

Hunt の定理の紹介

東大 教養 宮本宗實

§1. 完全最大値の原理

$(E, \mathcal{B}) \in$ measurable space とする. E 上の kernel $V_p = V_p(x, dy)$ ($p > 0$) の系が次の条件をみたすとき, Markovian pseudo-resolvent と呼ぶことにする.

$$1. V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda)V_\lambda V_\mu = 0 \quad (\text{resolvent equation})$$

$$2. V_\lambda \geq 0, \quad \lambda V_\lambda 1 \leq 1$$

$f \geq 0$ ならば, $V_\lambda f$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき単調に増加する. その極限 $V_0 f = \lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f$ とおく. 一般に f について, $V_0 f^+ < +\infty, V_0 f^- < +\infty$ のときには, $V_0 f = V_0 f^+ - V_0 f^-$ と定義する. この V_0 に関する Proposition (the complete maximum principle) が成り立つ.

Proposition. $a \in$ non-negative constant, $f, g \in$ measurable $\&$ non-negative function $\&$ $V_0 f < +\infty, V_0 g < +\infty$ ならば a とする. このとき,

$$a + V_0 f(x) \geq V_0 g(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0$$

ならば,

$$a + V_0 f \geq V_0 g \quad \text{everywhere.}$$

Proof. $u \equiv a + V_0 f$, $g_n \equiv g \wedge n$ とおく. $\forall \lambda \geq a$
 > 0 ならば,

$$u \geq V_\lambda g_n \quad \text{everywhere}$$

となることを示せばよい.

$p > 0$ を任意に fix して, $N \equiv p V_{\lambda+p}$ とおく. このとき,

$$p V_\lambda g_n = \sum_{k=0}^{\infty} N^k g_n$$

が成り立つことを見る. 実際, resolvent equation から,

$$\begin{aligned} p V_\lambda &= p V_{p+\lambda} + p^2 V_{p+\lambda} V_\lambda = N + N(p V_\lambda), \\ &= N + N^2 + \dots + N^{k-1} + N^k(p V_\lambda). \end{aligned}$$

従って, $k \rightarrow \infty$ のとき, $N^k(p V_\lambda) g_n$ は単調減少である. $\bar{h} \equiv$

$\lim_{k \rightarrow \infty} N^k(p V_\lambda) g_n$ とおけば, Lebesgue's theorem により

$$\bar{h} = p V_{\lambda+p} \bar{h} (= N \bar{h}) \leq p V_\lambda g_n. \quad \text{また, resolvent equation}$$

より,

$$\begin{aligned} V_{g+\lambda} \bar{h} &= V_{p+\lambda} \bar{h} + (p-g) V_{g+\lambda} V_{p+\lambda} \bar{h} \\ &= \bar{h}/p + (p-g)/p V_{g+\lambda} \bar{h} \quad \text{for } g > 0. \end{aligned}$$

従って, $g V_{g+\lambda} \bar{h} = \bar{h}$. 上に $k = \infty$ とおくと, $\bar{h} \leq p V_\lambda g_n \leq \frac{pn}{\lambda}$.

$$\bar{h} = g V_{g+\lambda} \bar{h} \leq g \cdot \frac{pn}{\lambda} V_{g+\lambda} 1 \leq g \frac{pn}{\lambda} \cdot \frac{1}{g+\lambda} \rightarrow 0 \quad (g \downarrow 0).$$

従って $\bar{h} = 0$, $p V_\lambda g_n = \sum_{k=0}^{\infty} N^k g_n$ が言える.

$n \geq g_n$. $u(x) \geq V_n g_n(x)$ for $x: g_n(x) > 0$ であるから

$n + pu(x) \geq g_n + pV_n g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k g_n(x)$ for $\sqrt[n]{g_n(x)} > 0$
 $= \tilde{\lambda}$, $n + pu(x)$ は N -excessive, であるから,

$n + pu \geq N(n + pu)$, であるから, 次の Lemma により

$$n + pu \geq g_n + pV_n g_n \quad \text{everywhere}$$

従って,

$$n/p + u \geq g_n/p + V_n g_n$$

で $p \rightarrow +\infty$ とし, $u \geq V_n g_n$ everywhere.

