

## A 型 対称 Jackson 積分の接続行列 と Riemann-Hilbert 問題

名古屋大学 多元数理  
名城大 理工

青本 和彦  
加藤 芳文

0.  $q$ -超幾何関数の接続問題を扱えば、必然的に楕円テータ関数が現われる。実際、 $q$ -超幾何関数の接続関係を支配するのは楕円テータ関数の種々の関係式である。我々はこれを明らかにしてゆくのに、Jackson 積分の考えを前面に押し出し、それを de Rham コホモロジーの  $q$ -類似としてとらえる。ホモロジーを定義する輪体は基本的に格子点によって形成されているので、問題を幾何学的にとらえることができる。

以下 対称 A 型 Jackson 積分 の場合にこの接続関係について考察する。最後に、この接続関係が  $q$ -差分方程式をも求めてしまうという著しい事実を述べる。

<math>w\_k</math>は [1] を参照.

1. 代数的 トーラス  $\bar{X} = (\mathbb{C}^*)^n$  上の  
 $q$ -乗法関数 ( $q = e^{2\pi i \tau}$ ,  $\text{Im} \tau > 0$ )

$$(1.1) \quad \Phi(t) = \Phi_{n,m}(t)$$

$$= t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m \frac{(t_j/x_k)_\infty}{(t_j q^{\beta_k}/x_k)_\infty} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{(q^{\gamma'} t_j/t_i)_\infty}{(q^{\gamma} t_j/t_i)_\infty}$$

$$t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$$

かゝる条件

$$\alpha_j = \alpha_1 + (j-1)(\alpha - \gamma), \quad \gamma' + \gamma = 1$$

をみたすとき,  $\Phi(t)$  は 次の意味で 擬対称  
 (quasi-symmetric) である.

$$(1.2) \quad \sigma \Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\sigma^{-1}(t))$$

$$= U_\sigma(t) \Phi(t), \quad \sigma \in \mathcal{S}_n$$

( $\mathcal{S}_n$  は  $n$ -次対称群). 但し  $U_\sigma(t)$  は

$$(1.3) \quad U_\sigma(t) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)}} \left( \frac{t_j}{t_i} \right)^{\gamma - \gamma'} \frac{\mathcal{J}(q^{\gamma} t_j/t_i)}{\mathcal{J}(q^{\gamma'} t_j/t_i)}$$

$q$  によって定義される,  $(\mathbb{C}^*)^n$  上の 擬定数  
(pseudo-constant) であって,  $\mathcal{O}_n^*$  上の 1-コサイクル  
になっている. ここで

$$J(u) = (u)_\infty (q/u)_\infty (q)_\infty$$

$$(u)_\infty = \prod_{v=0}^{\infty} (1 - uq^v)$$

は Jacobi の 楕円 theta 関数である.

$$(1.4) \quad \Phi_D(t) = \Phi(t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

$$D(t) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

とおくとき,  $\Phi_D(t)$  の Jackson 積分, すなわち  
 $(\mathbb{C}^*)^n$  内の  $n$ -次元  $q$ -格子 上の 和は,  
これを  $\alpha, \beta, \gamma$  或は  $x_1, \dots, x_m$  の 関数  
とみた場合, 著しい 対称性 を 持て  
いる. Jackson 積分は, 背後に de Rham  
コホモロジー の 構造を 有しており, その一般  
論を 適用することにより, 多くの 興味ある  
結果を 導くことが 出来る. ここでは,  
 $m=2$  の場合の 接続公式 の 陽の公式  
を与えない. 代わりに [1] を 参照.

まず,  $m=1$  の場合の結果の複習から始める.

2.  $m=1$ ,  $\alpha_1=1$  とする.  $\xi$  を  $(\mathbb{C}^*)^n$  の任意の元とする.  $\langle \xi \rangle$  は  $\xi$  を通る  $n$ -次元の  $q$ -格子

$$(2.1) \quad \langle \xi \rangle = \left\{ (\xi_1 q^{\gamma_1}, \dots, \xi_n q^{\gamma_n}), \gamma_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

を表わすものとする. 又,  $\xi = \xi_F$  は

$$(2.2) \quad \xi_1 = q, \quad \xi_2 = q^{1+\gamma}, \quad \dots, \quad \xi_n = q^{1+(n-1)\gamma}$$

を,  $\eta = \eta_F$  は

$$(2.3) \quad \eta_1 = q^{\beta_1}, \quad \eta_2 = q^{\beta_1+\gamma}, \quad \dots, \quad \eta_n = q^{\beta_1+(n-1)\gamma}$$

を表わす. このとき, Jackson 積分の公式

$$(2.4) \quad \int \Phi(t) \frac{dq t_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dq t_n}{t_n}$$

$$\langle \xi_F \rangle$$

$$= \frac{q^{A_m}}{(\bar{q}(\gamma))^m} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma_q(\beta_1 + (j-1)\gamma + 1) \Gamma_q(\alpha_1 - (n+j-2)\gamma + n-1) \Gamma_q(j\gamma)}{\Gamma_q(\alpha_1 + \beta_1 - (n-j)\gamma + n)}$$

