

Durand-Kerner 法とその加速

愛媛大学大学院工学研究科 菅野 幸夫 (Sachio KANNO)
遼寧師範大学数学部 劉 文 (Weng LIU)
愛媛大学理学部 山本 哲朗 (Tetsuro YAMAMOTO)

1. はじめに

多項式 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ の全ての零点 α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ を同時に求める反復法

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \sigma_i^k, \quad \sigma_i^k = \frac{P(z_i^k)}{\prod_{j \neq i} (z_i^k - z_j^k)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (1.1)$$

を考える. この方法は Weierstrass [14] (1903), Durand [5] (1960), Dochev [4] (1962), Prešić [12] (1966), 等により独立に提案された. 1966 年, Kerner [9] は (1.1) が $P(z)$ の根と係数の関係による連立非線形方程式

$$f_i = (-1)^i \varphi_i(z_1, \dots, z_n) - a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

に適用した Newton 法であることを証明した. ここで, φ_i は第 i 番目の基本対称式:

$$\varphi_i = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_i}$$

を表す. よって, 反復 (1.1) は零点 α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ が単純のとき, 局所的に 2 次収束する.

以来, この方法の様々な変形が研究されてきた. (関連文献は [18] を参照.) なかでも次の方法は, いずれも 3 次収束する方法としてよく知られている:

$$(I) \quad z_i^{k+1} = z_i^k - \frac{1}{\frac{P'(z_i^k)}{P(z_i^k)} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i^k - z_j^k}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (1.2)$$

(Börsch-Supan [3], Ehrlich [6], Aberth [1], 他).

$$= z_i^k - \frac{\sigma_i^k}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{\sigma_j^k}{z_i^k - z_j^k}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0, \quad (1.3)$$

(Börsch-Supan [3], 他).

((1.2) と (1.3) の同値性が Werner [15] において証明されている.)

$$(II) \quad z_i^{k+1} = z_i^k - \sigma_i^k \left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{\sigma_j^k}{z_i^k - z_j^k} \right), \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (1.4)$$

(田辺 [13]).

$$(III) \quad z_i^{k+1} = z_i^k - \frac{P(z_i^k)}{\prod_{j \neq i} (z_i^k - z_j^{k+1, DK})}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0, \quad (1.5)$$

$$z_j^{k, DK} = z_j - \sigma_j^k$$

(Nourein [11]).

(1.3)-(1.5) は (1.1) の加速とみなすことができる。以下, Aberth [1], Nourein [11] にならい, 反復 (1.1), (1.5) をそれぞれ Durand-Kerner (D-K) 法, 改良 D-K 法と呼ぶ。本稿ではさらに, 反復 (1.1), (1.5) の SOR 型加速:

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \omega \frac{P(z_i^k)}{\prod_{j < i} (z_i^k - z_j^{k+1}) \prod_{j > i} (z_i^k - z_j^k)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0, \quad (1.6)$$

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \omega \frac{P(z_i^k)}{\prod_{j < i} (z_i^k - z_j^{k+1, DK}) \prod_{j > i} (z_i^k - z_j^k)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (1.7)$$

を考える。ここで ω は加速パラメータである。§2 において, SOR 型加速 (1.6) の収束性に関する定理を与え, §3 において, 数値例を示し, 最後に §4 で, SOR 型反復列の挙動について補足を加える。

2. SOR 型加速の収束性

反復 (1.6) の収束性に関して次の定理が証明できる。([8] 参照。)

定理 2.1. $0 < \omega < 2$ かつ, 零点 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ が単純のとき, 反復 (1.6) は局所的に収束する。

Alefeld-Herzberger [2] は, $\omega = 1$ (Gauss-Seidel 型反復) のとき, (1.6) の収束の R-order は, 少なくとも $\tau_n + 1 > 2$ であることを証明している。ここで, τ_n は方程式 $\tau^n - \tau - 1 = 0$ の唯一の正根である。定理 2.1 と同様の結果が反復 (1.7) に対しても成り立つ。

3. 数値例

例 3.1. 多項式 $P(z)$ は以下の単純根を持ち, その次数は 25 とする:

(0.98, 0.98)	(0.99, 0.98)	(1.00, 0.98)	(1.01, 0.98)	(1.02, 0.98)
(0.98, 0.99)	(0.99, 0.99)	(1.00, 0.99)	(1.01, 0.99)	(1.02, 0.99)
(0.98, 1.00)	(0.99, 1.00)	(1.00, 1.00)	(1.01, 1.00)	(1.02, 1.00)
(0.98, 1.01)	(0.99, 1.01)	(1.00, 1.01)	(1.01, 1.01)	(1.02, 1.01)
(0.98, 1.02)	(0.99, 1.02)	(1.00, 1.02)	(1.01, 1.02)	(1.02, 1.02).

ここで (x, y) は複素数 $x + \sqrt{-1}y$ を表す. Aberth の初期値

$$z_i^0 = \tilde{\alpha} + r_0 \exp(\sqrt{-1}\theta_i), \quad \tilde{\alpha} = -\frac{a_1}{n}, \quad r_0 = 0.2, \quad \theta_i = \frac{\pi}{n}(2i - \frac{3}{2}), \quad n = 25 \quad (3.1)$$

を用いた $P(z)$ に対する (1.1)-(1.7) の計算結果 (反復回数・CPU 時間) を表 1 に示す. (但し, $\tilde{\alpha}$ は $P(z)$ の 25 個の零点の重心を表す.) ここで, 反復の停止条件は

$$\|z^+ - z\| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 1.0\text{E} - 3, 1.0\text{E} - 7, 1.0\text{E} - 11$$

である. 但し, ノルムは $\|z\| = \max_i \max\{|\operatorname{Re} z_i|, |\operatorname{Im} z_i|\}$ を用いる. また, 反復列の挙動 ($\{z_i^k\}$, $k \leq 75$) を図 1-20 に示す.

表 1. 例 3.1, $P(z)$ に対する反復回数・計算時間 (-: >250 反復).

		$\varepsilon=1.0\text{E}-3$		$\varepsilon=1.0\text{E}-7$		$\varepsilon=1.0\text{E}-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		59	1607	104	2832	105	2859
Börsch-Supan (1.3)		30	1516	60	3033	60	3033
田辺 (1.4)		40	1950	87	4241	87	4241
Nourein (1.5)		38	1504	67	2652	68	2692
D-K -SOR (1.6)	$\omega = 0.8$	64	1810	80	2263	86	2432
	$\omega = 0.9$	65	1838	70	1980	74	2093
	$\omega = 1.0$	60	1697	65	1838	66	1867
	$\omega = 1.1$	56	1584	66	1867	70	1980
	$\omega = 1.2$	51	1442	60	1697	66	1867
	$\omega = 1.3$	49	1386	60	1697	68	1923
	$\omega = 1.4$	45	1273	65	1838	75	2121
	$\omega = 1.5$	45	1273	70	1980	83	2347
	$\omega = 1.6$	46	1301	119	3366	137	3875
	$\omega = 1.7$	48	1358	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	44	1244	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	41	1160	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	40	1131	-	-	-	-
Nourein -SOR (1.7)	$\omega = 0.8$	60	2421	69	2784	75	3027
	$\omega = 0.9$	53	2139	60	2421	64	2583
	$\omega = 1.0$	50	2018	56	2260	57	2300
	$\omega = 1.1$	48	1937	52	2098	56	2260
	$\omega = 1.2$	41	1655	48	1937	54	2179
	$\omega = 1.3$	41	1655	48	1937	56	2260
	$\omega = 1.4$	35	1412	59	2381	69	2784
	$\omega = 1.5$	37	1493	53	2139	66	2663
	$\omega = 1.6$	14	565	76	3067	94	3793
	$\omega = 1.7$	23	928	99	3995	125	5044
	$\omega = 1.8$	13	525	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	14	565	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

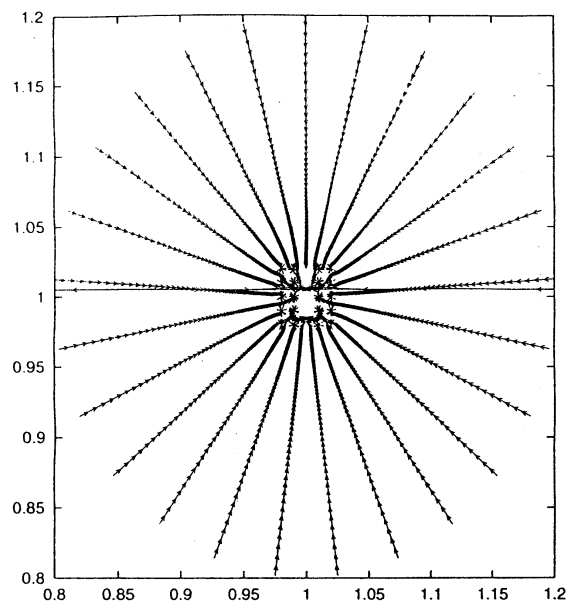


図 1. D-K (1.1).

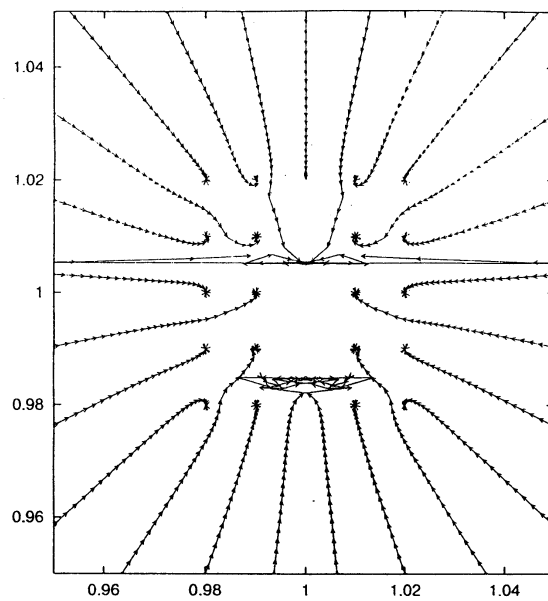


図 2. D-K (1.1) (拡大図).

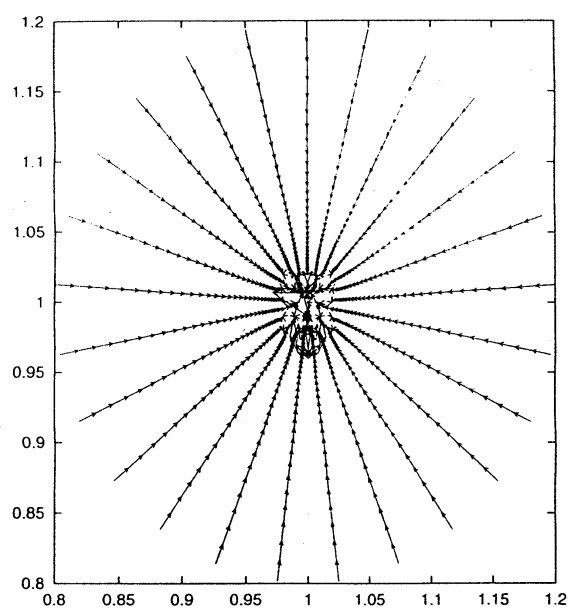


図 3. Börsch-Supan (1.3).