Lemma. $N \in E$ 上の non-negative kernel である. $h \in$
 non-negative 函数, $v \in E$, N -excessive, であるから, Nv
 $\leq v$, は non-negative function である. であるから,

$$v(x) \geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k \right) h(x) \quad \text{for } x: h(x) > 0$$

であるから,

$$v \geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k \right) h \quad \text{everywhere.}$$

§2. 原理の間の関係

E は locally compact, σ -compact, Hausdorff space,
 C_K は E 上の compact support の連続函数の全体, C_0 は
 C_K の uniform norm $\|\cdot\|$ による completion である. $V \in$,
 E 上の non-negative kernel で $C_K \subset C_0$ になるものとする.

V は τ による C_K の条件に (a), (b) とおき前を τ ける。

(a) $V(C_K)$ は C_0 に dense.

(b) $0 \leq \exists h_n \in C_K : Vh_n \uparrow 1$ everywhere.

また K , V による τ による「原理」を考へる。但し, a は non-negative constant, $f, g \in C_K$.

(Π_1) the complete maximum principle

$f, g \geq 0$ ならば

$$a + Vf(x) \geq Vg(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0$$

ならば

$$a + Vf \geq Vg \quad \text{everywhere.}$$

(Π_2) the domination principle

$f, g \geq 0$ ならば

$$Vf(x) \geq Vg(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0$$

ならば

$$Vf \geq Vg \quad \text{everywhere.}$$

(Π_3) the weak principle of the positive maximum

$\sup Vf(x) > 0$ ならば

$$\sup Vf(x) = \sup_{x \in P} Vf(x), \quad \text{but } P = \{x: f(x) > 0\}.$$

(Π_4) the principle of the positive maximum

$$Vf(x) = \sup Vf \quad \text{if } f(x) \geq 0.$$

これらの原理の間には次のような論理的包含関係が成立する。

Proposition 1.

$$\begin{array}{ccc} (\pi_1) & \xleftarrow[\substack{(8) \\ 2}]{} & \Rightarrow (\pi_2) \\ \uparrow \substack{3} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \substack{4} & \\ (\pi_3) & \xleftarrow[\substack{5}]{} & \xRightarrow[\substack{(d) \\ 6}]{} (\pi_4) \end{array}$$

Proof.

1. (π_1) 2- $a=0$ とおけばよい。

2. 任意に $b > a \in \mathbb{R}$ fix する。このとき、 $n \rightarrow +\infty$ に対して

$$V(f + b h_n)(x) \uparrow b + V f(x) > a + V f(x) \geq V g(x)$$
 が $x: g(x) > 0$ に対して成り立つ。Dini の定理により、十分大なる n に対して、

$$V(f + b h_n)(x) \geq V g(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0.$$

(π_1) により、

$$V(f + b h_n) \geq V g \quad \text{everywhere.}$$

最初 $n \rightarrow +\infty$ 、次に $b \downarrow a$ とする (= 1 により、

$$a + V f \geq V g \quad \text{everywhere.}$$

3. $a + V f(x) \geq V g(x)$ for $x: g(x) > 0$ とする。 $h \equiv g - f$ とおけば、 $f \geq 0$ なる故 $\{h > 0\} \subset \{g > 0\}$ 。従って、

$$a \geq V h(x) \quad \text{for } x: h(x) > 0.$$

すなわち, $a \geq \sup_{x \in P} Vh(x)$, 但し $P = \{h > 0\}$.

もし $\sup Vh \leq 0$ ならば $a \geq Vh$ everywhere. 従って, $a + Vf \geq Vg$ everywhere.

もし $\sup Vh > 0$ ならば, $(\pi_3) = F$, 従って $\sup Vh = \sup_{x \in P} Vh(x) \leq a$. 従って, $a \geq Vh$ everywhere, すなわち, $a + Vf \geq Vg$ everywhere.

4. $a \equiv \sup_{x \in P} Vf(x)$, $a^+ \equiv a \vee 0$ とおく.

$$a^+ \geq Vf(x) = Vf^+(x) - Vf^-(x) \quad \text{for } x \in P.$$

すなわち,

$$a^+ + Vf^-(x) \geq Vf^+(x) \quad \text{for } x: f^+(x) > 0$$

$(\pi_1) = F$ より,

$$a^+ + Vf^- \geq Vf^+ \quad \text{everywhere.}$$

すなわち,

$$a^+ \geq Vf \quad \text{everywhere,}$$

$$a^+ \geq \sup Vf.$$

右辺は仮定により positive. 故に, $a^+ > 0 \therefore a^+ = a$.

従って,

$$a \geq \sup Vf.$$

逆向きの不等式は明らかだから, $\sup Vf = \sup_{x \in P} Vf(x)$.

