

Formation of shocks for a single conservation law

東京工芸大 工 中根静男 (Shizuo Nakane)

§ 1 序

以下では次の様な初期値問題について考える

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t > 0\} \\ u(0,x) = \phi(x) & \text{on } \mathbb{R}_x^n \end{cases}$$

但し、 $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $u(t,x)$ は $\mathbb{R}$ -valued とする。(1) の非線形性のために、初期値 ϕ がどんなに滑らかであっても、解 u は一般に有限時間後には不連続になる。解の不連続点の集合を Shock という。

以下で考える問題は次の通りである：

問題 Shock がどのようにして発生し、どう伝播していくのか？

(1) の方程式は、保存則の方程式と呼ばれるものである。何

故かという。自然界における質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則は(1)のような発散形で表現されるからである。保存則の方程式に関しては、これまでに数多くの研究があり、適当な条件下で、解の存在と一意性が、(1)より一般のシステムの場合に保障されている。また近年、非線形波動方程式とも関連して、解の blow-up (これは shock の発生に対応する) の研究も盛んになっている。しかし、blow-up した後の解の振舞いについての研究は意外に少ない。そこで、この部分に先を当てようと思う。

§2 Historical Remark.

ここでは、shock の構造にまで立ち入った研究について Survey をする。このような研究には2つの方法があり、ひとつは、elementary catastrophe theory を用いる立場、もうひとつは、特性曲線の方法で解を構成していく立場である。前者は、解の大域的性質まで一挙にしておわってしまうという利点があるが、適用範囲が狭いことと、shock を実際に追跡していくことができないという欠点がある。一方、後者は適用範囲は広く、shock の追跡もできるが、大域的な性質を調べるのが極めて大変であるという特徴を持つ。

前者の立場で、 $n=1$ の場合を扱ったのは Schaeffer [6] で

ある。彼は $f = f_1$ の convexity を仮定していたが、この convexity を仮定しない場合にはやはり elementary catastrophe は適用できない。この場合は、Guckenheimer [3], によつて完成した。筆者には Guckenheimer [3] が非常に興味深く感じられた。実際、以下の結果は [3] の前半を高次元の場合に拡張したものに他ならない。

さて、こうして $n=1$ のときは片づいたのぞ、 $n \geq 2$ の場合にと移っていったのであるが、我々から、(1) の形の方程式で $n \geq 2$ のときは、elementary catastrophe が適用できないことが Thom [7], Guckenheimer [4] により明らかにされた。Thom などは、従つて (1) の形の方程式は物理的に意味がない。 $n=1$ のミステムの場合をやるべきだと等とばかり述べている程である。そして、これに凝り込んだのか、以後、特異点理論の立場から (1) を研究することはしばらく行なわれなくなり、Debeneix [2] でようやく復活する。Schaeffer が成功し、Thom が失敗した理由は、 $n=1$ のときは、解の Lax 表示があり、 $n \geq 2$ のときはそれが無いことにある。Debeneix は、Lax 表示を持つような高次元の保存則のミステムを導入したのである。それは、Hamilton-Jacobi 方程式と同値な保存系である。

Hamilton-Jacobi 方程式 $\longleftrightarrow$ 最小作用の原理 $\longleftrightarrow$ Lax 表示
 という対応を考えると、彼の着眼は自然なものと思われろ。

最近, Tsuji [8] は, 単に Hamilton-Jacobi 方程式 ($n=2$) を特性曲線の方法で解析している。

§3 解の構成 ~ 特性曲線の方法

(1) の解を特性曲線の方法を用いて具体的に構成する。

$f'_i(u) = q_i(u)$ とおくと, (1) の $(0, y)$ を通る特性曲線とは,

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = q_i(u(t, x(t))) \quad x_i(0) = y_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

