

Fermat 4 次曲面と Selmer 群

東大・数理 博士課程 大坪 紀之 (Noriyuki Otsubo)

現代の数論の最も重要な主題の一つは、代数体上のモチーフの L 関数の振る舞いを知ることであろう。解析接続された L 関数の整数点での零点 (極) の位数や特殊値に関しては様々な予想があり、広大で深遠な海図を我々に与えてくれるが、特別な場合でも非常に深い数論的現象を示しており分かっていることは少ない。

この項の前半では、零点の位数に関する予想を概説する。多くの重要な点、特に混合モチーフの哲学や特殊値に関する予想には触れられないことをお断りする ([B-K] [N] [Sai] [Sc] 等を参照されたい)。後半では、ある種の曲面に対して知られているいくつかの結果を紹介し、代数的サイクルとの関係について述べる。

1. 予想

k を代数体、 X を k 上の非特異で射影的な代数多様体とする。 X に付随する i 次のモチーフの n 回 Tate twist $M = h^i(X)(n)$ に対して L 関数を定義する。 M の重さを $w = i - 2n$ とおく。ただし“モチーフ”は各実現 (Betti, de Rham, l 進, クリスタリン, 等) の総体と考える。例えば l 進実現はエタール・コホモロジー群 $M_l = H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(n))$ である。

k の有限素点 v に対し Fr_v, I_v をそれぞれ v での幾何 Frobenius, 惰性群とし、

$$P_v(M, t) = \det(1 - \text{Fr}_v \cdot t \mid M_l^{I_v})$$

とおく。ただし l は v で割れない素数であり、 $P_v(M, t)$ は l によらない $\mathbb{Z}$ 係数多項式であると思われる。実際 good reduction を持つ素点に関しては正しい。そして L 関数を

$$L(M, s) = \prod_v P_v(M, q_v^{-s})$$

で定義する (q_v は v での剰余体の位数)。Deligne の Weil 予想に関する結果より、 $L(M, s)$ は $\text{Re}(s) > \frac{w}{2} + 1$ で絶対収束する。また無限素点に対しても Euler 因子が定義され、 L_∞ はそれらをかけ合わせたものである。それらの正確な定義は省略するが、ガンマ関数をずらしてかけ合わせたものであり、Betti 実現 $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ の Hodge 構造のみで決まる。最後に

$$\Lambda(M, s) = L(M, s) \cdot L_\infty(M, s)$$

とおく。

予想 1.1 (Hasse-Weil). $L(M, s)$ は全複素平面上の有理型関数に解析接続され, w が偶数の時の $s = \frac{w}{2} + 1$ 以外では極を持たない. さらに関数等式

$$\Lambda(M, s) = a \cdot b^s \cdot \Lambda(M, w + 1 - s)$$

を満たす (a, b は定数).

例えば X が Fermat 超曲面の時は, L 関数が Hecke 指標の L 関数でかける (Weil) ので上の予想は正しい. また, 有理数体または総実代数体上の広いクラスの楕円曲線に対しては, Wiles らの仕事によりその L 関数が保型形式の L 関数と一致することがわかっているの, 上の予想は正しい.

以下では予想 1.1 を仮定する. m を整数とし, $s = m$ での L 関数の零点の位数に関する予想をみるが,

$$L(M(r), s) = L(M, s + r)$$

なので $M = h^i(X)$ として考えればよい.

(a) $m > \frac{i}{2} + 1$ の時. ここでは絶対収束するので零点も極もない.

(b) $m = \frac{i}{2} + 1$ の時 (i は偶数).

予想 1.2 (Tate). サイクル写像

$$CH^{m-1}(X) \otimes \mathbb{Q}_p \longrightarrow H^{2m-2}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(m-1))$$

の像は k の絶対 Galois 群の作用の不変部分に一致し, $-\text{ord}_{s=m} L(M, s)$ はその次元に等しい. ただし $CH^d(X)$ は余次元 d の代数的サイクルを有理同値で割った群, Chow 群である.

