

C^2 -安定写像について

京大 理 石川 剛郎

本稿では, C^0 写像のある種の安定性を定義し, その非稠密性を示す (Prop. 1, Prop. 2)

§1. 定義と結果

M, N をそれぞれ C^0 -manifolds, $C^0(M, N) = \{f: M \rightarrow N \mid f \text{ is } C^0\text{-map}\}$ とおく. $C^0(M, N)$ には Whitney C^0 -topology を入れる

Def. 1 (C^r -equivalence)

$f, g: M \rightarrow N, C^0\text{-maps}$ (resp. $f: (M, x) \rightarrow (N, y), g: (M, x') \rightarrow (N, y'), C^0\text{-map germs}$) が C^r -equivalent ($r=0, 1, 2, \dots, \infty$)
 $\iff$ C^r -diffeom. $\sigma: M \rightarrow M, \tau: N \rightarrow N$ (resp. C^r -local diffeom. $\sigma: (M, x) \rightarrow (M, x'), \tau: (N, y) \rightarrow (N, y')$) が存在して,
 $\tau \circ f = g \circ \sigma$ が成り立つ

Def. 2 (C^r -(local) stability up to (A, f))

(A, f) を, f における $C^0(M, N)$ の 1 つの germ of subset とする

とき, $f \in C^r(M, N)$ が C^r -stable (resp. C^r -locally stable) up to (A, f) $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ f の $C^r(M, N)$ における任意の近傍 V_f に対し, f の近傍 $U_f (U_f \subseteq V_f)$ があって, $U_f \ni \forall g$ (resp. $U_f \ni \forall g, M \ni \forall x$) に対し, $V_f \cap A \ni h$ (resp. $V_f \cap A \ni h, M \ni x'$) が存在して, g と h が C^r -equivalent (resp. g at x と h at x' が C^r -equivalent)

Remark 1. f が C^r -stable up to (A, f) ならば C^r -locally stable up to (A, f) . また $(A, f) = (\{f\}, f)$ のとき C^r -stability up to (A, f) は通常の C^r -stability に一致する.

Def. 3 (C^r -l-(local) stability)

$f \in C^\infty(M, N)$ が C^r -l-stable (resp. C^r -l-locally stable), ($l \in \mathbb{N}$) $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ f の l -parameter deformation, $F: M \times \mathbb{R}^l \rightarrow N$, $F_\lambda = F(\cdot, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^l$), $F_0 = f$, があって, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, f が C^r -stable (resp. C^r -locally stable) up to $(\{F_\lambda\}_{\lambda \in B(l, \varepsilon)}, f)$, ここで $B(l, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^l \mid |x| < \varepsilon\}$

Remark 2 $r \geq r', l \leq l'$ のとき, f が C^r -l-stable $\Rightarrow$ $C^{r'}-l'$ -stable

Proposition 1. M を compact とする. 自然数の組 (m, n, l) が次の条件 $\star$ をみたすとき, つねに, $C^r(M^m, N^n)$ の中で, C^r -l-locally stable なもの全体は dense でない

$$\star \begin{cases} k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ があって, (a) } \dots 0 \leq m - k(n - m + k), \\ \text{(b) } \dots m - k(n - m + k) + l \leq \frac{1}{2}k(k+1)(n - m + k) - (n - m + k)^2 - k^2 \end{cases}$$

Def. 4 (C^r - l -weak (local) stability)

$f \in C^k(M, N)$ が C^r - l -weakly stable (resp. C^r - l -weakly locally stable) $\Leftrightarrow$ f の有限個の l -parameter deformations, $F_i: M \times \mathbb{R}^l \rightarrow N$, $F_{i,0} = f$ ($i=1,2,\dots,S$) があって, $\forall \varepsilon > 0$ について f は C^r -stable (resp. C^r -locally stable) up to $(\{F_1, \lambda_1\}_{\lambda_1 \in B(l, \varepsilon)} \cup \{F_2, \lambda_2\}_{\lambda_2 \in B(l, \varepsilon)} \cup \dots \cup \{F_S, \lambda_S\}_{\lambda_S \in B(l, \varepsilon)}, f)$