の解 $x = x(t)$ である。 u が (1) の滑らかな解ならば, $\frac{d}{dt} u(t, x(t)) \equiv 0$ となるのは見易い。故に $u(t, x(t)) \equiv u(0, x(0)) = \phi(y)$ 。従って, 特性曲線は次で与えられる直線になる。

$$(2) \quad x(t) = y + t q(\phi(y))$$

(2) に付随する C^∞ -写像 $H: \mathbb{R}_{(t,y)}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}_{(t,x)}^{1+n}$, $H_t: \mathbb{R}_y^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ を次で定義する。

$$(3) \quad H(t, y) = (t, H_t(y)) = (t, y + t q(\phi(y)))$$

すると, 上の議論より, (1) の解 u は, $u(t, x) = \phi(H_t^{-1}(x))$ で与えられる。従って, H_t^{-1} が (あるいは, H^{-1} が $(t, \cdot)$ とも同値だが) 存在して 1 個な (t, x) だけ (1) の解は C^∞ になる。そうでない点では u は一般には多価になる。しかし, 我々は 1 個な解が欲しいので, これを 1 価にする必要がある。ここに shock が発生する原因がある。

§4 写像 H の特異点の構造

前節の議論より、 H の特異点について調べる必要がある。

H の Jacobian を $J(H)$ とおくと、

$$J(H) = 1 + t \sum_{i=1}^n a_i'(\phi(y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \Rightarrow 1 + t \lambda(y) \quad .$$

今、 $\lambda(y) \geq 0$ ならば $J(H) > 0$ となり H^{-1} が存在してしまうので、次を仮定する。

$$(A.1) \quad \min_y \lambda(y) = \lambda(y^0) = -M < 0.$$

$\phi \in \mathcal{S}$ ならば (A.1) は自然であろう。 $t^0 = \frac{1}{M}$ とおくと、

$t < t^0$ ならば $J(H) > 0$ 故、以後、 $t \geq t^0$ で考えるが、今の所、 $0 \leq t - t^0 \ll 1$ 、 $\|y - y^0\| \ll 1$ のときしか扱えていないので、これも仮定する。即ち、shock が発生してから直後のことしかまだわかってないのである。次を仮定するが、これは generic と思われる；

$$(A.2) \quad \lambda(y) \text{ の特異点是非退化, i.e. } \text{grad } \lambda(y) = 0 \Rightarrow \text{rank Hess } \lambda = n.$$

以上の仮定の下で次を得る。但し、 $\Sigma^1 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{1+n}; 1 + t\lambda(y) = 0\}$ 。

Lemma 1 Affine 座標変換により次を仮定してよい。

$$(4) \quad a_n'(\phi(y^0)) > 0, \quad a_i(\phi(y^0)) = a_i'(\phi(y^0)) = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

<注> (4) の 1 式は、 $n=1$ のとき、 f の convexity に対応する。即ち、shock が発生した直後は convexity が満たされているのである。

Lemma 2 H の特異点は fold または cusp のみ。

<注> 一般に C^∞ -写像 $T: \mathbb{R}_y^m \rightarrow \mathbb{R}_x^m$ の特異点が A_k -型であるとは、座標変換により、次の変換されることをいう。

$$T: \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} = y_{m-1} \\ x_m = y_m^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} y_i y_m^i \end{cases}$$

特に A_1 型を fold, A_2 型を cusp という。

$$\Sigma^{1,1} = \{ (t, y) \in \Sigma^1; (t, y) \text{ は } H \text{ の cusp point} \} \text{ とおく。}$$

Lemma 3 $\Sigma^{1,1} = \{ (t, y); 1 + t\lambda(y) = 0, \sum_{i=1}^n Q_i(\phi(y)) \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} = 0 \}$, かつ $\Sigma^{1,1}$ は $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ で parametrize される $\mathbb{R}^{1+n}$ の codim 2 の C^∞ -submanifold。

Lemma 4 $H(\Sigma^{1,1})$ は $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ で parametrize される $\mathbb{R}^{1+n}$ の codim 2 の C^∞ -submanifold。i.e. $H(\Sigma^{1,1}) = \{ (t, x); t = d(x), x_n = \beta(x') \}$
 $d, \beta: C^\infty$

<注> Lemmas の証明は、大学2年生でもできる初等計算しか使われない。但し、Lem.2 では、Morin [5] による A_k -型特異点の特徴付けを用いる。即ち、写像

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} = y_{m-1} \\ x_m = \varphi(y) \end{cases}$$