5. $a \equiv \sup Vf > 0$ と仮定する. $0 < \varepsilon < \frac{a}{3}$ なる任意の ε

ε とする. $Vf \in C$. だから, compact F をうまくとるとすれば,

$$|Vf(x)| < \varepsilon \quad \text{for } x \in F^c$$

とすることが出来る。そこで、あらかじめ、

$$\exists g \in C_K^+ : g > 0 \text{ on } F, \quad Vg < \varepsilon \text{ everywhere.}$$

(π_4)により、 $V(f-g)$ は $\{x: (f-g)(x) < 0\}$ 上では最大値 ε ととり得ない。従って、 $\{f \leq 0\} \cap F$ 上では最大値 ε ととり得ない。

— λ ,

$$V(f-g)(x) \leq Vf(x) \leq \varepsilon \quad x \in F^c$$

$$\sup V(f-g) \geq a - \varepsilon \geq 2\varepsilon$$

であるから、 $V(f-g)$ は F^c 上では最大値 ε ととり得ない。従

って、 $V(f-g)$ は $\{x: f > 0\} \cap F$ 上での最大値 ε とする。故に

$$\sup_{f(x) > 0} Vf(x) \geq \sup_{f > 0} V(f-g)(x) = \sup V(f-g) \geq a - \varepsilon.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とし、 $\sup_{f > 0} Vf \geq a$ を得る。

6. $Vf(x) = \sup Vf \geq 0$ とする。 U は x の任意の compact neighbourhood とする。 (α) により、次の条件を満たす $g \in C_K$ が存在する:

$$Vg(x) > 0$$

$$Vg(x) > \sup_{y \in U^c} Vg(y).$$

$\varepsilon > 0$ を任意に fix する。

$$\sup V(f + \varepsilon g) \geq Vf(x) + \varepsilon Vg(x) > 0.$$

$y \in U^c$ に対して

$$V(f + \varepsilon g)(y) < Vf(x) + \varepsilon Vg(x) \leq \sup V(f + \varepsilon g).$$

従, z , $V(f+\varepsilon g)$ の positive な maximum は U の $\pm z$ att.

ain $\pm z$, U^c 上 z は attain $\pm z$ である. 従, z , (π_3) に

より $x_0 \in U$ が存在し z , $V(f+\varepsilon g)(x_0) = \sup V(f+\varepsilon g)$,

$f(x_0) + \varepsilon g(x_0) > 0$. U, ε は任意に, k を $f(x) \geq 0$.

Proposition 2 (π_2) を仮定する.

$(I+V)f = 0$ ならば $f = 0$.

Proof. $(I+V)f = 0$ とする. $Vf^+ + f^+ = Vf^- + f^-$. $x = f^+(x) > 0$

に於て z , $f^-(x) = 0$ であるから, $Vf^+(x) \leq Vf^-(x)$. 故に (π_2) に

より, $Vf^+ \leq Vf^-$ everywhere. 従, z $f^+ \geq f^-$. 同様に

$f^+ \leq f^-$. 故に $f^+ = f^-$, z の両側は z 0 になる.

Proposition 3. (π_4) を仮定する.

$Vf = 0$ ならば $f = 0$.

Proof は自明

§ 3. Hunt の定理

E, C_0, C_K は前と同じ.

Theorem V は $C_K \in C_0$ について non-negative kernel z

the complete maximum principle (π_2) を満たすものとする.

このとき, C_0 上の pseudo-resolvent $\{V_p\}_{p>0}$ 次の条件を満たすものが存在する.

であるものが存在する.

- 1) $V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu = 0$
- 2) $Vf = V_\lambda (\lambda Vf + f) = (\lambda Vf + f) V_\lambda f \quad f \in C_K$
- 3) $0 \leq V_\lambda, \quad \|\lambda V_\lambda\| \leq 1$
- 4) $\lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf \quad f \in C_K$

Remark. 4) は 2, 3) より出る.

任意の $f \in C_K^+$ に対して (2), (2) より, $Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda Vf \geq 0$. 故に, $\lambda V_\lambda f \leq \lambda Vf$. 従, $\sum_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 故に任意の $f \in C_K$ に対して (2), $\sum_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. C_K は C_0 の dense であり, $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$ であるから, 任意の $f \in C_0$ に対して (2), $\sum_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 従, (2), $f \in C_K^+$ に対して (2), $0 \leq Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda (Vf) \rightarrow 0 \quad (\lambda \downarrow 0) \quad (\because Vf \in C_0)$. 故に, 任意の $f \in C_K$ に対して (2), $\sum_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf$.