Remark. 3, f が C^r - l -weakly (locally) stable $\Rightarrow C^r$ - l -(locally) stable. しかし, この間に本当に差があるかどうか筆者は知らない

Example. 1 もっとも簡単な例として, $f(x) = x^3$, $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は C^k -1-locally stable である. この場合 C^k -1-stable でもある.

Proposition 2. M を compact とする. 自然数の組 (m, n, l) が条件 $\star$ (c.f. Prop. 1) をみたすとき, つねに $C^k(M^m, N^n)$ の中で, C^2 - l -weakly locally stable なもの全体は dense でない

Remark 4. 条件 $\star$ の (a) から $k \leq m$ がしたがう

Remark 5. Prop. 1, および 2 で, $l=0$ のときは, M が compact という仮定は必要ではない

Remark 6. Prop. 2 おり自動的に Prop. 1 が従う (Rem. 3)

Example. 2 条件 $\star$ をみたす (m, n, l) の例として, たとえば $(8, 6, 0)$, $(9, 9, 0)$, $(10, 7, 1)$, $(11, 8, 0)$, $(12, 8, 2)$ などがある.

§2. 補題と注意

Lemma 1. M, N を C^∞ -manifolds, $N \supset A$ を, (locally finite な) stratification $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で Whitney の条件 a をみたすものが与えられている closed subset とする. このとき

$\{f \in C^\infty(M, N) \mid \forall \lambda \in \Lambda \text{ について, } f \text{ は } S_\lambda \text{ 上}$
 $\text{は } C^\infty(M, N) \text{ において, Whitney } C^1\text{-topology (したがって, Whitney } C^0\text{-topology) について open である}$

Lemma 2 (trivial) $\mathbb{R}^m \supset U$ を 0 を含む open set, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $f(0)=0$ かつ 0 で $\mathbb{R}^{n-m} (\subseteq \mathbb{R}^n)$ に transversal な C^∞ -map とする. このとき, $\varepsilon > 0$ があって, $\forall g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ -map 且, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ (for $x \in U$) に対し, $g(U) \cap \mathbb{R}^{n-m} \neq \emptyset$

Lemma 3, M, P, N を C^∞ -manifolds, $M \times P \supset \Sigma$ を C^∞ -submanifold とし, $F: M \times P \rightarrow N$ C^∞ -map について, $F|_{M \times \{p\}}$ が $\Sigma \cap M \times \{p\}$ の上で constant rank (for all $p \in P$) であり, しかも, その rank が $p \in P$ に依らないとする. このとき,
 $K = \bigcup_{(x,p) \in \Sigma} \{(x,p)\} \times \ker(T(F|_{M \times \{p\}})_{(x,p)}) \subseteq TM$ は, C^∞ pointwise に linearly independent な local cross-sections over Σ をもつ.

Remark 7. $\Sigma \ni V(x_0, p_0)$ の Σ における充分小さな近傍 L について, C^∞ -map $\tilde{\Phi}: L \times GL(k, \mathbb{R}) \times GL(n-m+k, \mathbb{R}) \rightarrow Q(k, n-m+k)$ が次のように定義できる (ここで $Q(k, n-m+k)$