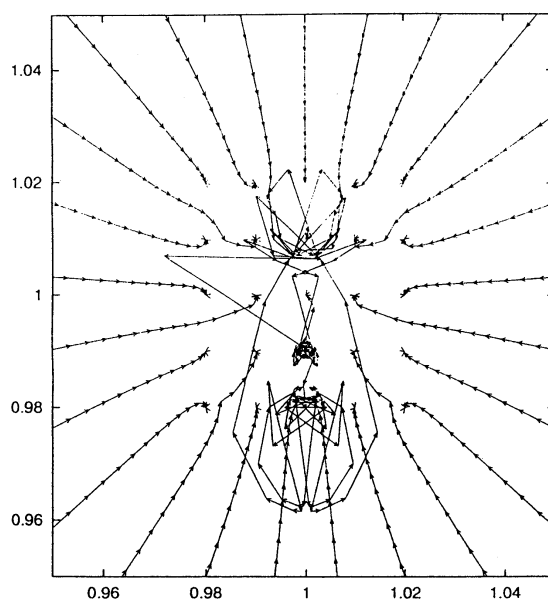


図 4. Börsch-Supan (1.3) (拡大図).

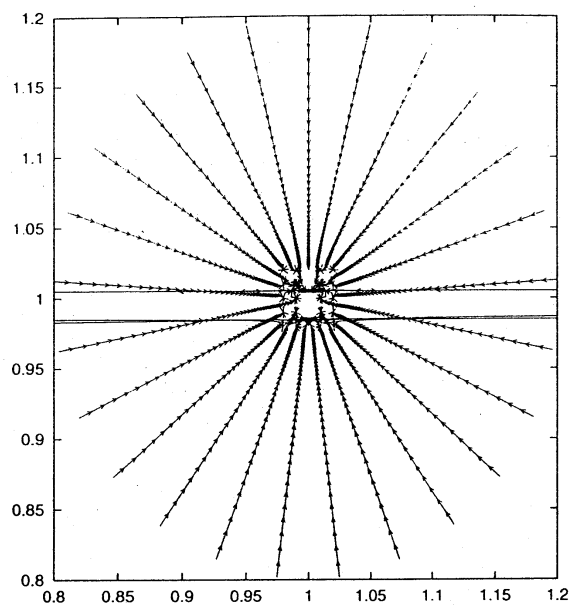


图 5. 田辺 (1.4).

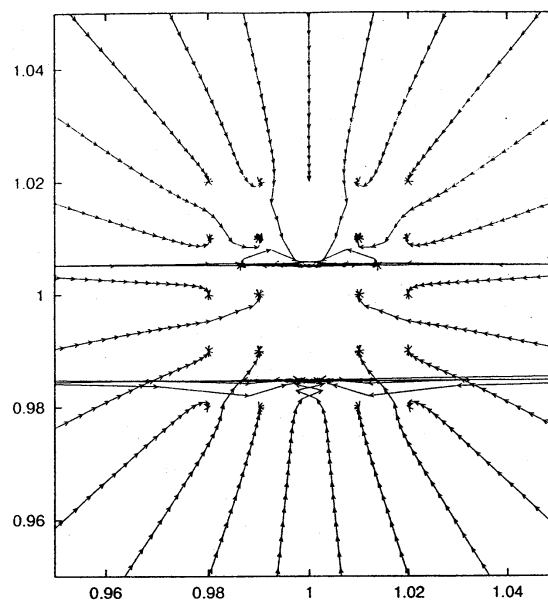


图 6. 田辺 (1.4) (拡大図).

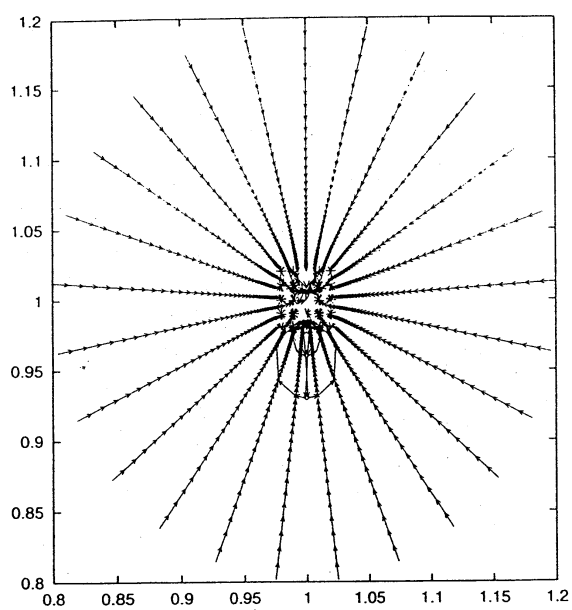


图 7. Norein (1.5).

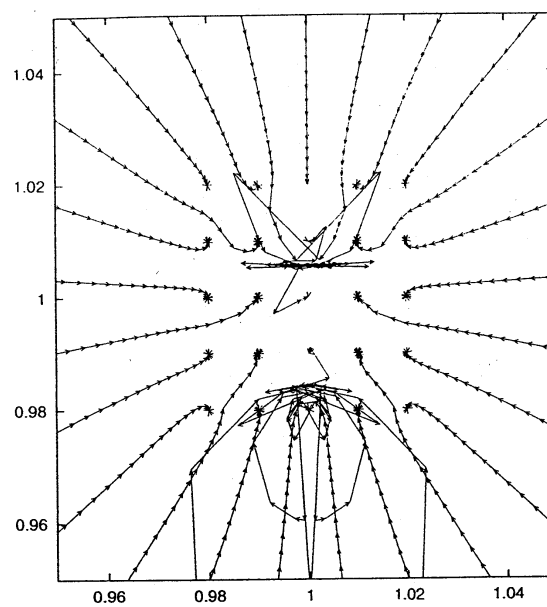


图 8. Norein (1.5) (拡大図).

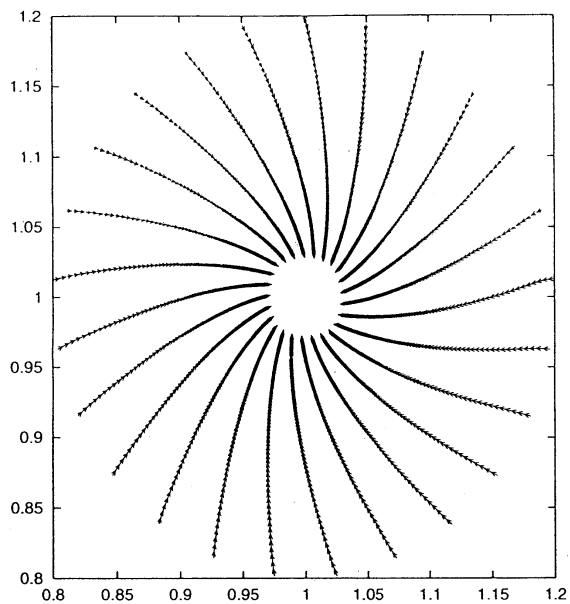


图 9. SOR (1.6), $\omega = 0.6$.

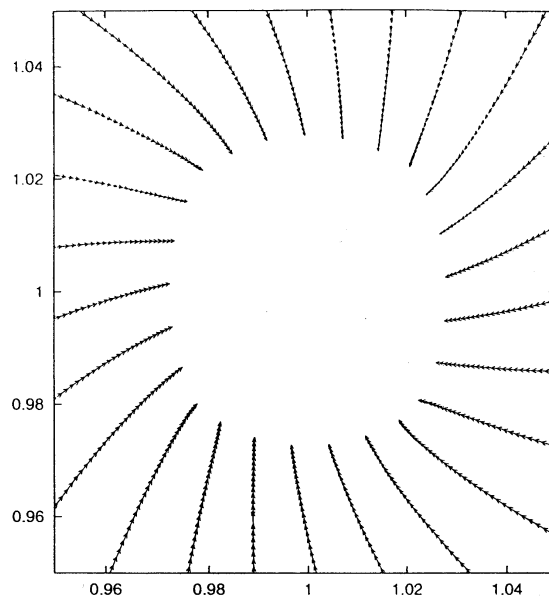


图 10. SOR (1.6), $\omega = 0.6$ (扩大图).

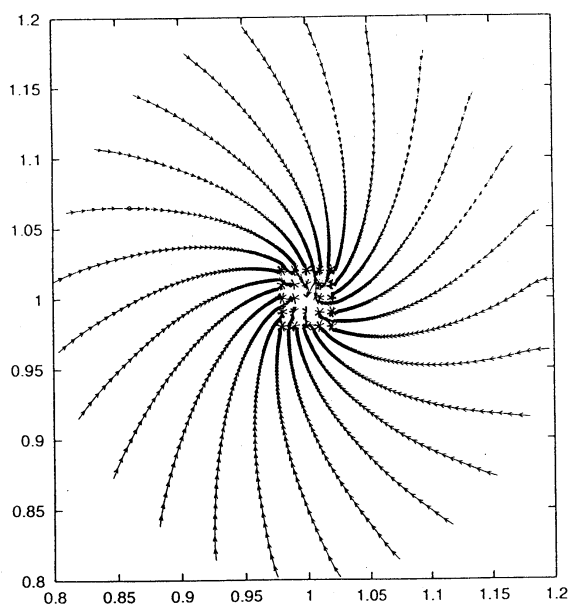


图 11. SOR (1.6), $\omega = 1.0$.

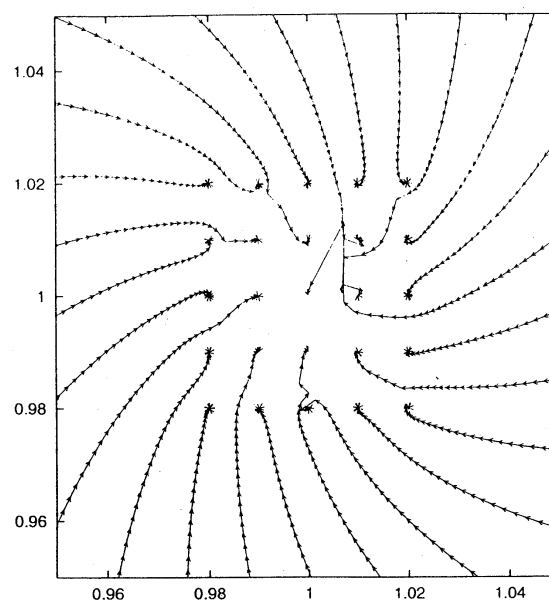


图 12. SOR (1.6), $\omega = 1.0$ (扩大图).

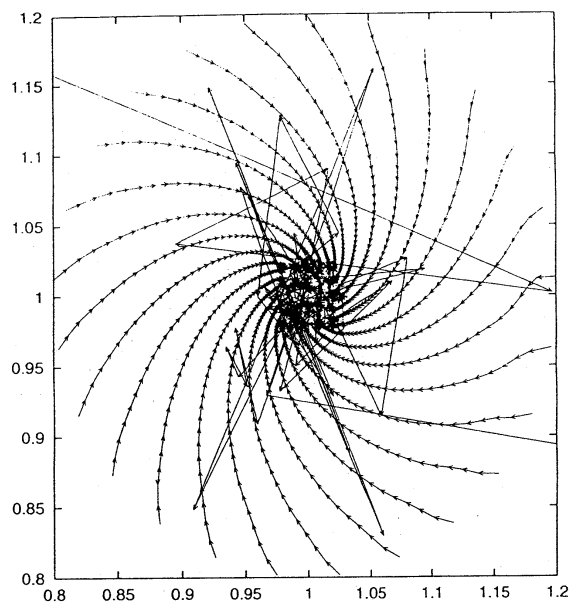


图 13. SOR (1.6), $\omega = 1.8$.