Proof of Theorem.

1.° Bounded case. $\|V\| < +\infty$ と仮定する. このとき, V は C_0 上に連続である. C_0 上に the complete maximum principle を示す.

$$0 < \alpha < \|V\|^{-1} \text{ に対して, } V_\alpha \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k V^{k+1} \text{ とおく.}$$

(1, 2, 4) は自明. V_α は non-negative であることは示す.

$g \in C_0, g \leq 0$ とする. (2) から, $V_\alpha g = V(g - \alpha V_\alpha g)$ である. $V_\alpha g(\alpha) > 0$ とすると,

$$0 < \sup V_\alpha g = \sup V(g - \alpha V_\alpha g)$$

右辺は, $(\Pi) [= (\pi)]$ に等しい: 次は等しい:

$$\begin{aligned} & \sup \{ V(g - \lambda V_\lambda g)(y) \mid y: g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \} \\ &= \sup \{ V_\lambda g(y) \mid y: g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \}. \end{aligned}$$

1. $\lambda \in (0, 1)$ とし $g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0$ と仮定する.

$$0 \leq g(y) > \lambda V_\lambda g(y)$$

従って, $\sup \{ V_\lambda g(y) \mid \dots \} \leq 0$. これは矛盾. 従って,

$$V_\lambda g \leq 0.$$

次に V_λ の norm を評価する. $f \in C_K^+$, $\|f\| \leq 1$ に対し

2.

$$1 \geq f(x) \geq \lambda V_\lambda f(x) \quad \text{for } x: f(x) - \lambda V_\lambda f(x) > 0$$

右辺 $= V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)](x)$ と表すことができる.

$$1 \geq V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)](x) \quad \text{for } x: f(x) - \lambda V_\lambda f(x) > 0.$$

(1) に等しい.

$$1 \geq V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)] = \lambda V_\lambda f \quad \text{everywhere.}$$

$f \uparrow 1$ と (2). $1 \geq \lambda V_\lambda 1$. V_λ は non-negative である.

$$\|\lambda V_\lambda\| = \lambda V_\lambda 1 \leq 1.$$

2° General case. E は σ -compact である. compact な

集合 K_n が存在して $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. $f_n \in C_K^+$, $\|f_n\| \leq 1$,

K_n 上で $f_n = 1$ なる函数 f_n がある. 仮定から, $Vf_n \in C_0$.

正の実数列 λ_n を, $\sum \lambda_n < +\infty$, $\sum \lambda_n \|Vf_n\| < +\infty$ と

取るようにする. $a \equiv \sum \lambda_n f_n$ とおけば, $0 < a \in C_0$,

for $\forall a \in C_0$. $\exists k$, $a_n \equiv (na) \wedge 1$ とおけば, $0 < a_n \in C_0$, $\forall a_n \in C_0$.

$f \in C_K$ に対し (2), $V^{(n)}f = V(a_nf)$ と定義すれば, $V^{(n)}$ は C_K から C_0 へ a bounded mapping であり, the complete maximum principle を満たす. 従って, 2.1° に従って, pseudo-resolvent $V_\lambda^{(n)}$ が C_0 上に存在する. 2.1° の $V_\lambda^{(n)}$ に対し (2) の不等式 (*) が成り立つ.

$$(*) \quad n < m, f \in C_K^+ \Rightarrow V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) \geq V_\lambda^{(m)}\left(\frac{f}{a_m}\right)$$

よって $\exists k_j$ に対し, $k_j \equiv V_\lambda^{(j)}\left(\frac{f}{a_j}\right)$ ($j = n, m$) とおく.

$$\begin{aligned} k_n &= V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) = V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) - \lambda V^{(n)}V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) \\ &= V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n} - \lambda V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right)\right) \\ &= V(f - \lambda a_n k_n) \end{aligned}$$

同様に,

$$k_m = V(f - \lambda a_m k_m).$$

従って,

$$k_m - k_n = \lambda V(a_n k_n - a_m k_m).$$

$\max(k_m - k_n) > 0$ とおけば, (2.3) the weak principle of the positive maximum に従って, ある $x \in E$ に対し (2),

$k_m(x) - k_n(x) = \max(k_m - k_n) > 0$, $q_n(x)k_n(x) - q_m(x)k_m(x) > 0$ が成り立つ. $q_n(x) \leq q_m(x)$ であるから, これは矛盾. 従って, (2) が成り立つ.