X がアーベル多様体で $m = 2$ の時, この予想の前半は Faltings により示されている. Fermat 超曲面の時も分かっている場合が多く (Tate, Katsura-Shioda), 特に曲面なら任意の次数で成立する.

(c) $m = \frac{i+1}{2}$ の時 (i は奇数).

予想 1.3 (Beilinson-Bloch). サイクル写像の核 $CH^m(X)_0$ は有限生成アーベル群であり, Abel-Jacobi 写像

$$CH^m(X)_0 \otimes \mathbb{Q}_p \longrightarrow H^1(k, H^{2m-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(m)))$$

は単射, そして $\text{ord}_{s=m} L(M, s)$ はその像の次元に等しい.

X が楕円曲線で $m = 1$ の時が, Birch-Swinnerton-Dyer 予想である.

(d) $m < \frac{i+1}{2}$ の時. ここでの零点の位数の予想は, 予想 1.1 とガンマ関数の基本的な性質により (a) と (b) に帰着される.

以下では簡単のため $k = \mathbb{Q}$ とするが, それ以外の時も $\mathbb{Q}$ 上にスカラー制限して考えれば良いので, 一般性を失わない. また $n = i + 1 - m$ とおく. Beilinson [Be] は, $m \leq \frac{i+1}{2}$ に対し高次の regulator 写像

$$r: H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X/\mathbb{C}, \mathbb{R}(n))$$

を定義し、これが L 関数の零点の位数や特殊値を与えることを予想した。

ここで左辺はモチヴィック・コホモロジー群と呼ばれる $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間で、

$$H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n)) = K_{2n-i-1}(X)_{\mathbb{Q}}^{(n)}$$

と定義される。ただし、 $K_*(-)$ は Quillen によって定義された代数的 K -群であり、添え字 (n) は Adams 作用素の作用による固有空間への直和分解

$$K_p(X)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{q \geq 0} K_p(X)_{\mathbb{Q}}^{(q)}$$

の成分を表す。 $m = n = \frac{i+1}{2}$ の時、

$$H_{\mathcal{M}}^{2m}(X, \mathbb{Q}(m)) = K_0(X)_{\mathbb{Q}}^{(m)} \simeq CH^m(X)_{\mathbb{Q}}$$

であることに注意。さらに $\mathfrak{X}$ を $\mathbb{Z}$ 上 proper, 平坦な X のモデルとすると、

$$H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} = \text{Im}(K'_{2n-i-1}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Q}} \rightarrow K_{2n-i-1}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow K_{2n-i-1}(X)_{\mathbb{Q}}^{(n)})$$

を整数部分と定義する。この群は、モデルの取り方にとらない有限生成アーベル群であると予想されている。

右辺は Deligne コホモロジー群であり、複体

$$0 \longrightarrow (2\pi\sqrt{-1})^n \cdot \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \longrightarrow \Omega_{X(\mathbb{C})}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_{X(\mathbb{C})}^{n-1} \longrightarrow 0$$

のハイパーコホモロジー群として定義される。複素共役による不変部分を $H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))$ と書く。大切なのはこの群が Hodge 構造を反映し、等式

$$\dim_{\mathbb{R}}(H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))) = \begin{cases} \text{ord}_{s=m} L(M, s), & (m < \frac{i}{2}), \\ \text{ord}_{s=m} L(M, s) - \text{ord}_{s=n} L(M, s), & (m = \frac{i}{2}), \end{cases}$$

が成り立つことである。

予想 1.4 (Beilinson). $m \leq \frac{i}{2}$ の時、上の regulator 写像 r は同型

$$H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \simeq H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))$$

を引き起こす (ただし、 $m = \frac{i}{2}$ の時は修正が必要。左辺には $CH^m(X)/CH^m(X)_0 \otimes \mathbb{R}$ が加わる)。特に、 $m \leq \frac{i}{2}$ で

