

p 進 L 関数 入門 VI (Ferrero - Washington の仕事)

北大 理 森田康夫

p を素数とし, $p \neq 2$ の時は $q = p$, $p = 2$ の時は $q = 4$ とおく。 m_0 を p と素な自然数とし, 整数 $n \geq 0$ に対し

$$b_n = m_0 q p^n$$

とおく。そこで

$k_n = \mathbb{Q}(\zeta_{b_n})$: $\mathbb{Q}$ 上 1 の原始 b_n 乗根 ζ_{b_n} の生成する体とし, h_n を k_n の類数, p^{e_n} で h_n を割る p の最高巾とあらわす。この時 岩沢により次の結果が成り立つことが知られている。

定理. 負でない整数 μ, λ と, 整数 ν があり, n がある自然数 n_0 より大きい時

$$e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

なる公式が成り立つ。

ここに出て来た不変量 λ, μ, ν は、岩沢の理論において重要な量ですが、これについて岩沢は、

「 $\mu = 0$ であろう」

と予想しました。この予想は、岩沢により同値ないくつかの命題の形に言い直されていましたが、最近、そのうちの一つの命題を証明することにより証明されました。そこで、以下 Ferrero と Washington によるこの予想の証明を紹介します。

簡単のため以下 $m_0 = 1$ と仮定します。一般の m_0 に対しても、本質的には同じことを示すことにより証明されますが、 k_0 が有理数体でないため、整教論的に多少めんどうになります。

まず仮定より $k_m = \mathbb{Q}(\zeta_{p^m})$ となっています。この場合 $p = 2$ は regular prime なので $\mu = 0$ となることは良く知られています。よって $p \neq 2$ と仮定します。

一般に p 進整数 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対し、その p 進展開を

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(\alpha) p^m, \quad 0 \leq t_m(\alpha) \leq p-1$$

とし、その部分和を

$$S_n(\alpha) = \sum_{m=0}^n t_m(\alpha) p^m$$

とおきます。この時、岩沢により次のことが知られています。

た。

命題1. 今の場合, $\mu \neq 0$ となるための必要十分条件は,
 $0 \leq d \leq p-3$ なるある奇数 d があり,

$$\sum_{\eta^{p-1}=1} t_m(\alpha\eta) \eta^d \equiv 0 \pmod{p}$$

なる合同式が, 任意の $m \geq 0$ なる整数と, 任意の p 進整数
 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ について成り立つことである. ここで和は, $\mathbb{Z}_p$ に入
 るすべての 1 の $p-1$ 乗根全体を動くものとする.

この命題を証明するため, 次の様な概念を導入します.

定義. $\delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{Z}_p$ は, 次の条件を満たすとき jointly normal であるという.

任意の自然数 k と, 任意の

$$C = (C_{ij}) \in M_{r,k}(\mathbb{Z}), \quad 0 \leq C_{ij} \leq p-1$$

なる形の行列に対し, 整数 $n \geq -1$ で

$$t_{n+j}(r_i) = C_{ij} \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k)$$

を満たすものの密度が, ちょうど p^{-rk} である.

(注意) この定義は容易に

$\{p^{-n} \Delta_{n-1}(\delta_1), \dots, p^{-n} \Delta_{n-1}(\delta_r)\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1)^r$ の中に uniformly distributed である

ということと同値であることがわかります。従って uniform distribution に関する Weyl の criterion を使えば、これはまた次のこととも同値となります。

$(t_1, \dots, t_r)$ をすべて 0 でない整数 r 個の組とする時、この様な任意の組に対し、常に

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \left\{ 2\pi i \sum_{l=1}^r p^{-n} \Delta_{n-1}(\delta_l) t_l \right\} = 0$$

が成り立つ。

以上の概念を用いて、次の命題が得られます。

命題 2. $\beta_1, \dots, \beta_r$ が $\mathbb{Q}$ 上 linearly independent な p 進整数の組であるとする。この時、Haar measure が 0 の $\mathbb{Z}_p$ の部分集合 B があり、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\alpha \notin B$ に対し

$$\{\alpha \beta_1, \dots, \alpha \beta_r\} \text{ は jointly normal}$$

となる。

(証明) 上記の注意により、 $\sigma = \sum_{l=1}^r \beta_l t_l$ とおくと、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \{ 2\pi i p^{-n} \Delta_{n-1}(\alpha \sigma) \} = 0$$

が a.a. α について成り立つことを示せば良い。

仮定より、 $\beta_1, \dots, \beta_r$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立で、 $(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ だから $\sigma \neq 0$ である。よって

$$\mathbb{Z}_p \ni \alpha \longmapsto \exp \{ 2\pi i p^{-n} \Delta_{n-1}(\alpha \sigma) \} \in \mathbb{C}^\times \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