但し

$$A_m = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + n - j) ((j-1)\gamma + 1).$$

$$(2.5) \quad \int \Phi_D(t) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_n t_n}{t_n}$$

$$\langle \eta_F \rangle \quad (\langle \eta_F \rangle \text{は正規化を必要とする})$$

$$= \frac{\Gamma_q(1-\gamma)^n}{q^{\beta_n}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma_q(-\alpha_1 - \beta_1 + (j-1)\gamma - n + 1)}{\Gamma_q(-\beta_1 - (j-1)\gamma) \Gamma_q(-\alpha_1 + (n+j-2)\gamma - n + 2) \Gamma_q(1-j\gamma)}$$

$$\beta_n = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + n - j) (\beta_1 + (j-1)\gamma)$$

さらに、任意の  $\langle \xi \rangle$  に対しては、関係

$$(2.6) \quad \int \Phi_D(t) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_n t_n}{t_n} / \int \Phi_D(t) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_n t_n}{t_n} \langle \eta_F \rangle$$

$$= (q)_\infty^{3n} \prod_{j=1}^n \left( q^{\beta_1 + (j-1)\gamma} \xi_j \right)^{\alpha_1 - 2(j-1)\gamma}$$

$$\prod_{j=1}^n \frac{\mathcal{J}(q^{\alpha_1 + \beta_1 - (n-1)\gamma + 1} \xi_j)}{\mathcal{J}(q^{\alpha_1 - (n+j-2)\gamma + 1}) \mathcal{J}(q^{\beta_1 + 1} \xi_j)} \prod_{1 \leq k < j \leq n} \frac{\mathcal{J}(q^{\xi_j / \xi_k})}{\mathcal{J}(q^{\gamma + 1} \xi_j / \xi_k)}$$

が成立つ。(2.6)の右辺は  $\xi$  の関数として擬定数である。([3], [5], [4] など参照)

(2.4), (2.5) の右辺を 各々  $W_m^+(\alpha_1, \beta_1, \gamma), W_m^-(\alpha_1, \beta_1, \gamma)$  と表わすことにする。

3. 我々の本題である  $m=2$  の場合を考察する。おてに 先駆的 結果として 松尾 の仕事がある。

分割

$$F_0^n = (n, 0), F_1^{n-1} = (n-1, 1), \dots, F_n^0 = (0, n)$$

に 対応する 点  $\xi_{F_r^{n+r}}$  を 次のように 定義する。

$$(3.1) \quad \xi_{F_r^{n+r}} : \quad \xi_1 = x_1 q, \xi_2 = x_1 q^{\gamma+1}, \dots, \xi_r = x_1 q^{(n+r-1)\gamma+1}$$

$$\xi_{n+r+1} = x_2 q, \xi_{n+r+2} = x_2 q^{\gamma+1}, \dots, \xi_n = x_2 q^{1+(n-1)\gamma}$$

又, 点  $\eta_{F_r^{n+r}}$  を

$$(3.2) \quad \eta_{F_r^{n+r}} : \quad \eta_1 = x_1 q^{\beta_1}, \eta_2 = x_1 q^{\beta_1 \gamma}, \dots, \eta_r = x_1 q^{\beta_1 (n+r-1)\gamma}$$

$$\eta_{n+r+1} = x_2 q^{\beta_2}, \eta_{n+r+2} = x_2 q^{\beta_2 \gamma}, \dots, \eta_n = x_2 q^{\beta_2 (1+(n-1)\gamma)}$$

このとき,  $\Phi_D$  の Jackson 積分 に 附随する

$n$  次元 コホモロジー  $H_{sym}^n(\bar{X}, \Phi, \nabla)$  の

次元は  $n+1$  であって, その 双対である

$n$  次元 ホモロジー の 基底 として

$$\left\{ \left\langle \xi_{F_r^{n+r}} \right\rangle \right\}_{r=0}^n \text{ 又は } \left\{ \text{reg} \left\langle \eta_{F_r^{n+r}} \right\rangle \right\}_{r=0}^n \text{ を選ぶ}$$

ことができる.