$= \{ \varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-m+k}; \text{2次同次写像} \}$) すなわち, L を充分小さくとれば, $L \ni (x, p)$ に対して $\langle \pi(\frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(x,p)}), \dots, \pi(\frac{\partial}{\partial y_{n-m+k}}|_{F(x,p)}) \rangle_{\mathbb{R}} = \text{coker}(T(F|_{M \times \mathbb{R}^p})(x, p))$ をみたす $F(x_0, p_0)$ における座標系 $y_1, \dots, y_n$ がとれ, さらに Lemma 3 より, $K \# L$ の上に sections $v_1, \dots, v_k$ をもつ (ここで $\pi: T_{F(x,p)}N \rightarrow \text{coker}(T(F|_{M \times \mathbb{R}^p})(x, p))$ は projection) このとき, $\tilde{\Phi}(x, p, \sigma, \tau) = (\sigma, \tau) \cdot ((v_\mu \cdot v_\nu (y_i \circ F|_{M \times \mathbb{R}^p})(x, p))_{\mu \leq \nu \leq k})$ と定義する (ここで, $(x, p) \in L$, $(\sigma, \tau) \in GL(k) \times GL(n-m+k)$, また $GL(k) \times GL(n-m+k)$ の $Q(k, n-m+k)$ への自然な作用 $\cdot$ を考えている) このとき, $\tilde{\Phi}(\{(x, p)\} \times GL(k) \times GL(n-m+k))$ は $F|_{M \times \mathbb{R}^p}$ の (x, p) における 2-nd intrinsic derivative $d^2(F|_{M \times \mathbb{R}^p})(x, p)$ を含む $GL(k) \times GL(n-m+k)$ -orbit と一致する. さらに, $I = \{ \frac{1}{\alpha} E_k, \alpha^2 E_{n-m+k} \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \} \subseteq GL(k) \times GL(n-m+k)$ (開正規部分群) とおくと, $\Phi: L \times \{(GL(k) \times GL(n-m+k))/I\} \rightarrow Q(k, n-m+k); C^\infty\text{-map}$ が, $\Phi \circ (id_L \times \pi') = \tilde{\Phi}$ をみたすように一意に定まる. (ここで, π' は projection)

§3. 証明

Remark 6 にしたがって, Proposition 2 のみを証明する

Proposition 2 の証明

Step 1 (m, n, l) が条件 $*$ をみたすとする (対応する k を1つとり fix する. いま仮りに C^2 -l-weakly locally stable

なもの全体が *dense* であるとしよう. すると, 次の条件①, ②, ③ をみたす $f \in C^0(M, N)$ がある

① f は C^2 - l -weakly locally stable

② $j^l f : M \rightarrow J^l(M, N)$ は $S_{m-k}, S_{m-k-1}, \dots, S_1, S_0$ にそれぞれ *transversal*

③ $(j^l f)^{-1}(S_{m-k}) \neq \emptyset$

ここで $S_r (0 \leq r \leq \min(n, m))$ は M 上の, fiber を $M(m, n, r) = \{A \in M(m, n; \mathbb{R}) \mid \text{rank } A = r\}$ にもつ bundle $\subseteq J^l(M, N)$ を表わす.

① はじめに条件②, ③ をみたすもの全体が $C^0(M, N)$ の中で空でない *open set* をなすことを示そう. 実際, 条件②の (a) より, M の或る 1 点で $j^l f$ が S_{m-k} に *transversal* に交わるような f をとる. これを②をみたすもので近似したとき, やはり③はみたされる (Lemma 2) よって空でない. さらに Lemma 1, 2 により, *openness* が従う. 仮定より①をみたすものは *dense* であったから, ①, ②, ③をみたす $C^0(M, N)$ の元がある.

Step 2. ①②③をみたす f をとる. ①をみたすから, 対応する f の有限個の l -parameter deformations $F_i : M \times \mathbb{R}^l \rightarrow N$ ($i=1, 2, \dots, S$) をとり固定する. いま M は compact だから,

$$F : \mathbb{R}^l \times \dots \times \mathbb{R}^l \text{ (S-times)} \rightarrow C^0(M, N) \times \dots \times C^0(M, N) \text{ (S-times)}$$