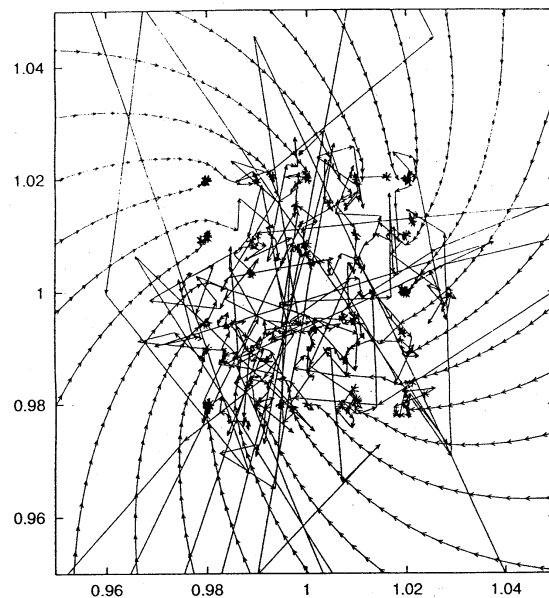


图 14. SOR (1.6), $\omega = 1.8$ (拡大図).

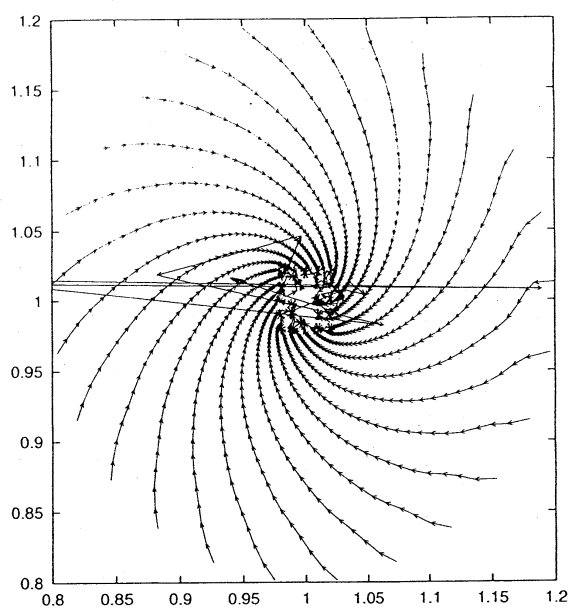


图 15. SOR (1.6), $\omega = 2.0$.

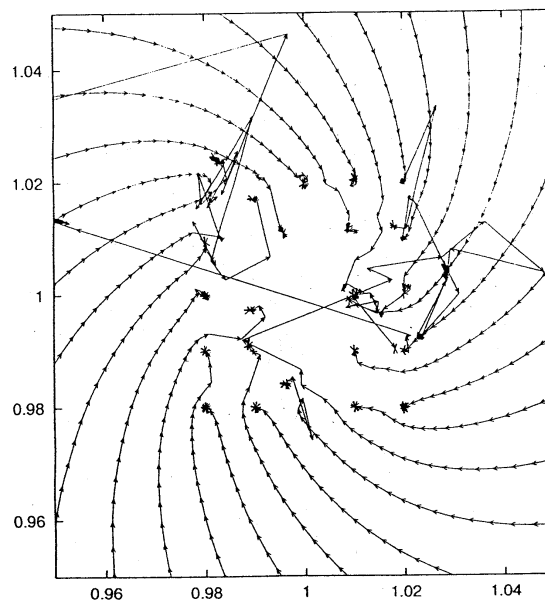


图 16. SOR (1.6), $\omega = 2.0$ (拡大図).

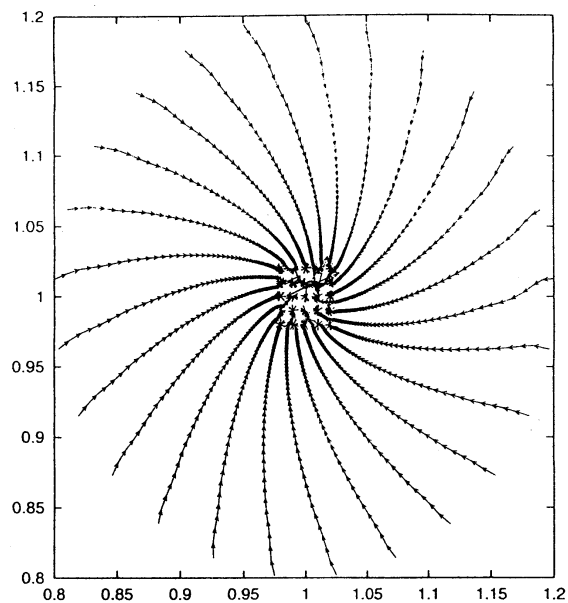


図 17. SOR (1.7), $\omega = 1.0$.

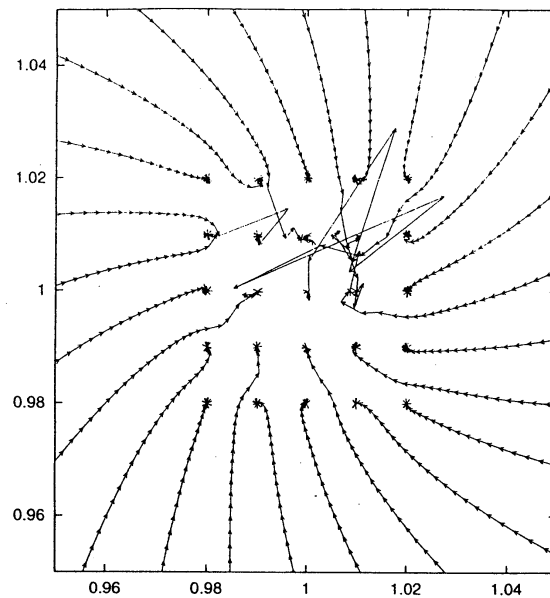


図 18. SOR (1.7), $\omega = 1.0$ (拡大図).

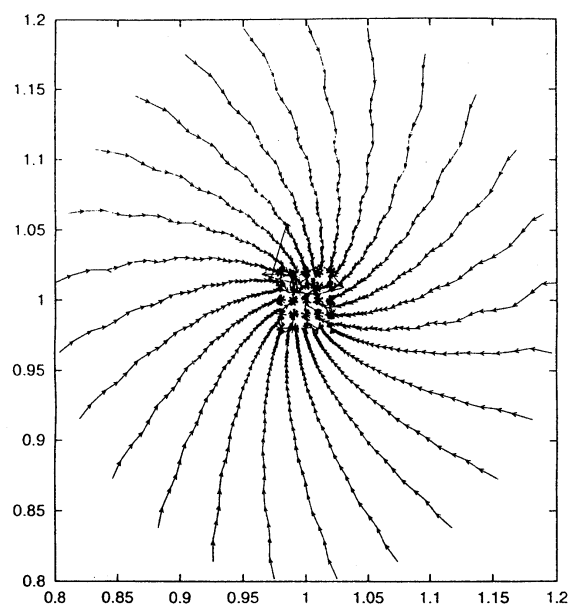


図 19. SOR (1.7), $\omega = 1.4$.

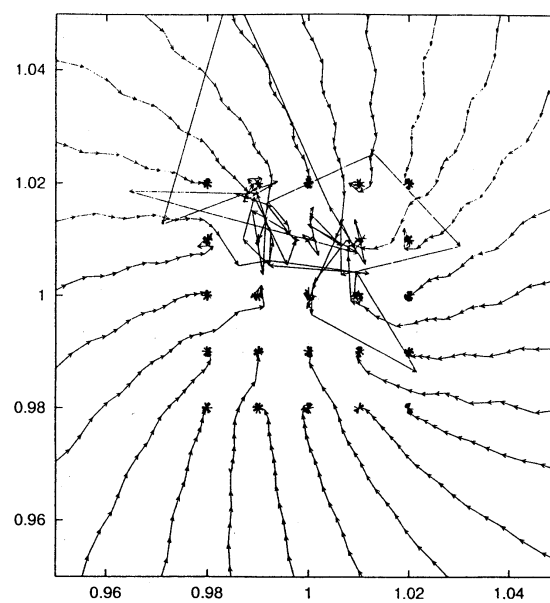


図 20. SOR (1.7), $\omega = 1.4$ (拡大図).

例 3.2. 8 個の零点 $\alpha_i = \xi_i + \eta_i \sqrt{-1}$, $i = 1, 2, \dots, 8$ を与えて, 8 次多項式 $P(z)$ を数式処理により生成する. すなわち,

$$P(z) = \text{Expand} \left[\prod_{i=1}^8 (z - \alpha_i) \right].$$

このように, 12 個の 8 次多項式 $P_{11}-P_{34}$ を以下の零点を持つように作る:

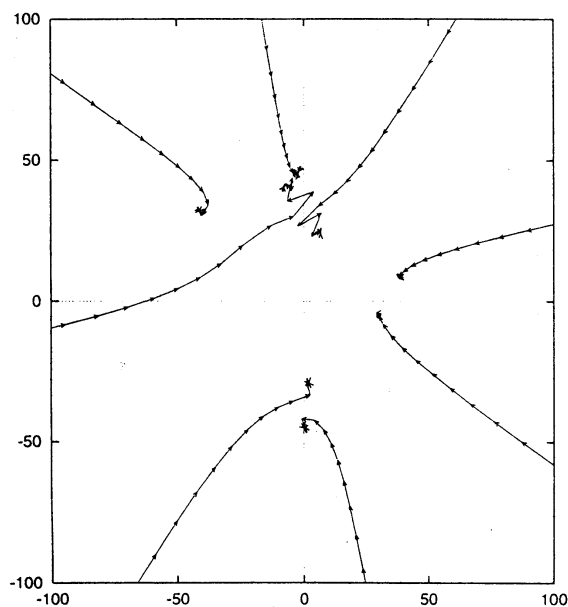
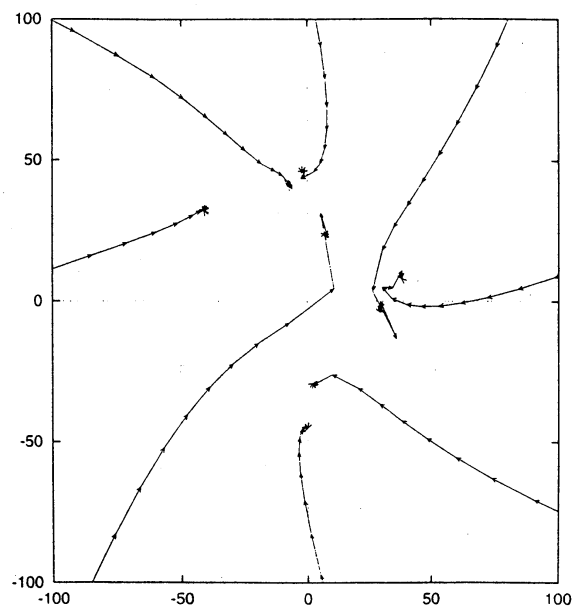
P_{11}	(-41, 32) (2, -29)	(-8, 41) (7, 24)	(-2, 46) (29, -4)	(0, -45) (38, 8),
P_{12}	(-27, -25) (25, 18)	(-21, 47) (30, -50)	(-4, -29) (35, 1)	(11, -21) (46, -28),
P_{13}	(-34, 6) (-5, -33)	(-20, 16) (-5, 3)	(-16, 16) (42, 24)	(-5, -35) (42, 46),
P_{14}	(-38, -20) (20, -4)	(-21, -44) (24, -26)	(-15, 5) (27, 13)	(-13, -40) (35, 38),
P_{21}	(-44, -7) (10, -22)	(-35, 7) (38, -27)	(-26, 28) (40, 31)	(-10, -15) (40, 31),
P_{22}	(-38, -10) (26, 42)	(-7, 45) (36, 0)	(-1, -11) (48, -22)	(21, -45) (48, -22),
P_{23}	(-3, -24) (32, 17)	(9, -47) (40, 29)	(26, -21) (42, 36)	(32, -40) (42, 36),
P_{24}	(-50, -14) (22, -9)	(-35, 25) (34, 31)	(-10, -11) (47, -7)	(2, -41) (47, -7),
P_{31}	(-40, 46) (6, 30)	(-28, 39) (43, -44)	(-24, -36) (43, -44)	(-4, 9) (43, -44),
P_{32}	(-49, -23) (3, -13)	(-48, -29) (4, 23)	(-35, -10) (4, 23)	(-33, 47) (4, 23),
P_{33}	(-43, -30) (29, -18)	(-17, 22) (46, -26)	(20, -41) (46, -26)	(27, 42) (46, -26),
P_{34}	(-35, -14) (12, 2)	(-8, -17) (12, 48)	(-6, 4) (12, 48)	(11, 20) (12, 48).