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}}) = \text{ord}_{s=m} L(M, s)$$

が成立 ($m = \frac{i}{2}$ の時は予想 1.2 を仮定した)。

そして Beilinson (と Deligne [D]) が予想したことは、 $L(M, s)$ の $s = m$ での値 (Taylor 展開の最初の項の係数) が、上の同型の (両辺に入る自然な $\mathbb{Q}$ -構造による) 行列式と、有理数倍の曖昧さを除いて一致するということであった。 $m = \frac{i+1}{2}$ での予想の定式化には Height paring の理論が必要である。

L 関数の特殊値の有理数部分までを決定しようというのが Bloch-Kato 予想 [B-K] であるが, その場合に決定的役割を果たすのが p 進 Hodge 理論である. そこで上の regulator 写像の代わりにするのは p 進 regulator 写像

$$r_p: H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n)) \otimes \mathbb{Q}_p \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}, V); V = H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(n))$$

であり, Deligne コホモロジー群に代わるのが Selmer 群 (の $\mathbb{Q}_p$ -係数版)

$$H_f^1(\mathbb{Q}, V) = \text{Ker} \left(H^1(\mathbb{Q}, V) \longrightarrow \bigoplus_{\text{all } l} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)} \right)$$

である. ただし, 部分空間 $H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)$ は, $l \neq p$ に対しては不分岐部分であり, $l = p$ に対しては Fontaine の定義した p 進周期の環 B_{cris} を用いて定義される.

(注) T を V の Galois 安定な $\mathbb{Z}_p$ -格子, $A = V/T$ とする. このとき Selmer 群は

$$S(\mathbb{Q}, A) = \text{Ker} \left(\alpha: H^1(\mathbb{Q}, A) \longrightarrow \bigoplus_{\text{all } l} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, A)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, A)} \right)$$

で定義される. ここで, $H_f^1(\mathbb{Q}_l, A)$ は $H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)$ の像. この群の (有限な) $\mathbb{Z}_p$ -corank は $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ の次元と一致する.

予想 1.5 (Bloch-Kato). 任意の m に対し, 上の p 進 regulator 写像 r_p は同型

$$H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_p \simeq H_f^1(\mathbb{Q}, V)$$

を引き起こす (ただし, $m = \frac{i+1}{2}$ の時は修正が必要. 左辺は $CH^m(X) \otimes \mathbb{Q}_p$ なので, $CH^m(X)_0 \otimes \mathbb{Q}_p$ に取り替える). 特に, 予想 1.2, 1.3, 1.4 と合わせると

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(H_f^1(\mathbb{Q}, V)) = \begin{cases} \text{ord}_{s=m} L(M, s), & (m \leq \frac{i+1}{2}) \\ 0, & (m \geq \frac{i}{2} + 1) \end{cases}$$

である.

2. 主結果

F を $\mathbb{Q}$ 上の Fermat 4 次曲面

$$x_0^4 + x_1^4 = x_2^4 + x_3^4$$

とし, $M = h^2(F)$ とおく. この時, 予想 1.1, 1.2 は既知であった. 次の結果は予想 1.4, 1.5 と両立する. $p \nmid 6$ を素数とし $V = H^2(\overline{F}, \mathbb{Q}_p(2))$ とおく.

定理 2.1 ([O, Theorem 0.3]).

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(H_f^1(\mathbb{Q}, V)) = \text{ord}_{s=1} L(M, s) = 2 \leq \dim_{\mathbb{Q}}(H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}).$$

また, 同じことが $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上でも成り立つ (その時, 上の不変量は 4).

最後の不等式についてもう少し言うと, $H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ に 2 個の具体的に構成される元があり, その r_p での像が $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ に含まれて, さらにそれを生成する, ということである.