このとき 次の接続公式が成り立つ.

$$(3.3) \quad \int \Phi_D(t) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_n t_n}{t_n} \\ \langle \xi \rangle \\ = \sum_{r=0}^n \left( \langle \xi \rangle : \text{reg} \left\langle \eta_{F_r^{n+r}} \right\rangle \right) \int \Phi_D(t) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_n t_n}{t_n} \\ \Phi_D \text{reg} \left\langle \eta_{F_r^{n+r}} \right\rangle$$

$$\therefore \left( \langle \xi \rangle : \text{reg} \left\langle \eta_{F_r^{n+r}} \right\rangle \right)_{\Phi_D} \text{ は}$$

$$(3.4) \quad \sum_{\sigma=(\sigma', \sigma'') \in \mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_m} \text{reg} \sigma \, U_{\sigma'}(\xi)^{-1} U_{\sigma''}(\eta_{F_r^{n+r}}) \psi_m(\xi, \eta_{F_r^{n+r}})$$

で与えられる 擬定数である. 但し

$$(3.5) \quad \psi_m(\xi, \eta) = (q)_{\infty}^{\beta_m} \prod_{j=1}^m \left( \frac{\xi_j}{\eta_j} \right)^{\alpha_j} \mathcal{J}(q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m + 1} \frac{\xi_1 \eta_{m+1}}{\xi_{m+1} \eta_1}) \\ \mathcal{J}(q^{\frac{\xi_1 \eta_{m+1}}{\xi_{m+1} \eta_1}})$$

$$(\xi_0 = \eta_0 = 1) \text{ とする. ( [1] 参照 )}$$

特に  $\xi = \xi_{F_r}^{mr}$  とおくと、成分

$$(3.6) \quad g_{r,s} = \left( \langle \xi_{F_r}^{mr} \rangle : \text{reg} \langle \eta_{F_s}^{ms} \rangle \right)_{\Phi_D}$$

$$(0 \leq r, s \leq n)$$

によって与えられる行列  $G = (g_{rs})_{r,s=0}^n$

は 2 個の基底  $\left\{ \langle \xi_{F_r}^{mr} \rangle \right\}_{r=0}^n$  と

$\left\{ \text{reg} \langle \eta_{F_r}^{mr} \rangle \right\}_{r=0}^n$  の間の関係を与える

接続行列である。この行列  $G$  を  
このノートでは 主接続行列 と呼んで

おく。主接続行列  $G$  は パラメータ  $\alpha_1$ ,  
 $\beta_1, \beta_2, \gamma$  に依存するので、それを  $\llcorner$  わしく  
書くときは  $G = G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)$

( $\gamma$  は定数とみておく) と記す。

$G$  には 次のような対称性がある。

(i) 第 1 種 対称性

$$(3.7) \quad G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) = {}^t G^{(n)}(x_1^{-1} q^{\beta_1}, x_2^{-1} q^{\beta_2}; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)$$

(ii) 第2種对称性

$$(3.8) \quad G^{(n)}(x_2, x_1; \alpha_1, \beta_2, \beta_1) \\ = A(x_2/x_1) G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) {}^t A(q^{\beta_2 - \beta_1} x_1/x_2)$$

但し

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_{0,n}(z) \\ & & & a_{1,n-1}(z) \\ & & \ddots & \\ & a_{n,0}(z) & & 0 \end{pmatrix}$$

さて

$$a_{r,n-r}(z) = z^{2r(n-r) - r(n-r)\gamma + r(n-r)(n-2r)\gamma^2} q_r \\ \cdot \frac{j(q^{-(n-1)\gamma} z)_n \quad j(q^{-r\gamma} z)_n}{j(q^{-(n-1)\gamma} z)_r \quad j(q^{-(n-1)\gamma} z)_{n-r} \quad j(q^{-r\gamma} z)_r \quad j(q^{-r\gamma} z)_{n-r}}, \\ j(u)_k = j(u) j(uq^\gamma) \cdots j(uq^{(k-1)\gamma})$$

(iii) 第3種对称性

$$(3.9) \quad G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)^{-1} \\ = C(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2) G^{(n)}(x_1^{-1} q^{\beta_1}, x_2^{-1} q^{\beta_2}; \alpha_1^*, \beta_1, \beta_2) \cdot \\ \cdot {}^t C(\bar{x}_1^{-1} q^{\beta_1-1}, \bar{x}_2^{-1} q^{\beta_2-1}, \beta_1, \beta_2)$$

$$\text{例} \quad \alpha_1^* = -\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - 2(n-1)\gamma',$$

$$C(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2) = J B(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2) A(q^{\beta_2 \gamma_1} x_1 / x_2) \cdot B(x_2, x_1; \beta_2, \beta_1).$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0(x_1, x_2) & & \\ & \ddots & \\ & & b_m(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$b_r(x_1, x_2) = x_1^{-r(\beta_1+\beta_2)} q^{r(\beta_1-1)(\beta_1+\beta_2)+(n-1)\frac{(\beta_1+\beta_2-1)\gamma}{2} + \frac{(n-1)r(n-1)}{3}\gamma^2}$$

$$\frac{\mathcal{J}(q^{\beta_1})_r \cdot \mathcal{J}(q^{\beta_1} x_2 / x_1)_r \mathcal{J}(q^\gamma)_r}{(q)_{\infty}^{\beta_1 r} \mathcal{J}(q^{\beta_1+\beta_2} x_2 / x_1)_r \mathcal{J}(q^\gamma)_r}.$$

以下、 $G^{-1}$  の  $(i, j)$  成分を  $\tilde{g}_{ij}$  と表わす.