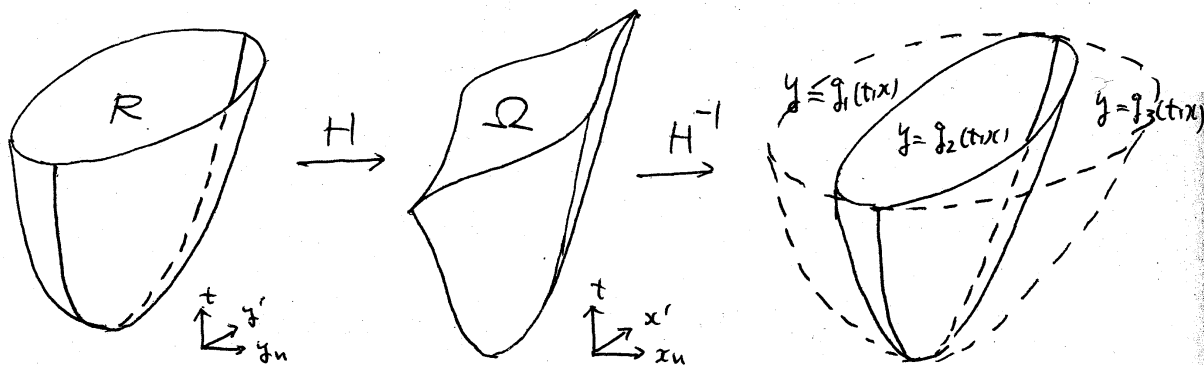
の特異点 0 が A_k -型 $\iff$ (i) $(\frac{\partial \varphi}{\partial y_m})^i \varphi(0) = 0 \quad 0 \leq i \leq k$
 (ii) $(\frac{\partial \varphi}{\partial y_m})^{k+1} \varphi(0) \neq 0$.

(iii) 写像 $y \mapsto (\frac{\partial \varphi}{\partial y_m}, \dots, \frac{\partial^k \varphi}{\partial y_m^k})$ の rank は $(0 \leq) k$ 。

<注> 以下の議論では使われないが、(A.1) (A.2) の仮定なしに、 H の形だけから $\text{corank } H|_{\mathbb{C}^1} = 1$ が成り立つ。従って、generic には H の特異点は A_k -型に限る。これは global な性質を見ると重要な事実であり、例えば、Tsujii [8] の場合、 A_k 型以外の特異点も現われる。これは特異点理論からすると深刻な問題である。というのは、一般に特異点の分類は不可能だからである。それは次元とも関係する。Debenneix では $n \leq 4$ となっていて、このためである。しかし、我々の場合は、 A_k 以外は出てこないことがわかっていっているので、何ら心配は要らない。

§5. 解の一価化

Σ' の近くでの H, H^{-1} を図示する.



cusp の標準形が 3 次式であることから, H^{-1} は上図 Ω での値になる。これを, 上図のように, $y = g_i(t, x)$ ($1 \leq i \leq 3$) とおき,

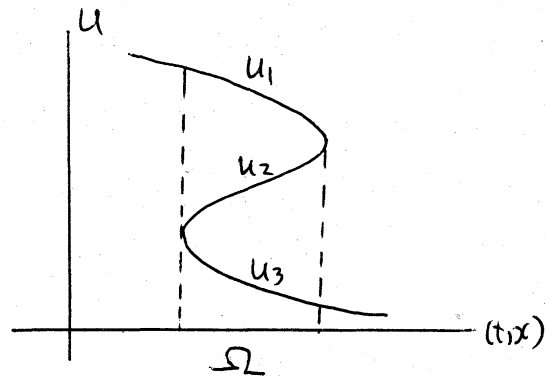
$u_i(t, x) = \phi(g_i(t, x))$ とおくと,

u のグラフは右図のようになる。

これを 1 価にしようとすると,

どこかで不連続にならざるを得

ない。



こうして不連続性が出てくる

必然性が明らかになるのだが, すると, 不連続な関数に対し

て (1) を意味付けなければいけない。我々は弱解として (1) を意

味付ける。

定義 u が (1) の弱解 $\Leftrightarrow \forall g(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_t^+} \times \mathbb{R}_x^n)$ に対し,