証明の一つの要は, F をある Kummer 曲面と関係づける幾何的な構成である. Kummer 曲面とは, アーベル曲面を $\{\pm 1\}$ の作用で割り, 位数が 2 の点に対応する 16 個の特異点を解消して得られる K3 曲面のことである. Fermat 4 次曲線を C とするとその次数 2 の商としてある楕円曲線 E が得られる. この E は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に虚数乘法を持ち, 導手は 2 の冪である. Katsura-Shioda の帰納的構造により $C \times C$ から F が構成されるが, それが $E \times E$ から付随する Kummer 曲面 $\text{Km}(E \times E)$ の構成と両立することから, 次数 2 の有限射

$$g: \tilde{F} \longrightarrow \text{Km}(E \times E)$$

が得られる. ただし, $\tilde{F}$ は F をある 8 点で blow-up した曲面である.

この射を用いてまず, $\text{Pic}(F)$ の生成元を求めることができる. そのためには $\text{Pic}(\tilde{F})$ の生成元が分かれば良いが, これが $\text{Pic}(\text{Km}(E \times E))$ の引き戻しに $\tilde{F}$ 上の具体的に定義される 8 個のサイクルを加えて与えられることが, 交点行列の計算で分かる.

上の定理と同様のことが, まず $E \times E$, 次に $\text{Km}(E \times E)$, そして最後に F に対して示される. しかし, はじめの二つの場合には Selmer 群は有限であり, モチヴィック・コホモロジー群の整数部分との対応については見ることが無い.

まず, $\text{ord}_{s=1} L(M, s)$ の計算は, 予想 1.1, 1.2 より Picard 数 (余次元 1 のサイクル写像の像の次元) と Hodge 数を計算すれば良い.

次に Selmer 群であるが, $E \times E$ に対しては Flach [F1] (cf. [L-R]), Wiles [W] によって示されている (CM 体上で, p が supersingular reduction を持つ素数の時は cf. [O]). また少し後で述べる様に, 楕円曲線が半安定の時の Langer-Saito [L-S] と同じ手法と Flach の (Rubin の二変数岩澤主予想に基づく) 結果 [F1] を用いても, F の場合と平行に示される. $E \times E$ から $\text{Km}(E \times E)$ への移行は比較的容易である. そして F の場合は V と $H^2(\overline{\text{Km}(E \times E)}, \mathbb{Q}_p(2))$ の “差” を見るわけだが, 実はこの部分は上の 8 個のサイクルによって統制されることが分かる. そのサイクルのうちには $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 上でしか定義されないものがあり, V が $\text{Ind}_{\mathbb{Q}(\zeta_8)}^{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p(1)$ の様な Galois 表現を含むことが分かる. 代数体 k の整数環を $\mathcal{O}_k$ とすると,

$$H_f^1(k, \mathbb{Q}_p(1)) \simeq \mathcal{O}_k^* \otimes \mathbb{Q}_p$$

であるが, $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ と異なり $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ は単数群が階数 1 の自由部分を持つので, V の Selmer 群が有限でないのである.

以上の考察から $H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ の元は, 8 個のサイクルのいくつかと単数群の元を用いて自然に構成される.

以下で, Selmer 群の次元の決定の大まかな方針を述べる. まず今の場合, 本質的には大域的 Tate 双対性と Euler-Poincaré 標数による次の等式がある:

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(H_f^1(\mathbb{Q}, V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V) - \dim_{\mathbb{Q}_p}(V^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}) - \dim_{\mathbb{Q}_p} D_{\text{dR}}^0(V) \\ - \dim_{\mathbb{Q}_p}(V(-1)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}) + \text{corank}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Coker}(\alpha)).$$

ここで α は Selmer 群を定義した写像である. 右辺の一段目の項たちは Hodge 構造で決まる. ただし, 最後の項には Fontaine の定義した p 進周期の環 $B_{\text{dR}}^+ \subset B_{\text{dR}}$ を用いて定義され, p 進 Hodge 理論における比較定理 (de Rham 予想) が用いられる. 二段目の第一項は予想 1.2 により Picard 数と一致する. 従って, 最も重要なのは $\text{Coker}(\alpha)$ の有限性を示すことである.