これらの対称性は、すべて Jackson 積分の対称性から得られる。

#### 4. Games 分解 ([9], [11] 参照)

$x = x_2/x_1$  とおくと、 $x=0, \infty$  の近くでの Jackson 積分の漸近展開を与える  $n$  次元輪体を定義する。

$$\zeta_{F^r} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \text{ を}$$

$$(4.1) \quad \zeta_1 = x_1 q^{\beta_1}, \zeta_2 = x_1 q^{\beta_1 \gamma}, \dots, \zeta_{n-r} = x_1 q^{\beta_1 - (n-r-1)\gamma}$$

$$\zeta_{n-r+1} = x_2 q, \zeta_{n-r+2} = x_2 q^{1+\gamma}, \dots, \zeta_n = x_2 q^{1+(r-1)\gamma}$$

$$k \text{ によつて, } \delta_{F^r} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \text{ を}$$

$$(4.2) \quad \delta_1 = x_1 q, \delta_2 = x_1 q^{1+\gamma}, \dots, \delta_{n-r} = x_1 q^{1+(n-r-1)\gamma}$$

$$\delta_{n-r+1} = x_2 q^{\beta_2}, \delta_{n-r+2} = x_2 q^{\beta_2 \gamma}, \dots, \delta_n = x_2 q^{\beta_2 - (r-1)\gamma}$$

$k$  によつて定義するとき、積分 (適当な正規化を行なう)

$$(4.3) \quad \int \Phi_D(\pm) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dq_r t_r}{t_r}, \quad 0 \leq r \leq n$$

$$\langle \zeta_{F^r} \rangle$$

$$(4.4) \quad \int \Phi_D(\pm) \frac{dq_1 t_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dq_r t_r}{t_r}, \quad 0 \leq r \leq n$$

$$\langle \delta_{F^r} \rangle$$

は、各 $r$   $z=0$ ,  $z=\infty$  の漸近展開  
を与える。実際  $z=0$  の近 $z=0$ は

$$(4.5) \int \Phi(t) \frac{dt_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \\ \langle \zeta_{F^{n+r}} \rangle$$

$$\sim q^{(n+r)\beta_1\beta_2 + \frac{(n+r)(n+r-1)}{2}\beta_2\gamma} z_1^{n\alpha_1 + n(n-1)(1-\gamma)}.$$

$$z^{r\alpha_1 - (n+r)\beta_2 + r(n+r)(1-\gamma) + r(n-1)(1-\gamma)} \cdot \psi_r(z).$$

$$\cdot W_{n+r}^-(\alpha_1 + \beta_2 + r, \beta_1, \gamma) W_r^+(\alpha_1 + (n-r)(1-2\gamma), \beta_2, \gamma),$$

$$\text{但し} \\ \psi_r(z) = \prod_{j=1}^{n+r} z^{\beta_2} \frac{j(q^{-\beta_1 - (j-1)\gamma} z^{-1})}{j(q^{\beta_1 - (j-1)\gamma} z^{-1})}.$$

同様 $z=\infty$ の近 $z=\infty$ は

$$(4.6) \int \Phi(t) \frac{dt_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \\ \langle \zeta_{F^{n+r}} \rangle$$

$$\sim (-1)^{r(n+r)} q^{r\beta_1\beta_2 + \frac{r(r-1)}{2}\beta_1\gamma' - r(n+r)\beta_2 + \frac{r(r-1)(n+r)\gamma'}{2} - \frac{r(n+r)(n+r-1)\gamma}{2}}.$$

$$z^{n\alpha_1 + n(n-1)(1-\gamma)} z^{r\alpha_1 + r\beta_1 + r(n-1)(1-\gamma) + r(n+r)} \psi_r^*(z).$$

$$W_{n-r}^+(\alpha_1 + r(\gamma_1 - \gamma), \beta_1, \gamma) \bar{W}_r(\alpha_1 + \beta_1 + n - r, \beta_2, \gamma),$$

但し

$$v_r^*(z) = \prod_{j=n-r+1}^n z^{-\beta_1} \frac{j(q^{\beta_2 - (n-r+1-j)\gamma'} z)}{j(q^{\beta_1 - \beta_2 - (n-r+1-j)\gamma'} z)}.$$

$$\prod_{i=1}^{n-r} \prod_{j=n-r+1}^n z^{\gamma_1 - \gamma} \frac{j(q^{\beta_2 + (j-n+r)\gamma_1 - (i-1)\gamma} z)}{j(q^{\beta_2 + (j-n+r)\gamma_1 - (i-2)\gamma} z)}.$$

$v_r(z), v_r^*(z)$  は  $z$  の関数として 定数で  
あることに注意.

$$\text{さて } \langle \zeta_{F_r}^{n-r} \rangle (0 \leq r \leq n), \quad \langle \delta_{F_r}^{n-r} \rangle (0 \leq r \leq n)$$

も又  $n$ -次元ホモロジーの基底になっている.