ここで, (ξ, η) は複素数 $\xi + \sqrt{-1}\eta$ を表す. $P_{11}-P_{14}$ は重根を持たないが, $P_{21}-P_{24}$, $P_{31}-P_{34}$ はそれぞれ 2 重根, 3 重根を持つことに注意.

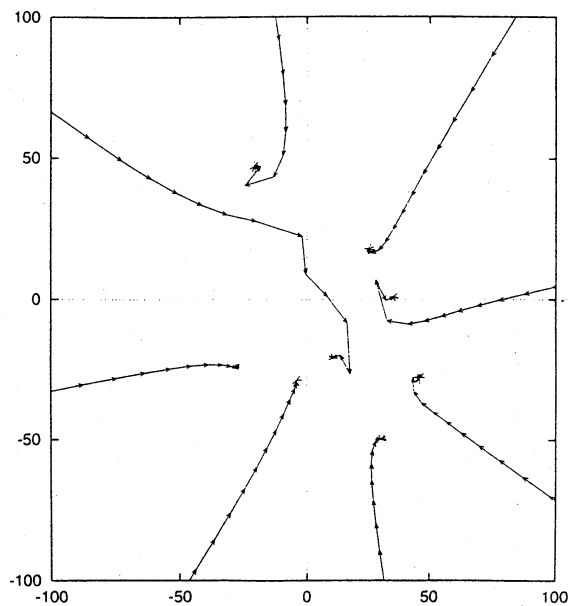
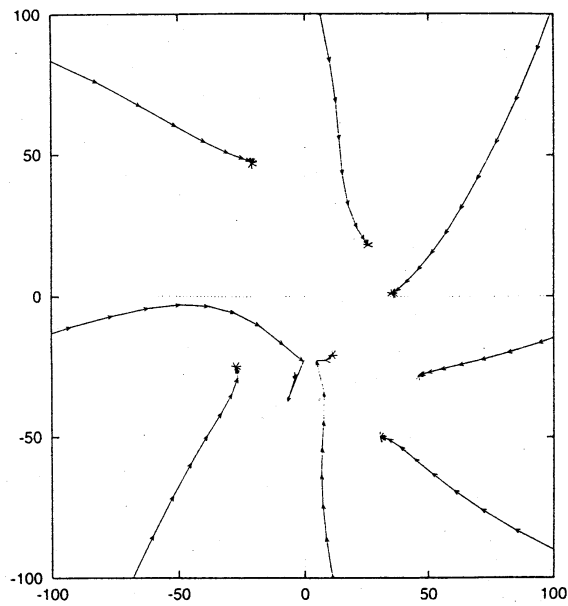
$P_{11}-P_{34}$ に対する反復 (1.1)-(1.7) の Aberth の初期値 (3.1) ($r_0 = 200$) を用いた計算結果 (反復回数・CPU 時間) を表 2-13 に示す. ここで, 反復の停止条件は

$$\|z^+ - z\| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 1.0\text{E} - 3, 1.0\text{E} - 7, 1.0\text{E} - 11$$

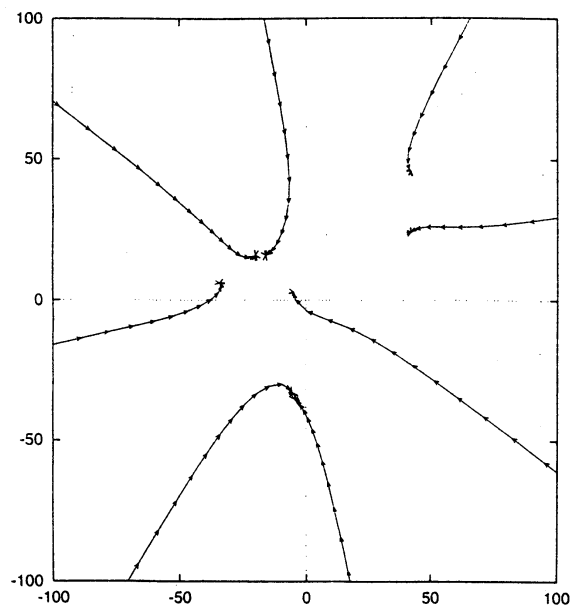
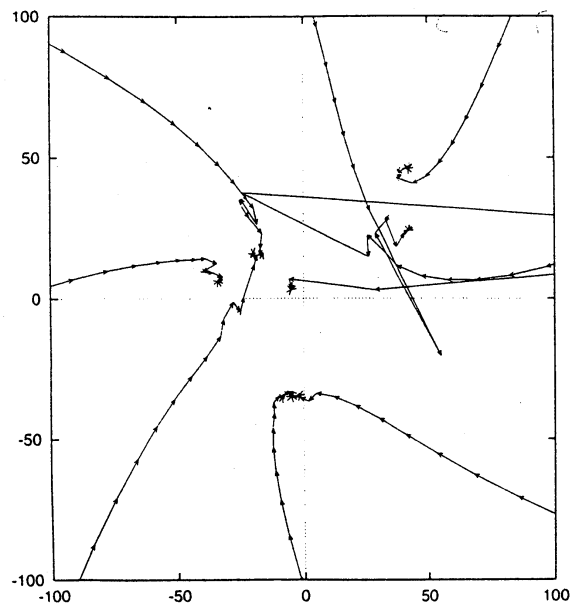
である. 但し, ノルムは $\|z\| = \max_i \max\{|\text{Re } z_i|, |\text{Im } z_i|\}$ を用いる. また, 各多項式に対する D-K 反復 (1.1), SOR 型反復 (1.6) ($\omega = 1.0$) の近似解の挙動 ($\{z_i^k\}$, $k \leq 25$) を図 21-44 に示す. 表 2-13 によれば, すべての例で, 3 次収束法 (1.3)-(1.5) のなかでは, 反復回数は (1.3), (1.5), (1.4) の順で少ないが, 計算時間は (1.3) が最小であり, 以下 (1.5), (1.4) の順になっている.

図 21. P_{11} に対する D-K 反復図 22. P_{11} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 2. P_{11} に対する反復回数・計算時間 ($\omega > 250$ 反復).

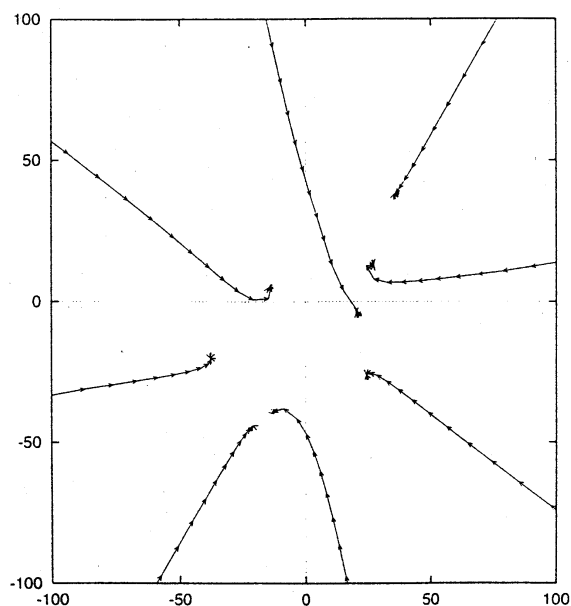
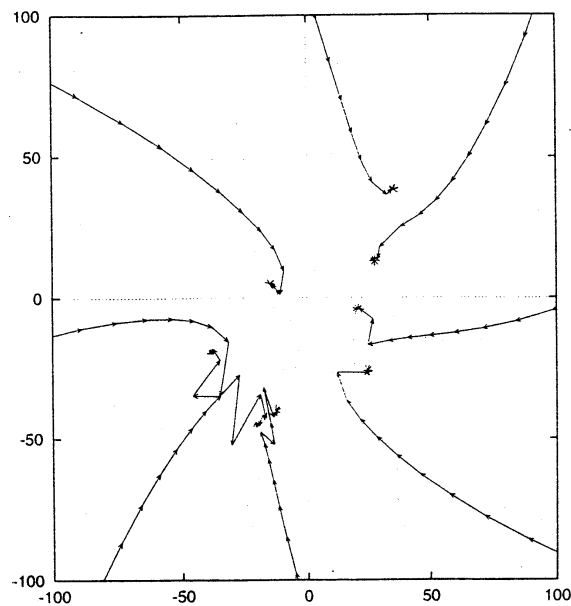
		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		22	72	23	75	24	79
Börsch-Supan (1.3)		13	74	13	74	14	80
田辺 (1.4)		15	84	16	90	16	90
Nourein (1.5)		14	66	15	71	15	71
D-K	$\omega = 0.8$	22	72	27	89	33	109
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	19	63	23	76	27	89
	$\omega = 1.0$	17	56	18	59	18	59
	$\omega = 1.1$	16	53	20	66	24	79
	$\omega = 1.2$	17	56	23	76	29	95
	$\omega = 1.3$	23	76	31	102	38	125
	$\omega = 1.4$	18	59	28	92	39	128
	$\omega = 1.5$	51	168	65	214	78	257
	$\omega = 1.6$	58	191	76	250	94	309
	$\omega = 1.7$	65	214	91	299	117	385
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	20	95	25	119	31	147
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	17	81	21	100	25	119
	$\omega = 1.0$	14	67	15	71	16	76
	$\omega = 1.1$	15	71	19	90	23	109
	$\omega = 1.2$	17	81	22	105	28	133
	$\omega = 1.3$	19	90	27	128	34	162
	$\omega = 1.4$	23	109	33	157	43	204
	$\omega = 1.5$	33	157	46	219	59	281
	$\omega = 1.6$	32	152	50	238	68	323
	$\omega = 1.7$	56	266	81	385	107	509
	$\omega = 1.8$	69	328	111	528	152	723
	$\omega = 1.9$	143	680	230	1094	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 23. P_{12} に対する D-K 反復図 24. P_{12} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 3. P_{12} に対する反復回数・計算時間 (-:>250 反復).