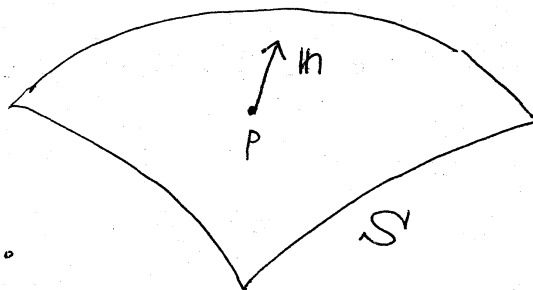
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(u \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(u) \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(0, x) \phi(x) dx = 0.$$

今 u を (1) の弱解で、滑らかな超曲面 S に沿って不連続とする。 S の P における S の法線

ベクトルを n とし、

$$u_{\pm}(P) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(P \pm \varepsilon n)$$

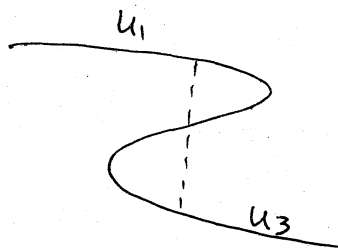
とおくと上の定義より次が従う。



< Rankine-Hugoniot 条件 >

$$n \cdot (u_+ - u_-, f_1(u_+) - f_1(u_-), \dots, f_n(u_+) - f_n(u_-)) = 0.$$

この条件を満たすように u を
1 価化するためには、右のように、
 u_1 から u_3 に飛ばざるを得ないこ
とがわかる。



Shock surface を $S = \{x_n = \varphi(t, x')\}$ とおくと、Rankine-Hugoniot 条件より、 φ は次を満たさねばならぬ。

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[f_i(u)]}{[u]} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{[f_n(u)]}{[u]}$$

$$\text{但し, } [u] = u_1(t, x', \varphi(t, x')) - u_3(t, x', \varphi(t, x'))$$

$$[f_i(u)] = f_i(u_1(t, x', \varphi(t, x'))) - f_i(u_3(t, x', \varphi(t, x'))).$$

又、 S は $H(\mathbb{R}^n)$ を通らねばならないので、

$$(6) \quad \varphi(\alpha(x), x') = \beta(x')$$

をも満たさねばならぬ。(α, β については, Lem 4 を見よ)
 即ち, φ は, 非線形 1 階偏微分方程式の Cauchy 問題 (5)-(6)
 を満たさねばならない。

§ 6 (5)-(6) の C^∞ 解の存在について

Cauchy 問題 (5)-(6) は, non characteristic だが, $H(\mathbb{R}^n)$ で
 $u_i(t, x)$ が連続ではあるが, Lipschitz 連続でない (多分, Holder
 連続になっている) ために, 通常の方法, 例えば, 特性曲
 線の方法と不動点定理の方法で解こうとしてもうまくいかな
 い。たとえ解けたとしても, 初期値の λ の x ータ y に関する
 滑らかさが解に伝わりないので, φ の滑らかさを示すことが
 できない。 $u_i(t, x)$ がリプシツ連続でなくなるのは H の特異点
 のためであるから, これを乗り越えるために, (t, x) -空間で考
 えるのをやめて, (t, y) 空間で考える。これは [7] の方法で
 ある。

次のバリエーションを考えよう,

$$X = (1+t\lambda(y)) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{[f_i(w)]}{[u_j]} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \quad \text{in } \Omega$$

$$Y = (1+t\lambda(y)) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left\{ (1+t\lambda(y)) \left(\frac{[f_i(w)]}{[u_j]} - a_i(\phi) \right) - \right. \\ \left. - s a_i(\phi) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \left(\frac{[f_j(w)]}{[u_j]} - a_j(\phi) \right) \right\} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{in } \bar{R}$$

但し, R 上 $u_i = \phi(g_i(H(t, y)))$ と定義し直す。このとき次が成り立
 つ。

Lemma 5 $(dH)Y = X$

Lemma 6. Y の特異点集合 $= \Sigma^{||}$

ここでベクトル場の特異点とは、その係数がすべて消える点
を意味する。即ち、上の Lemmas は、ベクトル場 X の、^{係数の}滑らか
でないという意味での特異点が、 H によって、 Y のベクト
ル場としての特異点に引きまわられることを主張しているの
である。

Lemma 7

$$Y \text{ の Jacobian 行列 at } (t^0, y^0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & p \end{bmatrix}$$