そこで これらの基底と  $\langle \xi_{F_r}^{n-r} \rangle (0 \leq r \leq n),$

$\langle \eta_{F_r}^{n-r} \rangle (0 \leq r \leq n)$  からの関係がなくてはなら  
ない.

$$(4.7) \quad \langle \zeta_{F_r}^{n-r} \rangle = \sum_{s=0}^n h_{r,s}^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \langle \eta_{F_s}^{n-s} \rangle$$

$$= \sum_{s=0}^n h_{r,s}^{(s)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \langle \xi_{F_s}^{n-s} \rangle$$

ここで  $h_{rs}$ ,  $\tilde{h}_{rs}$  は  $x_1, x_2$  の関数としては、  
擬定数である。

我々の主要な結果は、 $h_{rs}$ ,  $\tilde{h}_{rs}$  を具体的に  
 $q$ -タ積で表示できることである。

### 定理1.

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad & q_{r,0}^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \\
 &= q^{C_r^{(n)}(\beta_1)} z^{\alpha_1 - n(n-1)\gamma} \frac{(q)_\infty^{2n} J(q^{\gamma+1})^n}{J(q^{\gamma+1})_n J(q^{\alpha_1 - 2(n-1)\gamma+1})_n} \cdot \\
 &\quad \frac{J(q^{\alpha_1 + \beta_1 - (n-1)\gamma+1})_{n-r} J(q^{\alpha_1 + \beta_1 - (n-1)\gamma+1} z)_r {}_n J(q^\gamma)_r}{J(q^{\beta_1+1})_{n-r} J(q^{\beta_1+1} z)_r {}_n J(q^{-(n-r-1)\gamma} z)_r}
 \end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}
 C_r^{(n)}(\beta_1) &= n\alpha_1\beta_1 - n(n-1)\beta_1\gamma + \{n(n-1) + n(n-r) + (n-r)(n-r-1)\}\alpha_1\gamma \\
 &\quad - \left\{ \frac{2(n-r-1)(n-r)(2n-2r-1) + n(2n-r-1)(2n-r-2)}{3} - nr(n-r) \right\} \gamma^2,
 \end{aligned}$$

$${}_n J_r(u) = \frac{J(u)_n}{J(u)_r J(u)_{n-r}} \quad \text{を 表わす.}$$

同様にして,  $q_{0,r}^{(n)}$ ,  $q_{r,n}^{(n)}$ ,  $q_{n,r}^{(n)}$  も

Jacobi テータ 楕円関数の単項式  
表われることが  $G$  の対称性からわかる。以下の  
具体的表示 省略する。

定理2.

$$(4.9) \quad h_{r,s}^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \\ = \begin{cases} q_{r,s}^{(n)}(x_1 q^{\beta_1 + (n-r-2)\gamma'}, x_2; \alpha_1 + (n-r)(\gamma' - \gamma), \gamma - \gamma', \beta_2) & (r \geq s) \\ 0 & (r < s) \end{cases},$$

$$(4.10) \quad \tilde{h}_{r,s}^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \\ = \begin{cases} a_{n-s,s}(z) a_{r,n+r}(q^{\beta_1 + (n-r-1)\gamma} z^{-1}) \cdot \\ \quad \tilde{q}_{n-r,n-s}^{(n-r)}(x_2 q^{\gamma'}, x_1; \alpha_1 + r(\gamma' - \gamma), \gamma - \gamma', \beta_1), & (r \leq s) \\ 0 & (r > s) \end{cases}$$

従って  $\tilde{h}_{r,s}^{(n)}$  を  $(r,s)$  成分とする行列  $H^{(n)}$  は  
下三角,  $\tilde{h}_{r,s}^{(n)}$  を  $(r,s)$  成分とする行列  
 $\tilde{H}^{(n)}$  は上三角である。おのれの成分は 楕円テータ  
多項式である。

(3.6)と(4.7)から 直ちに  $G^{(n)}$  の Gauss 分解

$$(4.11) \quad G^{(n)} = H^{(n)-1} H^{(n)}$$

が得られる。さて  $G^{(n)}$  は、  
単項式を要素とする 下三角、上三角の  
行列の積表示を持つことがわかった。

(4.11)の系

$$(4.12) \quad \det G^{(n)} = \frac{h_{00}^{(n)} h_{11}^{(n)} \cdots h_{nn}^{(n)}}{h_{00}^{(n)} h_{11}^{(n)} \cdots h_{nn}^{(n)}}$$

この具体的な形は、 $n=2$  のときはよく  
知られていて、Fay の trisecant formula の  
特別な場合になっている。

### 5. $q$ -差分方程式と Riemann-Hilbert 問題

$m=2$  の場合、 $\mathcal{D}(\theta)$  の Jackson 積分は  
 $x$  の関数とみて、常  $q$ -差分方程式をみたす。  
さて  $x=0, \infty$  での漸近展開は、各々  
(4.5), (4.6) で与えられる。

