとめ

動粘度 $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ シリコンオイル中での振動気泡運動を、高速度拡大撮影によって詳細に観察した。得られた実験結果と、レイノルズ数大小両極限の仮定のもと得られた理論解^[7]と比較・考察することによって、以下の結論を得た。

- (1) 気泡レイノルズ数が $O(10)$ では、高レイノルズ数解は粘性抗力を大きく見積もる。
- (2) 本実験条件では、並進運動における高レイノルズ数解とストークス近似解に顕著な差が見られ、より低粘度液体を対象としたReddy & Szeriの結論（両者の差が少ない）とは異なる結果となった。この違いは、振動流が作る粘性境界層厚さ δ と気泡サイズ R との関係によって説明することが可能である。具体的には、 δ/R が大きくなると高レイノルズ数解とストークス近似解との差が大きくなる。

参考文献

- [1] Leighton, T. G., *The Acoustic Bubble*, Academic Press (1994).
- [2] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967).
- [3] Crum, L. A., "Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field," *J. Acoust. Soc. Am.* **57**, 1363-1370 (1975).
- [4] Barbat, T., Ashgriz, N. and Liu, C. S., "Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field," *J. Fluid. Mech.* **389**, 137-168 (1999).
- [5] Harkin, A., Kaper, T. J. and Nadim, A., "Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid", *J. Fluid. Mech.* **445**, 377-411 (2001).
- [6] Oguz, H. N. and Prosperetti, A., "A generalization of the impulse and virial theorems with an application to bubble oscillations," *J. Fluid. Mech.* **218**, 143-162 (1990).
- [7] Magnaudet, J., and Legendre, D., "The viscous drag force on a spherical bubble with a time-dependent radius," *Phys. Fluids* **10**, 550-554 (1998).

- [8] Reddy, G. A., and Szeri, A. J., "Coupled dynamics of translation and collapse of acoustically driven microbubbles," *J. Acoust. Soc. Am.* **112**, 1346–1352 (2002).
- [9] Krefting, D., Toilliez, J. O., Szeri, A. J., Mettin, R. and Lauterborn, W., "Translation of bubbles subjected to weak acoustic forcing and error in decoupling from volume oscillations," *J. Acoust. Soc. Am.* **120**, 670–675 (2006).
- [10] Kameda, M. and Matsumoto, Y., "Nonlinear oscillation of a spherical gas bubble in acoustic fields," *J. Acoust. Soc. Am.* **106**, 3156-3166 (1999).
- [11] Shirota, M. and Kameda, M., "A bubble generator to produce 0.1 mm-diameter gas bubbles," *Proceedings of the 4th International Conference on Multiphase Flow* Paper No. 451 (2001).