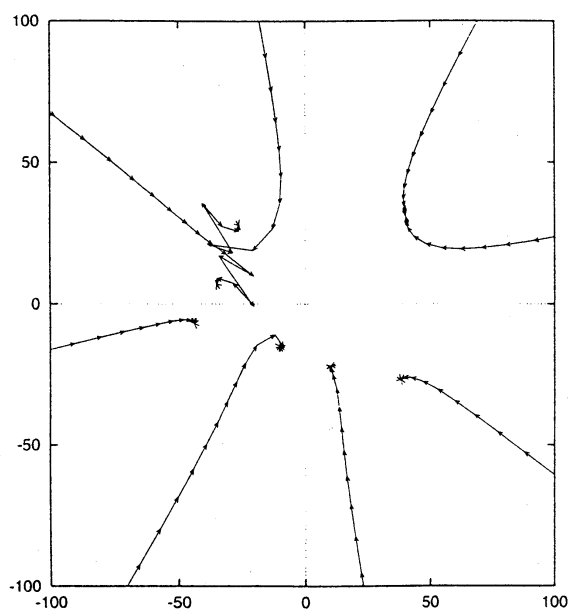
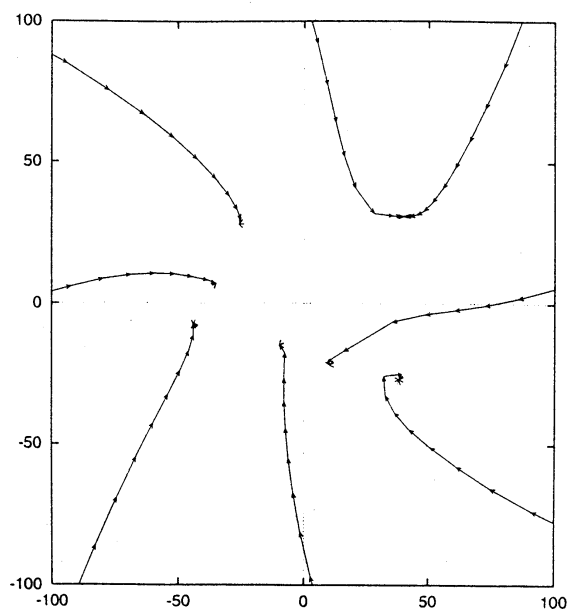
		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		19	62	20	66	20	66
Börsch-Supan (1.3)		12	68	12	68	13	74
田辺 (1.4)		13	73	14	79	14	79
Nourein (1.5)		13	61	13	61	14	66
D-K	$\omega = 0.8$	22	72	28	92	34	112
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	17	56	21	69	25	82
	$\omega = 1.0$	16	53	17	56	17	56
	$\omega = 1.1$	15	49	19	63	23	76
	$\omega = 1.2$	15	49	21	69	26	86
	$\omega = 1.3$	20	66	27	89	35	115
	$\omega = 1.4$	32	105	42	138	52	171
	$\omega = 1.5$	29	95	43	141	56	184
	$\omega = 1.6$	120	395	138	454	156	513
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	104	342	191	628	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	22	105	27	128	33	157
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	18	86	22	105	26	124
	$\omega = 1.0$	19	90	20	95	21	100
	$\omega = 1.1$	17	81	21	100	25	119
	$\omega = 1.2$	18	86	24	114	30	143
	$\omega = 1.3$	20	95	27	128	35	166
	$\omega = 1.4$	30	143	40	190	50	238
	$\omega = 1.5$	26	124	39	185	53	252
	$\omega = 1.6$	45	214	63	300	81	385
	$\omega = 1.7$	73	347	99	471	125	594
	$\omega = 1.8$	59	281	100	476	141	670
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 25. P_{13} に対する D-K 反復図 26. P_{13} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 4. P_{13} に対する反復回数・計算時間 ($\therefore > 250$ 反復).

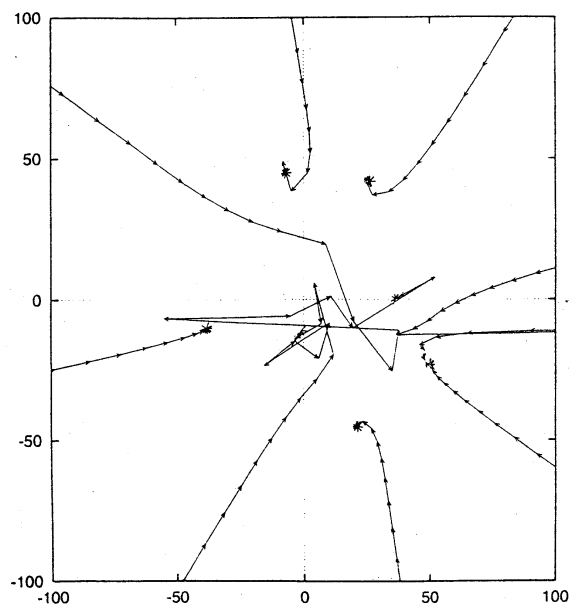
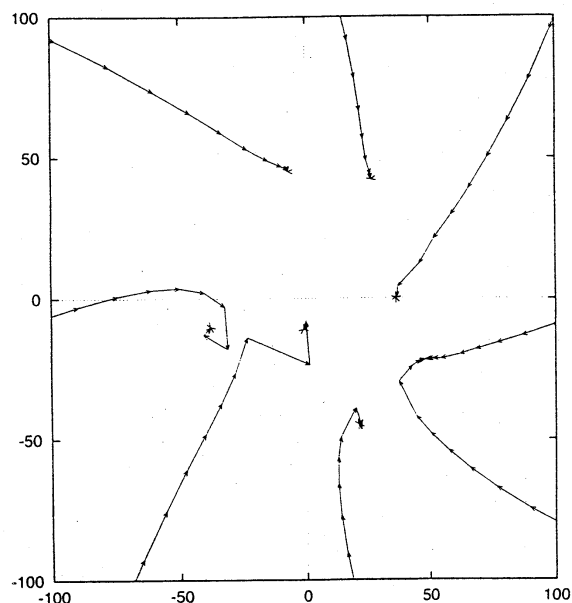
		$\epsilon=1.0E-3$		$\epsilon=1.0E-7$		$\epsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		20	66	21	69	21	69
Börsch-Supan (1.3)		11	63	12	68	12	68
田辺 (1.4)		14	79	14	79	15	84
Nourein (1.5)		13	61	13	61	14	66
D-K	$\omega = 0.8$	24	79	29	95	35	115
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	21	69	25	82	29	95
	$\omega = 1.0$	21	69	21	69	22	72
	$\omega = 1.1$	17	56	21	69	25	82
	$\omega = 1.2$	18	59	24	79	29	95
	$\omega = 1.3$	18	59	25	82	33	109
	$\omega = 1.4$	20	66	30	99	40	132
	$\omega = 1.5$	30	99	43	141	56	184
	$\omega = 1.6$	39	128	57	188	75	247
	$\omega = 1.7$	36	118	61	201	87	286
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	22	105	28	133	34	162
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	23	109	27	128	31	147
	$\omega = 1.0$	18	86	18	86	19	90
	$\omega = 1.1$	19	90	23	109	27	128
	$\omega = 1.2$	18	86	24	114	30	143
	$\omega = 1.3$	18	86	25	119	33	157
	$\omega = 1.4$	19	90	29	138	39	185
	$\omega = 1.5$	27	128	40	190	53	252
	$\omega = 1.6$	29	138	47	223	65	309
	$\omega = 1.7$	38	181	64	304	90	428
	$\omega = 1.8$	72	342	113	537	155	737
	$\omega = 1.9$	143	680	231	1098	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 27. P_{14} に対する D-K 反復図 28. P_{14} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 5. P_{14} に対する反復回数・計算時間 ($\cdot$: >250 反復).

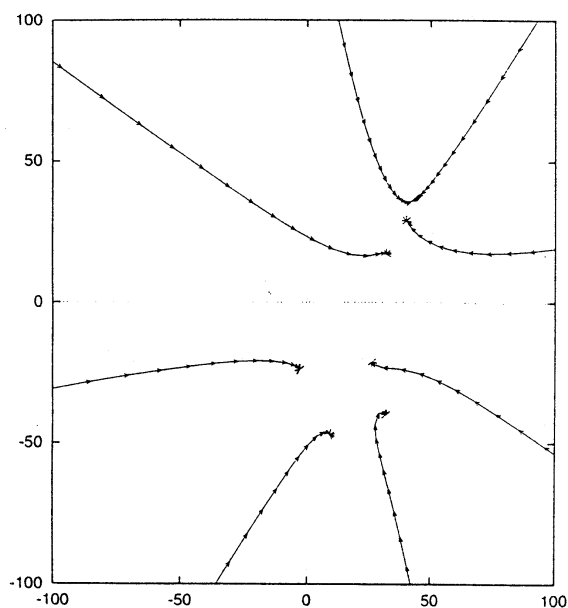
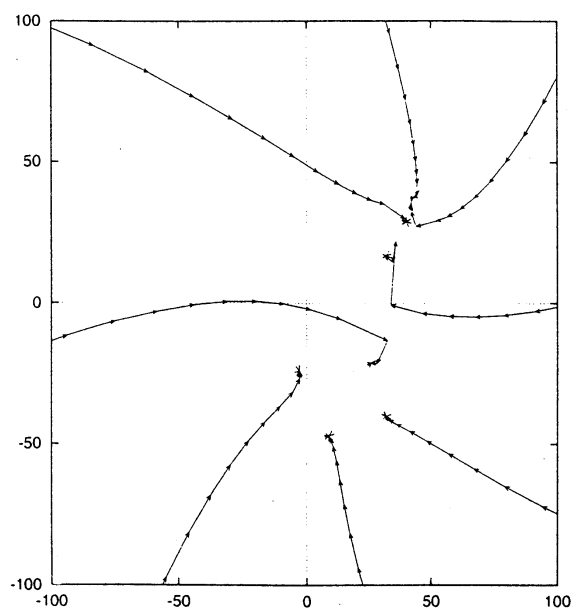
		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		17	56	19	62	19	62
Börsch-Supan (1.3)		10	57	11	63	11	63
田辺 (1.4)		12	67	13	73	13	73
Nourein (1.5)		11	52	12	57	12	57
D-K	$\omega = 0.8$	22	72	28	92	34	112
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	18	59	22	72	26	86
	$\omega = 1.0$	18	59	19	63	20	66
	$\omega = 1.1$	22	72	26	86	30	99
	$\omega = 1.2$	18	59	24	79	29	95
	$\omega = 1.3$	18	59	25	82	33	109
	$\omega = 1.4$	21	69	31	102	41	135
	$\omega = 1.5$	23	76	37	122	50	164
	$\omega = 1.6$	28	92	46	151	64	211
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	20	95	26	124	31	147
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	16	76	20	95	24	114
	$\omega = 1.0$	14	67	15	71	16	76
	$\omega = 1.1$	15	71	19	90	23	109
	$\omega = 1.2$	16	76	21	100	27	128
	$\omega = 1.3$	17	81	25	119	33	157
	$\omega = 1.4$	19	90	29	138	39	185
	$\omega = 1.5$	25	119	38	181	51	243
	$\omega = 1.6$	38	181	56	266	74	352
	$\omega = 1.7$	57	271	82	390	108	514
	$\omega = 1.8$	59	281	101	480	142	675
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 29. P_{21} に対する D-K 反復図 30. P_{21} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 6. P_{21} に対する反復回数・計算時間 ($\epsilon > 250$ 反復).