$x=0$  での指数は

$$\mu_r = r\alpha_1 - (n-r)\beta_2 + r(n-r)(1-\gamma) + r(r-1)(1-\gamma) \quad (0 \leq r \leq n)$$

$x=\infty$  でのそれは

$$\mu_r^* = r\alpha_1 + r\beta_1 + r(r-1)(1-\gamma) + r(n-r) \quad (n \leq r \leq \infty)$$

である。

さて,  $H_{\text{sym}}^n(\bar{X}, \Phi, \nabla)$  の基底  $\varphi_s$  を

$$(5.1) \quad \varphi_s(t) = \mathcal{A} \left\{ \prod_{j=1}^{n-s} \frac{1 - q^{\beta_2} \frac{t_j'}{x_2}}{1 - \frac{t_j'}{x_1}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - q^{-1} \frac{t_j}{t_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{t_j'}{x_2})} \right\}$$

$$0 \leq s \leq n$$

と選ぶことができる ([6], [7], [8]).

ここで,  $\mathcal{A}$  は交代和の意味である。

このとき, 周期行列

$$(5.2) \quad Y_+(z) = \left( \left( \int \Phi \varphi_s(t) \frac{dq t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq t_n}{t_n} \right) \right)_{r, s=0}^n$$

$$\langle \zeta_{F^{nr}} \rangle$$

$$(5.3) \quad Y_-(z) = \left( \left( \int \Phi \varphi_s(t) \frac{dq t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq t_n}{t_n} \right) \right)_{r, s=0}^n$$

$$\langle \sigma_{F^{nr}} \rangle$$

は, 各々  $z=0$ ,  $z=\infty$  の漸近展開を  
指定する  $q$ -差分方程式

$$(5.4) \quad Y(qz) = Y(z) \Omega(z)$$

( $\Omega(z)$  は適当な  $(n+1)$  次 有理正方行列)

をみたす. 更に, 漸近表示  $(\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\},$

$\{\lambda_0^*, \dots, \lambda_n^*\}$  は 指数系を表わす)

$$(5.5) \quad Y_+(z) \sim V_+(z) \begin{pmatrix} z^{\lambda_0} & & \\ & z^{\lambda_1} & \\ & & \ddots \\ & & & z^{\lambda_n} \end{pmatrix} C_+ \quad (z=0)$$

$$(5.6) \quad Y_-(z) \sim V_-(z) \begin{pmatrix} z^{\lambda_0^*} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_n^*} \end{pmatrix} C_- \quad (z=\infty)$$

を持つ。こゝに、 $V_{\pm}(z)$ は 擬定数 を要素  
とする対角行列、 $C_+$ は下三角、 $C_-$ は上三角  
行列である。

$$(5.7) \quad Y_0(z) = C_+^{-1} V_+(z)^{-1} Y_+(z)$$

$$(5.8) \quad Y_{\infty}(z) = C_-^{-1} V_-(z)^{-1} Y_-(z)$$

とおけば、 $Y_0(z)$ ,  $Y_{\infty}(z)$  も又、(5.4)の解で

$$(5.9) \quad Y_0(z) \sim C_+^{-1} \begin{pmatrix} z^{\lambda_0} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_n} \end{pmatrix} C_+ \quad (z=0)$$

$$(5.10) \quad Y_{\infty}(z) \sim C_{-}^{-1} \begin{pmatrix} z^{\lambda_0^*} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_m^*} \end{pmatrix} C_{-} \quad (z=\infty)$$

の表示を持つ。今、

$$(5.11) \quad Y_0(z) = P(z) Y_{\infty}(z)$$

とあるとき、 $P(z)$  は  $z=0$  と  $z=\infty$  の解をつなぐ  
接続行列である。

(3.6), (3.8), (4.7) より 次の公式が成り立つ。

定理 3. (1)

$$(5.12) \quad Y(z) Y_{+}(z)^{-1}$$

$$= A(z)^{-1} H^{(n)}(x_2, x_1; \alpha_1, \beta_2, \beta_1) A(q^{\beta_1 \Gamma \beta_2} z) H^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2),$$

$$\text{よって} \quad A(u) = \begin{pmatrix} a_{0,n}(q^{\beta_2 - (n-1)\gamma} u) \\ a_{1,n-1}(q^{\beta_2 - (n-2)\gamma} u) \\ \vdots \\ a_{n,0}(q^{\beta_2 + \gamma} u) \end{pmatrix}$$

(ii)

$$(5.13) \quad P(z)^{-1} = Y_0(z) Y_0(z)^{-1}$$

$$= C_-^{-1} V_-(z)^{-1} Y_-(z) Y_+(z)^{-1} V_+(z) C_+$$

さらに注目すべきことは、基底  $\{\varphi_s\}_{s=0}^n$  に関する  $q$ -差分方程式 (5.4) の  $\Omega(z)$  は  $q^{\alpha_1}, q^{\beta_1}, q^{\beta_2}, q^{\gamma}$   $K$ のみ依存し、 $q$  そのもの  $K$  は依存しない。これは松尾[6]の中で示されている([7]も参照)。