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_S) = (F_{1, \lambda_1}, F_{2, \lambda_2}, \dots, F_{S, \lambda_S})$$
 は連続. したがって $\varepsilon > 0$ が存在して, $B(l, \varepsilon) \ni \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_S$ について $F_{1, \lambda_1}, \dots, F_{S, \lambda_S}$ は②, ③

をみたす. $J^i F_i: M \times \mathbb{R}^l \rightarrow J^i(M, N)$, $J^i F_i(x, \lambda) = J^i F_{i, \lambda}(x)$ とおくとき, $J^i F_i$ は C^0 かつ, $J^i F_i \cap S_{m-j}$ ($j=k, k+1, \dots, m$) over $M \times B(l, \varepsilon)$ ($i=1, \dots, s$) をみたす. しかも $(J^i F_i)^{-1}(S_{m-k}) \neq \emptyset$. したがって, $\Sigma_i = (J^i F_i)^{-1}(S_{m-k})$ とおくと Σ_i は, $M \times B(l, \varepsilon)$ の $m+l-k(n-m+k)$ 次元 submanifold になる

Step 3. ここで Lemma 3 および Remark 7 を思い起こす. すると $\Sigma_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L_{ij}$ なる Σ_i の可算開被覆が存在して,

$$\Phi_{ij}: L_{ij} \times \{GL(k) \times GL(n-m+k)\} / \sim \rightarrow Q(k, n-m+k)$$

が Remark 7 の重と同じく定義できる. ここで $I, Q(k, n-m+k)$ は Remark 7 で定義したもの. いま条件 (B) の (B) より

$$m+l-k(n-m+k)-1 < \frac{1}{2} k(k+1)(n-m+k)$$

よって Image Φ_{ij} は $Q(k, n-m+k) \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}k(k+1)(n-m+k)}$ の中で測度 0. したがって, $\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq s \\ j \in \mathbb{N}}} \text{Im } \Phi_{ij}$ は 測度 0 ----- (*)

Step 4 他方 f の C^2 -l-weakly locally stability と F_i ($i=1, \dots, s$) のとり方から, f の $C^0(M, N)$ における近傍 U_f が存在して, $U_f \ni g$ と $M \ni x_0$ に対して, $x \in M$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $\lambda \in B(l, \varepsilon)$ があって $g \text{ at } x_0 \sim_2 F_{i, \lambda} \text{ at } x$ ----- (**). さて $(J^i f)^{-1}(S_{m-k}) \ni x_0$ を fix して, $X = \{g \in C^0(M, N) \mid J^i g(x_0) = J^i f(x_0)\} \subseteq C^0(M, N)$ とおく. $X \cap U_f \ni g$ について (**) をみたす x は必然的に Σ_i に属する. よって, とくに, Remark 7 より

$$O d^2 g x_0 \leq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Im } \Phi_{ij}$$

ここで $Od^2g_{x_0}$ は $d^2g_{x_0}$ の $Q(k, n-m+k)$ の中での orbit .

したがって,

$$\bigcup_{g \in U_f \cap X} Od^2g_{x_0} \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq s, j \in \mathbb{N}} \text{Im } \Phi_{ij}$$

が成り立つ. 右辺は附より測度 0. ところが一方, 左辺は内点を含むことがわかる. これで矛盾が導びかれ, Proposition 2 (したがって Proposition 1) が証明された.

Q.E.D.

文献 (最後の括弧は特に参考にした箇所を示す)

Bröcker, T.H. & Lander L.L.; Differentiable Germs and Catastrophes (Cambridge); (pp.85-91)

Feldman, E.A; The geometry of immersions I, Trans. A.M.S. 120, pp.185-224 (1965); (pp.196-197)

Mather, J.; Stability of C^∞ -mappings V. Adv. in Math. 4. pp.301-336 (1970); (§6)

Trotman, D.J.A; Stability of Transversality to a Stratification Implies Whitney (a)-Regularity, Inv. Math. 50 pp.273-277 (1979); (historical notes)

以上