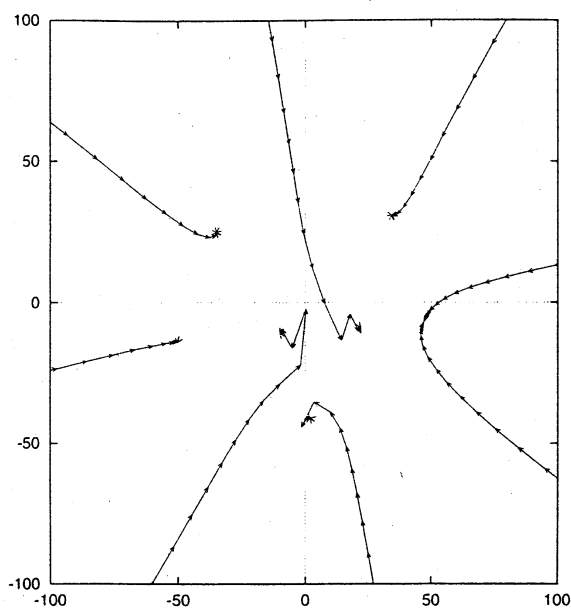
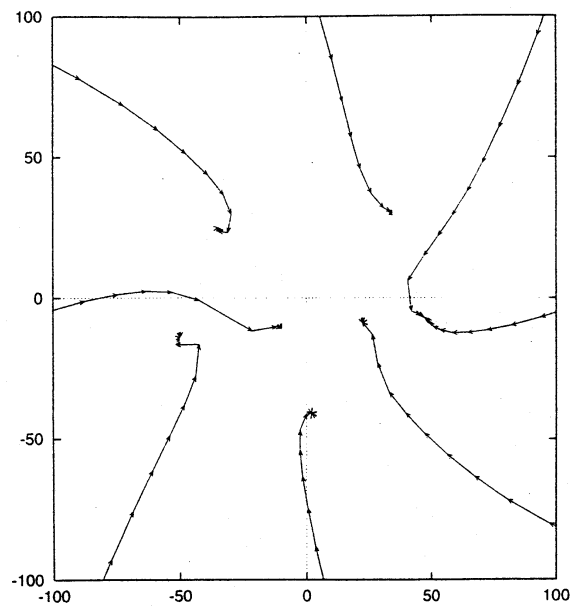
		$\epsilon=1.0E-3$		$\epsilon=1.0E-7$		$\epsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		23	75	36	118	-	-
Börsch-Supan (1.3)		13	74	22	126	-	-
田辺 (1.4)		18	101	28	157	-	-
Nourein (1.5)		16	76	25	118	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	28	92	45	148	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	23	76	36	118	-	-
	$\omega = 1.0$	20	66	30	99	-	-
	$\omega = 1.1$	19	63	28	92	-	-
	$\omega = 1.2$	16	53	22	72	-	-
	$\omega = 1.3$	18	59	26	86	-	-
	$\omega = 1.4$	25	82	43	141	-	-
	$\omega = 1.5$	61	201	89	293	-	-
	$\omega = 1.6$	44	145	153	503	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	30	143	46	219	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	23	109	34	162	-	-
	$\omega = 1.0$	24	114	34	162	-	-
	$\omega = 1.1$	28	133	35	166	-	-
	$\omega = 1.2$	19	90	25	119	-	-
	$\omega = 1.3$	21	100	29	138	-	-
	$\omega = 1.4$	23	109	33	157	-	-
	$\omega = 1.5$	31	147	44	209	-	-
	$\omega = 1.6$	34	162	58	276	-	-
	$\omega = 1.7$	57	271	83	395	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	167	794	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 31. P_{22} に対する D-K 反復図 32. P_{22} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 7. P_{22} に対する反復回数・計算時間 (:->250 反復).

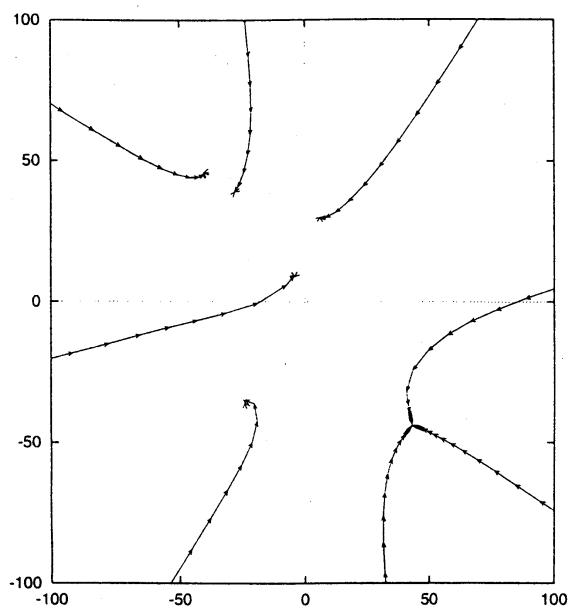
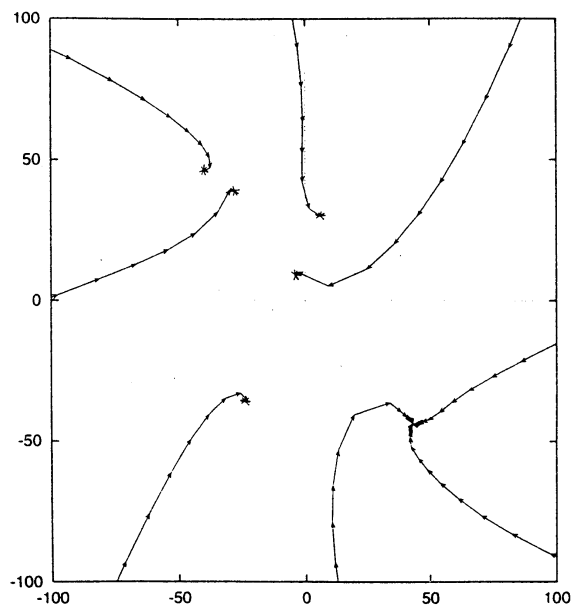
		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		31	102	43	141	223	731
Börsch-Supan (1.3)		15	86	23	131	-	-
田辺 (1.4)		19	107	35	197	-	-
Nourein (1.5)		17	80	24	113	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	28	92	50	164	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	24	79	36	118	-	-
	$\omega = 1.0$	20	66	38	125	-	-
	$\omega = 1.1$	18	59	32	105	-	-
	$\omega = 1.2$	20	66	28	92	-	-
	$\omega = 1.3$	24	79	32	105	-	-
	$\omega = 1.4$	24	79	67	220	-	-
	$\omega = 1.5$	71	234	110	362	-	-
	$\omega = 1.6$	63	207	110	362	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	25	119	38	181	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	22	105	36	171	-	-
	$\omega = 1.0$	19	90	55	262	-	-
	$\omega = 1.1$	17	81	24	114	-	-
	$\omega = 1.2$	15	71	23	109	-	-
	$\omega = 1.3$	16	76	24	114	-	-
	$\omega = 1.4$	17	81	54	257	-	-
	$\omega = 1.5$	20	95	34	162	-	-
	$\omega = 1.6$	25	119	45	214	-	-
	$\omega = 1.7$	34	162	65	309	-	-
	$\omega = 1.8$	48	228	89	423	-	-
	$\omega = 1.9$	105	499	187	889	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 33. P_{23} に対する D-K 反復図 34. P_{23} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 8. P_{23} に対する反復回数・計算時間 ($\therefore > 250$ 反復).

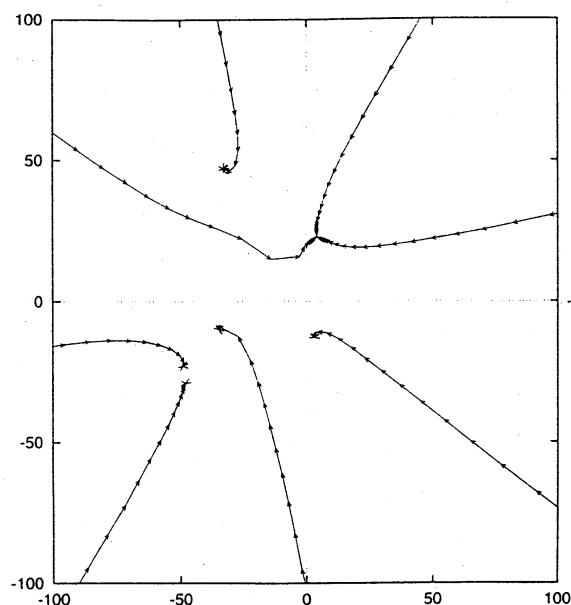
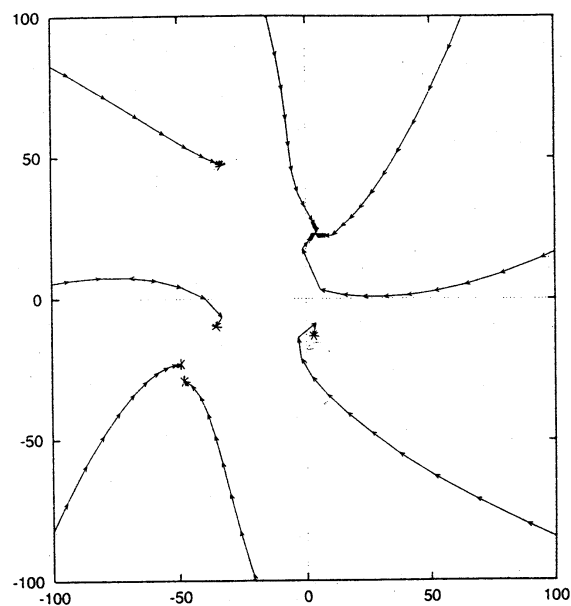
		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		28	92	125	410	-	-
Börsch-Supan (1.3)		16	91	62	354	-	-
田辺 (1.4)		19	107	88	495	-	-
Nourein (1.5)		18	85	77	363	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	24	79	124	408	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	26	86	75	247	-	-
	$\omega = 1.0$	21	69	140	461	-	-
	$\omega = 1.1$	21	69	78	257	-	-
	$\omega = 1.2$	16	53	87	286	-	-
	$\omega = 1.3$	17	56	140	461	-	-
	$\omega = 1.4$	26	86	85	280	-	-
	$\omega = 1.5$	36	118	86	283	-	-
	$\omega = 1.6$	48	158	74	243	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	29	138	99	471	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	22	105	46	219	-	-
	$\omega = 1.0$	20	95	101	480	-	-
	$\omega = 1.1$	17	81	113	537	-	-
	$\omega = 1.2$	19	90	58	276	-	-
	$\omega = 1.3$	22	105	98	466	-	-
	$\omega = 1.4$	23	109	33	157	-	-
	$\omega = 1.5$	39	185	94	447	-	-
	$\omega = 1.6$	38	181	96	456	-	-
	$\omega = 1.7$	49	233	95	452	-	-
	$\omega = 1.8$	81	385	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	122	580	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 35. P_{24} に対する D-K 反復図 36. P_{24} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 9. P_{24} に対する反復回数・計算時間 ($\therefore > 250$ 反復).