このような条件の下では、接続行る  $P(z)$  か  $\Omega(z)$  が直接求められてしまう。実際、次の定理が成り立つ。

#### 定理 4.

$$(5.14) \quad \lim_{q \rightarrow 0} P(z)^{-1} = \Omega(z) \Omega(0)^{-1}$$

$$(5.15) \quad \Omega(0) = C_+^{-1} \begin{pmatrix} q^{\alpha_0} & & & \\ & q^{\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{\alpha_n} \end{pmatrix} C_+$$

この事実、通常は、通常の差分方程式や微分方程式の場合に比較して、驚くべきことと言わねばならない。

例.  $n=1$  の場合

$$\varphi_0 = \frac{1 - q^{\beta_2} \frac{t_1}{x_2}}{(1 - \frac{t_1}{x_1})(1 - \frac{t_1}{x_2})}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{1 - \frac{t_1}{x_2}}$$

$$Y_+ = \begin{pmatrix} \int \Phi \varphi_0 \frac{d_q t_1}{t_1}, & \int \Phi \varphi_1 \frac{d_q t_1}{t_1} \\ \langle \bar{q}^{\beta_1} x_1 \rangle & \langle q^{\beta_1} x_1 \rangle \\ \int \Phi \varphi_0 \frac{d_q t_1}{t_1}, & \int \Phi \varphi_1 \frac{d_q t_1}{t_1} \\ \langle x_2 q \rangle & \langle x_2 q \rangle \end{pmatrix}$$

$$Y_- = \begin{pmatrix} \int \Phi \varphi_0 \frac{d_q t_1}{t_1}, & \int \Phi \varphi_1 \frac{d_q t_1}{t_1} \\ \langle x_1 q \rangle & \langle x_1 q \rangle \\ \int \Phi \varphi_0 \frac{d_q t_1}{t_1}, & \int \Phi \varphi_1 \frac{d_q t_1}{t_1} \\ \langle \bar{q}^{\beta_2} x_2 \rangle & \langle \bar{q}^{\beta_2} x_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$q$ -差分方程式 (5.4) において,  $\Omega(z)$  は

$$\Omega(z) = \begin{pmatrix} \frac{z-1}{z-q^{\beta_2}} & , & q^{\alpha_1} \frac{(1-q^{\beta_1})z}{z-q^{\beta_2}} \\ \frac{1-q^{\beta_2}}{z-q^{\beta_2}} & , & q^{\alpha_1} \frac{(q^{\beta_1}z - q^{\beta_2})}{z-q^{\beta_2}} \end{pmatrix}$$

で与えられる.  $\Omega(z)$  は  $q^{\alpha_1}, q^{\beta_1}, q^{\beta_2}$  のみに  $K$  依存し,  
 $q$  そのものに  $K$  は依存しない ( [6], [7] ).

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} q^{\beta_2} & , & 0 \\ 1-q^{\beta_2} & , & q^{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

$$\Omega(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & , & q^{\alpha_1} \\ 0 & , & q^{\alpha_1+\beta_1} \end{pmatrix}$$

すなわち  $\lambda_0 = -\beta_2, \quad \lambda_1 = \alpha_1$

$$\lambda_0^* = 0, \quad \lambda_1^* = \alpha_1 + \beta_1$$

$$C_+ = \begin{pmatrix} c_0 & \\ & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{1-q^{\beta_2}}{1-q^{\alpha_1+\beta_2}}, & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_- = \begin{pmatrix} c_0^* & \\ & c_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & q^{\alpha_1} \frac{1-q^{\beta_1}}{1-q^{\alpha_1+\beta_1}} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = q^{\beta_2 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_2)} \frac{\Gamma_q(-\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + 1)}{\Gamma_q(-\beta_1 + 1) \Gamma_q(-\alpha_1 - \beta_2 + 1)}$$

$$c_1 = \frac{\Gamma_q(\alpha_1) \Gamma_q(\beta_2)}{\Gamma_q(\alpha_1 + \beta_2)}$$

$$c_0^* = \frac{\Gamma_q(\alpha_1) \Gamma_q(\beta_1)}{\Gamma_q(\alpha_1 + \beta_1)}$$

$$c_1^* = q^{\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\beta_2} \frac{\Gamma_q(-\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + 1)}{\Gamma_q(-\beta_2 + 1) \Gamma_q(-\alpha_1 - \beta_1 + 1)}$$

$$V_+(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad V_-(z) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & v_1^*(z) \end{pmatrix}$$