簡単のため, $\mathbb{Q}_p$ -係数で議論する (本当はこれでは不十分である). 実は, p 進 regulator 写像との合成

$$H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2)) \xrightarrow{r_p} H^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{\alpha'} \bigoplus_{\text{all } l} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)}$$

が “ほとんど” 全射で, 像が

$$\bigoplus_{l \neq p} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)} \oplus \frac{H_g^1(\mathbb{Q}_p, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)}$$

である事が分かる. ここで, $H_g^1(\mathbb{Q}_p, V)$ は B_{dR} を用いて定義される $H_f^1 \subset H_g^1 \subset H^1$ を満たす部分空間で, 幾何的部分と呼ばれる. このことは, Langer-Saito [L-S] による可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2)) \otimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\alpha' \circ r_p} & \bigoplus_{l \nmid 2p} H^1(\mathbb{Q}_l, V)/H_f^1(\mathbb{Q}_l, V) \oplus H_g^1(\mathbb{Q}_p, V)/H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) \\ \partial \searrow & & \uparrow \wr \\ & & \bigoplus_{l \nmid 2p} \text{Pic}(F_l) \otimes \mathbb{Q}_p \oplus \text{Pic}(F_p) \otimes \mathbb{Q}_p \end{array}$$

の存在 (有限体上の Tate 予想が必要) により, ∂ の全射性から従う (ただし bad reduction を持つ素数 2 は別の扱いを要する). ここで, F_l は F の l での reduction であり ∂ は K 理論における localization sequence の boundary 写像である.

この全射性は, $E \times E$ の場合には Mildenhall [M] の結果であり, $H_{\mathcal{M}}^3(E \times E, \mathbb{Q}(2))$ の “indecomposable” な元を十分に構成することによって示された. この元の構成にはモジュラー曲線とモジュラー単数の理論が用いられ, Eichler-Shimura 合同関係式が本質的な役割を果たす (Flach [F2] によっても独立に得られ, E が半安定な時の $H^2(\overline{E} \times \overline{E}, \mathbb{Q}_p(2))$ の Selmer 群の有限性を示すのに用いられた). そして F の場合にも, 彼らの元の g による引き戻しが ∂ の全射性を示すのに本質的に十分であることが, 前述の Picard 群の記述により分かる [O, Theorem 0.2].

しかし, $H^1 = H_g^1$ であるとは限らない. 実際我々の場合は, p が ordinary ($p \equiv 1 \pmod{4}$) ならば H^1/H_g^1 が 1 次元あることが p 進 Hodge 理論の比較定理や有限体上の Tate 予想から分かるので, モチヴィック・コホモロジー群だけでは不十分である. しかし, 前述の Flach [F1] の結果により $E \times E$ の場合の α' の全射性が分かり, F に対しても導くことができる.

最後に、上の結果と密接に関係する、ゼロサイクルの有限性に関する結果について述べる。

定理 2.2 ([O, Theorem 0.1]). $F/\mathbb{Q}$ は上と同じ. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $F_K = F \otimes_{\mathbb{Q}} K$ とする. このとき, 素数 $p \nmid 6$ に対して p -準素ねじれ部分群 $CH^2(F)\{p\}$ と $CH^2(F_K)\{p\}$ は有限である.

この事実も, 同時に $E \times E$ や $\mathrm{Km}(E \times E)$ (また $E \times E \otimes_{\mathbb{Q}} K$, $\mathrm{Km}(E \times E) \otimes_{\mathbb{Q}} K$) たちに対しても示される. 多様体 X で $H_{\mathrm{Zar}}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすものに対しては $CH^2(X)$ のねじれ部分が有限であることが分かっていたが [CT-R] [Sal], それ以外の場合にこの種の結果があるのは [L-S] 以後のいくつかの場合に限られる.