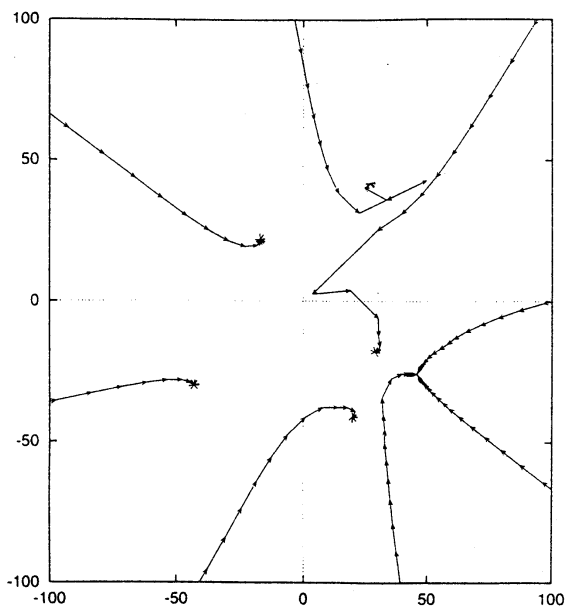
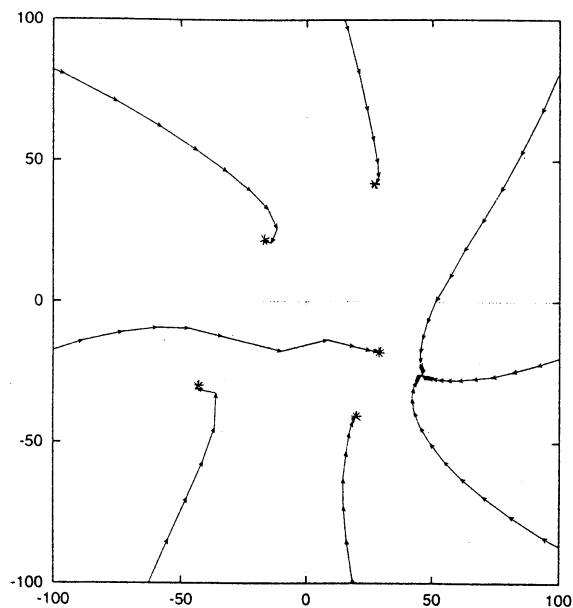
		$\epsilon=1.0E-3$		$\epsilon=1.0E-7$		$\epsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		25	82	41	134	-	-
Börsch-Supan (1.3)		14	80	22	126	103	588
田辺 (1.4)		19	107	27	152	-	-
Nourein (1.5)		16	76	24	113	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	27	89	45	148	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	26	86	37	122	226	744
	$\omega = 1.0$	21	69	31	102	-	-
	$\omega = 1.1$	17	56	28	92	-	-
	$\omega = 1.2$	19	63	33	109	-	-
	$\omega = 1.3$	22	72	33	109	235	773
	$\omega = 1.4$	20	66	43	141	-	-
	$\omega = 1.5$	41	135	111	365	-	-
	$\omega = 1.6$	35	115	72	237	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	27	128	40	190	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	26	124	40	190	-	-
	$\omega = 1.0$	21	100	33	157	-	-
	$\omega = 1.1$	21	100	36	171	-	-
	$\omega = 1.2$	15	71	25	119	-	-
	$\omega = 1.3$	23	109	36	171	-	-
	$\omega = 1.4$	19	90	35	166	-	-
	$\omega = 1.5$	36	171	71	338	-	-
	$\omega = 1.6$	31	147	47	223	-	-
	$\omega = 1.7$	39	185	65	309	-	-
	$\omega = 1.8$	57	271	99	471	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 37. P_{31} に対する D-K 反復図 38. P_{31} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 10. P_{31} に対する反復回数・計算時間 ($\therefore > 250$ 反復).

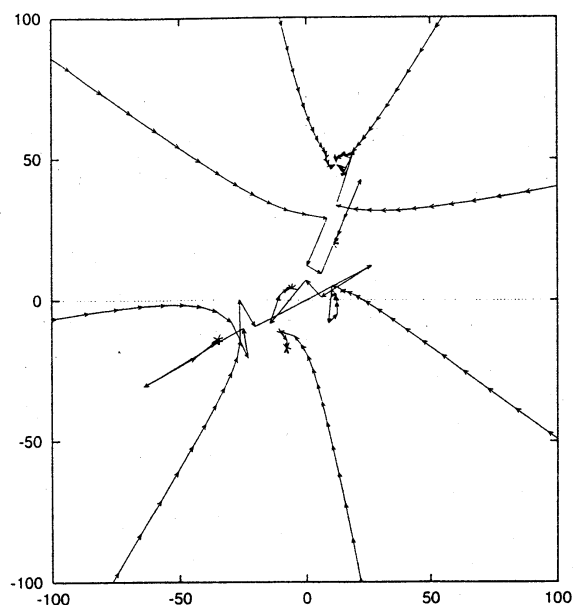
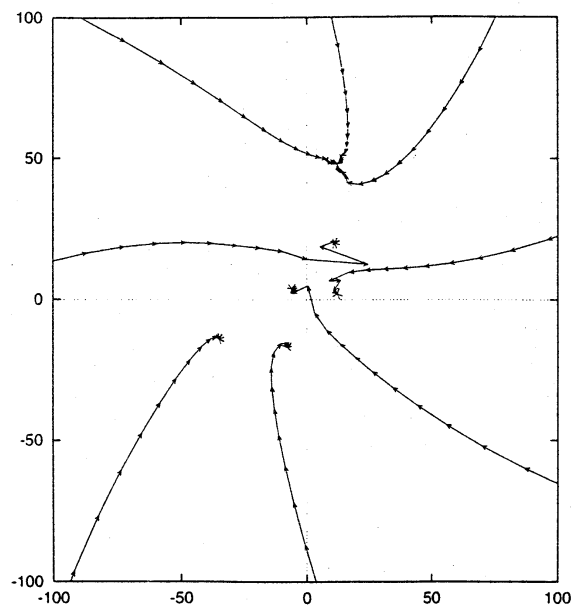
		$\epsilon=1.0E-3$		$\epsilon=1.0E-7$		$\epsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		32	105	-	-	-	-
Börsch-Supan (1.3)		19	108	-	-	-	-
田辺 (1.4)		22	124	108	607	-	-
Nourein (1.5)		21	99	115	543	-	-
D-K -SOR (1.6)	$\omega = 0.8$	35	115	-	-	-	-
	$\omega = 0.9$	30	99	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	26	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	22	72	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	22	72	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	26	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	19	63	242	796	-	-
	$\omega = 1.5$	23	76	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	51	168	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	58	191	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein -SOR (1.7)	$\omega = 0.8$	31	147	-	-	-	-
	$\omega = 0.9$	28	133	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	24	114	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	22	105	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	21	100	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	24	114	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	20	95	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	29	138	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	35	166	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 39. P_{32} に対する D-K 反復図 40. P_{32} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 11. P_{32} に対する反復回数・計算時間 ($\cdot$: >250 反復).

		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		35	115	-	-	-	-
Börsch-Supan (1.3)		20	114	-	-	-	-
田辺 (1.4)		24	135	-	-	-	-
Nourein (1.5)		23	109	113	533	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	38	125	-	-	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	32	105	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	28	92	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	25	82	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	24	79	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	20	66	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	19	63	230	757	230	757
	$\omega = 1.5$	29	95	138	454	211	694
	$\omega = 1.6$	56	184	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	35	166	225	1070	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	31	147	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	27	128	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	24	114	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	22	105	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	21	100	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	18	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	23	109	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	30	143	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	38	181	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	55	262	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	124	590	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 41. P_{33} に対する D-K 反復図 42. P_{33} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 12. P_{33} に対する反復回数・計算時間 ($\cdot$: >250 反復).

		$\epsilon=1.0E-3$		$\epsilon=1.0E-7$		$\epsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		36	118	-	-	-	-
Börsch-Supan (1.3)		21	120	-	-	-	-
田辺 (1.4)		25	141	-	-	-	-
Nourein (1.5)		23	109	-	-	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	38	125	-	-	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	33	109	240	790	-	-
	$\omega = 1.0$	27	89	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	24	79	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	24	79	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	22	72	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	22	72	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	58	191	193	635	193	635
	$\omega = 1.6$	41	135	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	35	115	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	35	166	-	-	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	31	147	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	28	133	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	25	119	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	22	105	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	21	100	158	751	158	751
	$\omega = 1.4$	18	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	28	133	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	28	133	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	35	166	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	63	300	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	112	533	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

図 43. P_{34} に対する D-K 反復図 44. P_{34} に対する SOR 反復 ($\omega = 1.0$)表 13. P_{34} に対する反復回数・計算時間 (-: >250 反復).

		$\varepsilon=1.0E-3$		$\varepsilon=1.0E-7$		$\varepsilon=1.0E-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K (1.1)		37	121	-	-	-	-
Börsch-Supan (1.3)		21	120	-	-	-	-
田辺 (1.4)		30	169	-	-	-	-
Nourein (1.5)		26	123	87	411	-	-
D-K	$\omega = 0.8$	37	122	-	-	-	-
-SOR (1.6)	$\omega = 0.9$	33	109	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	29	95	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	25	82	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	26	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	21	69	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	33	109	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	23	76	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	38	125	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	-	-	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-
Nourein	$\omega = 0.8$	35	166	-	-	-	-
-SOR (1.7)	$\omega = 0.9$	31	147	-	-	-	-
	$\omega = 1.0$	27	128	-	-	-	-
	$\omega = 1.1$	24	114	-	-	-	-
	$\omega = 1.2$	22	105	-	-	-	-
	$\omega = 1.3$	20	95	-	-	-	-
	$\omega = 1.4$	18	86	-	-	-	-
	$\omega = 1.5$	21	100	-	-	-	-
	$\omega = 1.6$	26	124	-	-	-	-
	$\omega = 1.7$	36	171	-	-	-	-
	$\omega = 1.8$	45	214	-	-	-	-
	$\omega = 1.9$	95	452	-	-	-	-
	$\omega = 2.0$	-	-	-	-	-	-

4. 補足

§3 の図 1-8 において, 反復の初期段階で, 密集する零点に収束する近似列が, 同心円上に等間隔に分布された位置関係を保ちながら直線的に極限值に接近している様子が観察される. ([10], [18] の定理 2.1-2.5 参照.) 他方, SOR 型反復, 図 9-20 ではある種の螺旋形が観察される. この現象は, 以下のように説明される:

z_i^+ , z_i^* をそれぞれ D-K 反復, SOR 型反復による z_i の改良された値とする. すなわち,

$$z_i^+ = z_i - \sigma_i, \quad \sigma_i = \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}$$

および

$$z_i^* = z_i - \omega \frac{P(z_i)}{\prod_{j < i} (z_i - z_j^*) \prod_{j > i} (z_i - z_j)} = z_i - \omega \sigma_i \frac{\prod_{j < i} (z_i - z_j)}{\prod_{j < i} (z_i - z_j^*)}.$$

これより, 我々は

$$z_i - z_i^* = \omega \sigma_i \prod_{j < i} \left(\frac{z_i - z_j}{z_i - z_j^*} \right) = \omega (z_i - z_i^+) \prod_{j < i} \left(\frac{z_i - z_j}{z_i - z_j^*} \right)$$

を得る. 従って,

$$\arg(z_i - z_i^*) = \arg(z_i - z_i^+) + \sum_{j < i} \{ \arg(z_i - z_j) - \arg(z_i - z_j^*) \}.$$

いま, $i \geq 2$ として, z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ の位置関係より, 不等式

$$\sum_{j < i} \{ \arg(z_i - z_j) - \arg(z_i - z_j^*) \} > 0 \quad (4.1)$$

が満たされるとき,

$$\arg(z_i - z_i^*) > \arg(z_i - z_i^+)$$

を得る. D-K 列は密集する零点に対して放射状に収束するので, これは SOR 型列の螺旋状の収束を説明する. (室谷-山本.) (Aberth の初期値において, z_i , $i = 1, \dots, n$ が円周上に左回りにとられたとき, 不等式 (4.1) が満たされることに注意せよ.)