は, 互に相異なる指標となる。よって

$$S(N, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \{ 2\pi i p^{-n} \Delta_{n-1}(\alpha \sigma) \}$$

とおくと, 指標の直交関係より,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |S(N, \alpha)|^2 d\alpha = \frac{1}{N}$$

となる。よって

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p} |S(m^2, \alpha)|^2 d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

となる。これより, $\mathbb{Z}_p$ の Haar measure $d\alpha$ に関し, a.a. α について

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |S(m^2, \alpha)| = 0$$

が結論される。ところが $m^2 \leq N < (m+1)^2$ とすると

$$|S(N, \alpha)| \leq |S(m^2, \alpha)| + \frac{2m}{N}$$

が成り立つから, $S(N, \alpha) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$ となり, 命題が証明された。

また jointly normal の定義より, 次の命題が成り立つことが証明される。

命題 3. $\{\beta_1, \dots, \beta_R\} \subset \mathbb{Z}_p$ が

(a) $\beta_1, \dots, \beta_r$ は jointly normal ($r \leq R$).

(b) $\beta_j = \sum_{i=1}^r a_{ji} \beta_i$ ($a_{ji} \in \mathbb{Z}$) が $r \neq j \leq R$ について成り立つ。

(c) $\beta_j / \beta_1 \notin \mathbb{Z}$ ($j=2, 3, \dots, R$).

の三条件を満たすとする。この時

$$\chi_m(\beta_1) = 1; \quad \chi_n(\beta_1) = 0$$

$$\chi_m(\beta_j) = \chi_n(\beta_j) \quad (j=2, 3, \dots, R)$$

を満たす自然数の組 m, n が無限個存在する。

(証明は略する)

以上三つの命題を仮うと、岩沢の予想 $\mu=0$ が次のようにして証明できます。

$\mu > 0$ であると仮定する。この時命題1より、ある $0 \leq d \leq p-3$ なる奇数に対し、任意の $m \geq 0$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対し

$$\sum_{\eta^{p-1}=1} \chi_m(\alpha\eta) \eta^d \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ。

η は1の原始 $p-1$ 乗根とする。この時

$$\pm \eta, \pm \eta^2, \dots, \pm \eta^R \quad (R = (p-1)/2)$$

が 1 の $p-1$ 乗根全体となる。ところが

$$t_m(-\alpha\eta) = p-1 - t_m(\alpha\eta) \quad \text{for } m \geq 1 + v_p(\alpha\eta)$$

となるから、 m が十分大きい時、

$$0 \equiv \sum_{\eta} t_m(\alpha\eta) \eta^d = 2 \sum_{j=1}^R t_m(\alpha\eta^j) \eta^{jd} - (p-1) \sum_{j=1}^R \eta^{jd} \pmod{p}$$

となる。ここで右辺第 2 項は m によらない定数である。

$\eta, \eta^2, \dots, \eta^R$ のうち $\eta, \eta^2, \dots, \eta^r$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとする。この時、命題 2 より、 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ で

$$\alpha\eta, \alpha\eta^2, \dots, \alpha\eta^r \text{ は jointly normal}$$

なるものが存在する。そうすると

$$\{\alpha\eta, \alpha\eta^2, \dots, \alpha\eta^r, \dots, \alpha\eta^R\}$$

は命題 3 の条件を満たす。よって命題 3 のような m と n で、共に十分大きいものが取れる。そうすると

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{\eta} t_m(\alpha\eta) \eta^d - \sum_{\eta} t_n(\alpha\eta) \eta^d \pmod{p} \\ &= 2 \sum_{j=1}^R \{t_m(\alpha\eta) - t_n(\alpha\eta)\} \eta^{jd} = 2 \eta^d \end{aligned}$$

となる。 $p \neq 2$, η は 1 の $p-1$ 乗根だから $2\eta^d \not\equiv 0 \pmod{p}$ であり、これは矛盾である。よって $\mu = 0$ となる。

(注意) 同様の方法で次の定理が得られる。

定理 (Washington). k はアーベル体, K/k は cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -extension, k_n は $K \supseteq k_n \supseteq k$, $[k_n:k] = p^n$ なる中間体とする. l は p と相異なる素数とし, k_n の類数を割る最大の l を l^{e_n} とする. この時, e_n は十分大きい n に対しては一定となる。

なお Ferrero-Washington は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の λ -invariant の評価も得ている。

参考文献

1. B. Ferrero, L. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. Math., 109 (1979), 377-395.
2. L. Washington, The non- p -part of the class number in a cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -extension,