この定理の証明は, Bloch-Ogus 理論と Merkur'ev-Suslin の定理 (K_2 に対する Hilbert 90) による完全列

$$0 \longrightarrow H_{\mathrm{Zar}}^1(F, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow NH^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) \longrightarrow CH^2(F)\{p\} \longrightarrow 0$$

が出発点である. ここで, $\mathcal{K}_2$ は前層 $U \mapsto K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ の Zariski 層化であり,

$$H_{\mathrm{Zar}}^1(F, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_{\mathcal{M}}^3(F, \mathbb{Q}(2))$$

が成り立つ. また N は Grothendieck の coniveau filtration の 1 番目である.

一つ目の群が十分大きいことを言うために, 最初の二つの群 (若干正確ではないが) を Hochschild-Serre スペクトル系列 Galois コホモロジー群 $H^1(\mathbb{Q}, A)$ に埋め込んで比較する. この時の合成

$$H_{\mathrm{Zar}}^1(F, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow H^1(\mathbb{Q}, A)$$

は r_p の $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ -係数版である. さらに全ての素数で局所化した所で比較すると, 双方の群の像がほぼ一致することが分かる. その局所化するときの障害が Selmer 群である. 従って, Selmer 群が有限でない我々の場合には, Galois コホモロジー群の Selmer 群を生じさせる部分に入る所は局所化しないで見る必要がある.

REFERENCES

- [Be] A. A. BEILINSON, Higher regulators and values of L -functions, *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovremennyye Problemy Matematiki* **24**, VINITI, Moskva, 1984, 181-238; English transl. in: *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2036-2070.
- [B-K] S. BLOCH and K. KATO, L -functions and Tamagawa numbers of motives, in: P. Cartier et al (eds.), *The Grothendieck festschrift*, vol.1, *Progr. Math.* **86**, Boston Basel Stuttgart, Birkhäuser, 1990, 333-400.
- [CT-R] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and W. RASKIND, Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres: Un théorème de finitude pour la torsion, *Invent. Math.* **105** (1991), 221-245.
- [D] P. DELIGNE, Valeurs de fonctions L et période d'intégrales, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, 313-346
- [F1] M. FLACH, Selmer groups for the symmetric square for an elliptic curve, Ph. D. Thesis, University of Cambridge, 1990.
- [F2] ———, A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve, *Invent. Math.* **109** (1992), 307-327.
- [L-R] A. LANGER and W. RASKIND, Torsion 0-cycles on the self-product of a CM elliptic curve, preprint.
- [L-S] A. LANGER and S. SAITO, Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve, *Duke Math. J.* **85** (1996), 315-357.

- [M] S. MILDENHALL, Cycles in a product of elliptic curves, and a group analogous to the class group, *Duke Math. J.* **67** (1992), 387-406.
- [N] J. NEKOVÁŘ, Beilinson's conjectures, in: U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre (eds.), *Motives*, Proc. Symp. Pure Math., AMS, vol. **55**, Part 1, 1994, 599-706.
- [O] N. OTSUBO, preprint.
- [Sai] 斎藤 秀司, 代数幾何と数論, 数理科学 **369**, 1994 年 3 月, 46-54.
- [Sal] P. SALBERGER, Torsion cycles of codimension 2 and l -adic realization of motivic cohomology, in: S. David (eds.), *Séminaire de théorie de nombres, Paris 1991-92*, Birkhäuser, Boston, 1993, 247-277.
- [Sc] P. SCHNEIDER, Introduction to the Beilinson conjectures, in: M. Rapoport, N. Schappacher, P. Schneider (eds.), *Beilinson's conjectures on Special Values of L -functions*, Perspectives in Mathematics **4**, Academic Press, Boston, 1988, 1-35.
- [W] A. WILES, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. of Math.* **141** (1995), 443-551.