同様の説明が反復 (1.7) に対しても適用できるであろう.

SOR 型反復において, 加速パラメータ ω を複素数 $\mathbf{C}$ にとるとき, その虚数部は反復による近似解の修正方向を曲げるよう働く.

$P(z) = z^{12}$ に対して, Aberth の初期値 (3.1) ($r_0 = 10$) を用いた D-K 反復 (1.1), パラメータ ω に虚数成分を持つ SOR 型反復 (1.6) の収束の比較を表 14, また反復列の挙動 ($\{z_i^k\}$, $k \leq 100$) を図 45-48 に示す. 不等式 (4.1) による修正方向の曲がりを ω の虚数部が

打ち消すとき, 収束が早いことに注意せよ.

Aberth の初期値を SOR 型反復で用いるとき, 不等式 (4.1) による修正方向の曲がりを少なくするよう, 円周上にとる z_i , $i = 1, \dots, n$ の順序を工夫することは, 収束を速めるうえで意味を持つかもしれない.

著者らは, (3.1) において, 偏角 θ_i を

$$\theta_{\sigma i}, \quad (\sigma 1, \sigma 2, \dots, \sigma n) = (1, n, 2, n-1, 3, n-2, \dots)$$

で置き換えることを奨める.

D-K 法の SOR 型加速において, 加速パラメータ ω の最適値を決定する問題は未解決である. しかしながら, 定理 2.1 の証明, および本稿で与えた数値実験の結果は, 開区間 $(1, 2)$ にその値があることを示唆している. (数値例は SUN ワークステーション上で計算された.)

表 14. $P(z) = z^{12}$ に対する D-K 反復 (1.1), SOR 型反復 (1.6)
($|\omega| = 1.0$, $\operatorname{Re} \omega > 0$) の収束 ($\rightarrow 250$ 反復).

		$\varepsilon=1.0\text{E}-3$		$\varepsilon=1.0\text{E}-7$		$\varepsilon=1.0\text{E}-11$	
		#	(ms.)	#	(ms.)	#	(ms.)
D-K		78	520	184	1227	-	-
SOR (1.6)	$\operatorname{Im} \omega = -0.8$	100	667	-	-	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = -0.7$	59	393	145	967	233	1553
	$\operatorname{Im} \omega = -0.6$	56	373	128	853	201	1340
	$\operatorname{Im} \omega = -0.5$	56	373	127	847	199	1327
	$\operatorname{Im} \omega = -0.4$	57	380	131	873	204	1360
	$\operatorname{Im} \omega = -0.3$	60	400	137	913	214	1427
	$\operatorname{Im} \omega = -0.2$	63	420	145	967	226	1507
	$\operatorname{Im} \omega = -0.1$	67	400	154	1027	242	1613
	$\operatorname{Im} \omega = 0.0$	71	473	165	1100	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = 0.1$	76	507	178	1187	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = 0.2$	81	540	192	1280	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = 0.3$	88	587	212	1513	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = 0.4$	88	587	227	1513	-	-
	$\operatorname{Im} \omega = 0.5$	87	580	-	-	-	-

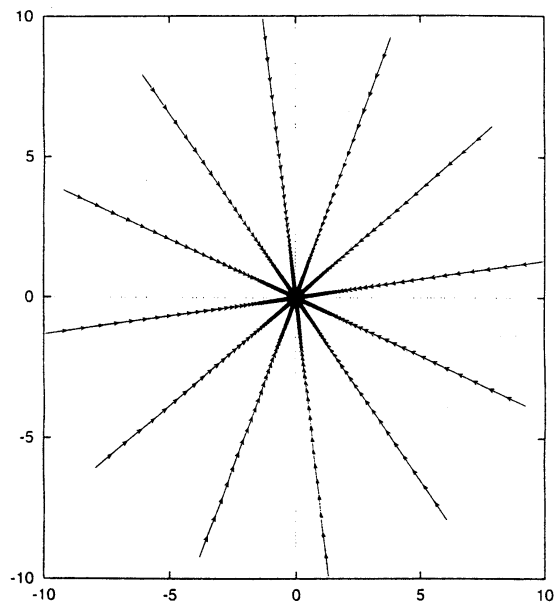


図 45. $P(z) = z^{12}$ に対する D-K (1.1).

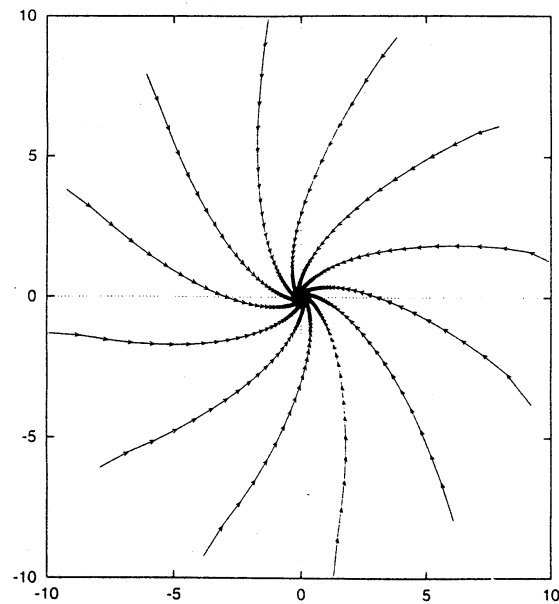


図 46. SOR (1.6), $|\omega| = 1.0$, $\arg \omega = -\frac{\pi}{6}$.

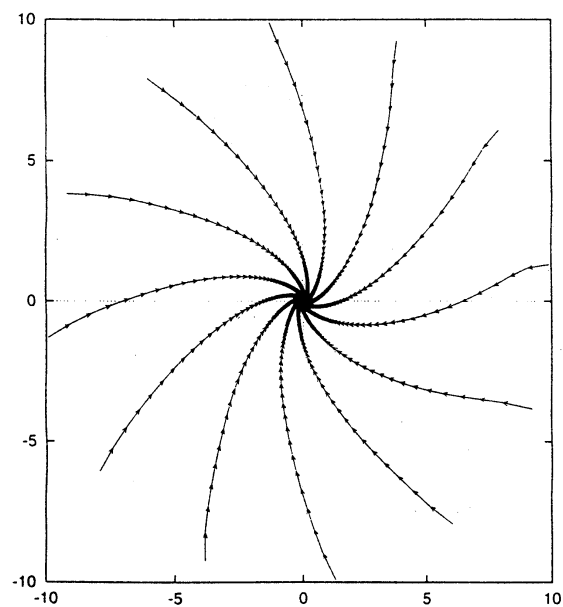


図 47. SOR (1.6), $\omega = 1.0$.

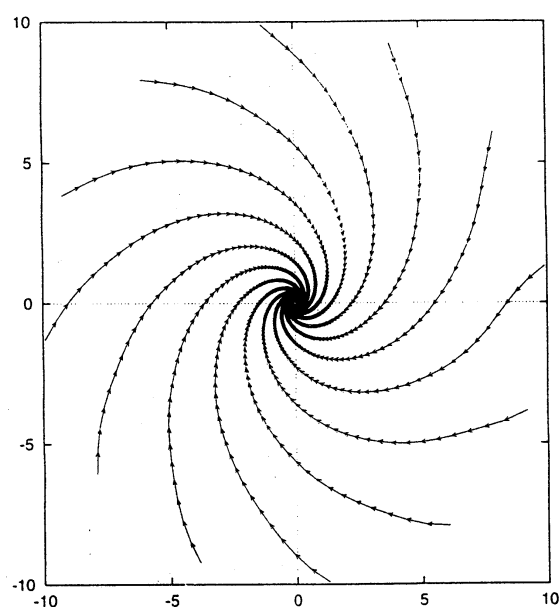


図 48. SOR (1.6), $|\omega| = 1.0$, $\arg \omega = \frac{\pi}{6}$.

参考文献

- [1] O. Aberth, Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously. *Math. Comp.* **27**(1973), 339–344.
- [2] G. Alefeld and J. Herzberger, On the convergence speed of some algorithms for the simultaneous approximation of polynomial roots. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**(1974), 237–243.
- [3] W. Börsch-Supan, A posteriori error bounds for the zeros of polynomials. *Numer. Math.* **5**(1963), 380–398.
- [4] K. Dochev, Modified Newton's method for simultaneous computation of all the roots of a given algebraic equation (Bulgarian). *Phys. Mat. J. Bulg. Acad. Sci.* **5**(1962), 136–139.
- [5] I. E. Durand, *Solutions Numérique des Équations Algébriques. Tome I: Équations du Type $F(x) = 0$. Racines d'une Polynôme*, Masson, Paris, 1960, 279–281.
- [6] L. W. Ehrlich, A modified Newton method for polynomials. *Comm. ACM* **10**(1967), 107–108.
- [7] S. Kanno and T. Yamamoto, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, II. *Topics in Validated Computation* (ed. J. Herzberger), North-Holland, Amsterdam, 1994, 55–61.
- [8] S. Kanno, V. Kjurkchiev and T. Yamamoto, On some methods for simultaneous determination of polynomial zeros. Preprint.
- [9] I. O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. *Numer. Math.* **8**(1966), 290–294.
- [10] T. Miyakoda, Balanced convergence of iterative methods to a multiple zero of a complex polynomial. *J. Comp. Appl. Math.* **39**(1992), 201–212.
- [11] A. W. M. Nouredin, An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial. *Intern. J. Comp. Math. Section B* **6**(1977), 241–252.
- [12] Prešić, S. B., Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes. *C. R. Acad. Sc. Paris* **262**(1966), 862–863.
- [13] 田辺國士, 代数方程式の全根同時解法の重根における挙動. 情報処理学会研究報告, 数値解析 **4-2**(1983), 1–6.
- [14] K. Weierstrass, Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus lineare Funktionen derselben Veränderlichen. *Gesammelte Werke* **3**(1903), Johnson New York, 1967, 251–269.
- [15] W. Werner, On the simultaneous determination of polynomial roots. *Springer Lecture Notes* **953**(1982), 188–202.
- [16] 山本哲朗, 古金卯太郎, 野倉久美, 代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法. 情報処理 **18**(1977), 566–571.
- [17] T. Yamamoto, S. Kanno and L. Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method. *Topics in Validated Computation* (ed. J. Herzberger), North-Holland, Amsterdam, 1994, 27–53.
- [18] 山本哲朗, 菅野幸夫, Durand-Kerner 法に対する注意. 日本応用数理学会論文誌 **4-3**(1994) 251–258.