$$v_0(z) = \frac{\mathcal{I}(\bar{z}^{-1} q^{\beta_1})}{\mathcal{I}(\bar{z}^{-1} q^{\beta_2 - \beta_1})} (z q^{\beta_1})^{\beta_2}, \quad v_1^*(z) = \frac{\mathcal{I}(z q^{\beta_2})}{\mathcal{I}(z q^{\beta_1 - \beta_2})} (\bar{z}^{-1} q^{\beta_2})^{\beta_1}$$

$$Y_-(z) Y_+^{-1}(\bar{z}) = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{pmatrix}$$

$$f_{00} = -q^{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1} (q)_\infty^3 \frac{\mathcal{J}(\bar{z}^{-1}) \mathcal{J}(q^{\beta_1 - \beta_2} z) \mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_1} \bar{z})}{\mathcal{J}(q^{\beta_1}) \mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2}) \mathcal{J}(q^{\beta_2} \bar{z}) \mathcal{J}(q^{\beta_1} \bar{z}^{-1})}$$

$$f_{01} = \bar{z}^{-\alpha_1} \frac{\mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2} z) \mathcal{J}(q^{\beta_2})}{\mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2} z) \mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2})}$$

$$f_{10} = -z^{\alpha_1} q^{\alpha_1(\beta_1 - \beta_2)} \frac{\mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_1} \bar{z}^{-1}) \mathcal{J}(q^{\beta_2})}{\mathcal{J}(q^{\beta_1} \bar{z}^{-1}) \mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2})}$$

$$f_{11} = q^{-\alpha_1 \beta_2} \frac{\mathcal{J}(q^{\beta_2})}{(q)_\infty^3 \mathcal{J}(q^{-\alpha_1 - \beta_2})}$$

$q^{\alpha_1} = a_1, q^{\beta_1} = b_1, q^{\beta_2} = b_2$  を固定して,

$q \rightarrow 0$  ( $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \rightarrow 0$ ) とすれば

$$\lim_{q \rightarrow 0} C_\pm, \quad \lim_{q \rightarrow 0} V_\pm(z), \quad \lim_{q \rightarrow 0} Y_-(z) Y_+^{-1}$$

はすべて存在し,

$$\begin{aligned}
& \lim_{q \rightarrow 0} Y_{\infty}(z) Y_0(z)^{-1} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \bar{C}_+^{-1} V(z)^{-1} Y(z) Y_4(z)^{-1} V_4(z) C_+ \\
&= \Omega(z) \Omega_0^{-1}
\end{aligned}$$

をたかめることが出来る。但し

$$\Omega(0) = \bar{C}_+^{-1} \begin{pmatrix} q^{\beta_2} & \\ & q^{\alpha_1} \end{pmatrix} C_+ .$$

(右辺は  $q$  のもの  $K$  によらないことに注意)  
 定理 4 の成立する 根拠 については  
 別の機会にゆずる。

# 文献

- [1] 青本和彦 (庵原謙 訳) (述)  $q$  差分 de Rham  
コホモロジーにおける接続公式, in *Infinite Analysis*  
Lec Note No.9 (1994), 51-61
- [2] K. AOMOTO and Y. Kato, Connection formula  
of symmetric A-type Jackson integrals, *Duke*  
*Math. J.* 74(1994), 129-143
- [3] K. Kadell, A proof of Askey's conjectured  
 $q$ -analogue of Selberg's integral and conjecture  
of Morris, *SIAM J. Math. Anal.* 19(1988), 969-  
986.
- [4] J. Kaneko,  $q$ -Selberg integrals and  
Macdonald polynomials, Preprint, 1994.
- [5] K. AOMOTO, On a theta product formula  
for the symmetric A-type connection function,  
*Osaka J. Math.* 32(1995), 35-39
- [6] A. Matsuo, Quantum algebra structure  
of certain Jackson integrals, *Commun. Math.*  
*Phys.*, 157(1993), 479-498.
- [7] K. Mimachi, Holonomic  $q$ -difference  
system of the first order associated with  
a Jackson integral of Selberg type,  
*Duke Math. J.*, 73(1994), 453-468.

[8] N.Y. Reshetikhin, Jackson type integrals, Bethe vectors, and solutions to a difference analog of the Knizhnik-Zamolodchikov system, Lett. Math. Phys., 26(1992), 153-165.

[9] K. Aomoto and Y. Kato, Gauss decomposition of connection matrices and application to Yang-Baxter equation, I, II, Proc. Japan Acad. 69(1993), 238-242; 341-344.

[10] A. Varchenko, Quantized Knizhnik-Zamolodchikov equations, quantum Yang-Baxter equation, and difference equations for  $q$ -hypergeometric functions, preprint, 1993.

[11] K. Aomoto and Y. Kato, Gauss decomposition of connection matrices for symmetric A-type Jackson integrals, preprint 1995.

[12] K. Aomoto, Connection formulas in the  $q$ -analog de Rham cohomology, preprint, 1994, to appear in Proc dedicated to Prof. I.M. Gelfand's 80th birthday.