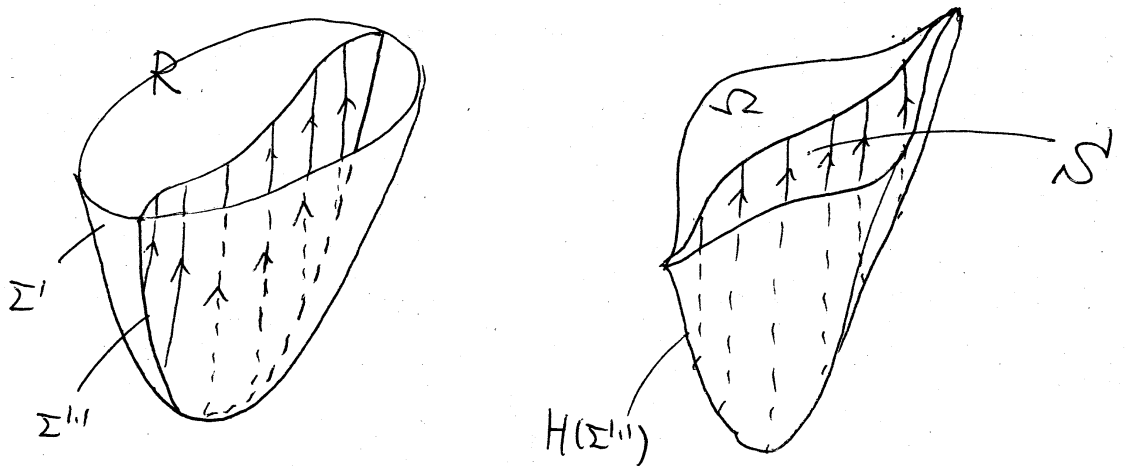
かつ $p < 0$, $(\lambda = \lambda(y^0) < 0)$ 。

従って、shearing 変換により、 (t^0, y^0) は (故に $\Sigma^{||}$ 上)、 Y
a saddle point になる。すると、安定多様体の理論から次が
従う。

Lemma 8. $\Sigma^{||}$ の各点、 $y = y(y')$ に対し、 Y の積分曲線で、

その closure が γ を含むものが存在する。しかもこの曲線は γ' に關し C^∞ に依存する。

従って、これら積分曲線の族は $\mathbb{R}^{1+n}$ の超曲面を為すが、この超曲面の H による像として、 C^∞ な shock surface S が定義される。



又、shock は母定多様体であるとも言えるのである。以上をまとめて、

Theorem (A.1), (A.2) の下で、 (t^0, x^0) ($x^0 = H_{t^0}(y^0)$) の近くで C^∞ な shock surface を持つ (1) の弱解を構成できる。shock surface は (5) (6) の解として与えられる。実は、この解がエントロピー条件を満たすことも Lemma 1 より容易にわかる。

〈注〉. (1) が線形の時, (5) は (1) に対する特性曲面の方程式と一致する。従って、以上の事実は、「線形方程式の解の特異性は特性曲線に沿って伝わる」という、線形の場合によく知られた事実の非線形への拡張になっていると考えられる。その意味で、(5) (6) の解曲面も一般化した特性曲面ということができる。前頁の図の矢印は、一般化した特性曲線を表わす。これは、Dafermos [1] が定義した generalized characteristics と一致している。

文 献

- [1] C. M. Dafermos, Generalized characteristics and the structure of solutions of hyperbolic conservation laws, Indiana Univ. Math. J. 26, (1977), 1097-1119.
- [2] T. Debeneix, Certain systèmes hyperboliques quasi-linéaires, preprint.
- [3] J. Guckenheimer, Solving a single conservation law, Lect. Notes Math. 468 (1975) 108-134.
- [4] J. Guckenheimer, Shocks and rarefactions in two space dimensions, Arch. Rat. Mech. Anal. 59 (1975) 281-291.
- [5] B. Morin ; Formes canoniques des singularités d'une application différentiable, C.R. Acad. Sc. Paris. 260 (1965). 5662-5665, 6503-6506

- [6] D. Schaeffer, A regularity theorem for conservation laws, *Advances in Math.*, 11 (1973) 368-386.
- [7] R. Thom, The two-fold way of catastrophe theory, *Lect. Notes Math.*, 525 (1976) 235-252.
- [8] M. Tsuji, Propagation of singularities for Hamilton-Jacobi equation, preprint.