$f \in C_c^+$ に対して $V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき, 単調減少であるから, その極限 $V_\lambda f = \lim_{n \rightarrow \infty} V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ とおく. $V_\lambda f$ は upper semi-continuous であり, $V_\lambda f = \lim_{n \rightarrow \infty} V_\lambda^{(n)} f$ となる. $\| \lambda V_\lambda^{(n)} \| \leq 1$ であるから, 任意の $f \in C_0$ に対して,

$\lim_{n \rightarrow \infty} V_\lambda^{(n)} f$ が存在する, といふ $V_\lambda f$ とおくことにする. $0 \leq f \in C_0$ ならば, $V_\lambda f$ は upper semi-continuous である. 従って $\| \lambda V_\lambda \| \leq 1$ も自明である.

$f \in C_c^+$ に対して, 仮定から $Vf \in C_0^+$, 上述したことをいふ,

$$V_\lambda Vf = \lim_{n \rightarrow \infty} V_\lambda^{(n)} Vf : \text{upper semi-continuous}$$

$$\begin{aligned} \lambda V_\lambda^{(n)} Vf &= \lambda V_\lambda^{(n)} V^{(n)}(\frac{f}{a_n}) \\ &= V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n}) - V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n}) \\ &= Vf - V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n}) \end{aligned}$$

上式の右辺は, 上にみたことから, 単調増大で, Vf 以下からかきとるからなる. 従って,

$$\lambda V_\lambda Vf = \lim_{n \rightarrow \infty} (Vf - V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n})) : \text{lower semi-continuous.}$$

従って, $\lambda V_\lambda Vf$ は continuous で Vf 以下からかきとる.

とわかる。故に, $\lambda V_\lambda V f \in C_0^+$. 従って, 2 任意の $f \in C_K$ に對し, $\lambda V_\lambda V f \in C_0$.

$f \in C_K$ に對し,

$$V_\lambda^{(n)} f = V^{(n)} f - \lambda V_\lambda^{(n)} V^{(n)} f$$

であるから, $n \rightarrow +\infty$ とし,

$$V_\lambda f = V f - \lambda V_\lambda V f.$$

右辺の二項は既知から, $V =$ 適当な連続関数であるから, C_0 の函数である。故に, $V_\lambda f \in C_0$. 従って, $f \in C_0$ に對し, $V_\lambda f \in C_0$.

1), 2) を示すためには, $V_\lambda^{(n)}$ に関する 1, 2) が $n \rightarrow +\infty$ とするに過ぎない。

Remark. $\bar{C} = \{f : \text{continuous on } E, \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\}$ とおく。 V が C_K を $\bar{C}$ にうつす kernel であるときには, 上の Theorem は一般には成り立たない。これをみるために次の example を示す。

$U_p \in R^3$ 上の Brown 運動の resolvent とする。 U_0 とする。 Newtonian potential kernel は $C_K(R^3) \subset C_0(R^3)$ にうつす。 $E = R^3 \cup \{\infty\}$ とおき, ∞ は isolated point とする。 $f \in C_K = C_K(E)$ に對し, V を次のように定義する:

$$Vf(x) = \begin{cases} U_0 f|_{R^3}(x) + f(\infty) & , \quad x \in R^3 \\ f(\infty) & , \quad x = \infty \end{cases}$$

V は $C_K \in \bar{C}$ により L , the complete maximum principle
 をみたす. Theorem の 1~4) をみたす pseudo-resolvent
 $\{V_p\}$ が $\bar{C}$ 上に存在し得ることを示す.

$f(x) = 0$ ならば $f \in C_K$ である. ことに注意して,

$$g(x) = g_f(x) = \begin{cases} U_p f|_{R^3}(x) & , \quad x \in R^3 \\ 0 & , \quad x = \partial \end{cases}$$

とすれば,

$$(I + pV)g = Vf$$

$$(I + pV)V_p f = Vf$$

であるから, §2 Proposition 2 により $g = V_p f$. U_p は
 conservative であるから, $f \upharpoonright X_{R^3}$ ならば, $g \upharpoonright \Gamma' X_{R^3}$.

従って, $X_{R^3} = pV_p X_{R^3}$. 一方,

$$pV_p (X_{R^3} + X_\partial) = pV_p 1 \leq 1 = X_{R^3} + X_\partial$$

従って, $pV_p X_\partial \leq X_\partial$. 故に, $x \in R^3$ に対して $V_p X_\partial(x)$
 $= 0$. これは 4) に反する. ($V X_\partial(x) = 1$).