

Nonlinear semi-groups

について

早大 理工 高村 孝男

無限次元ベクトル空間上の線形作用素の作る one-parameter semi-group の理論は、現在ほど満足すべき結果が得られていると言えよう。(Banach 空間上の半群については Hille-Phillips [A1], 局所凸線形空間上の同等連続な半群については Yosida [A2], 局所凸線形空間上の局所同等連続な半群については Kōmura [A3], Banach 空間上の distribution 半群については Lions [A4] をそれぞれ参照のこと)。そこで、ここでは Hilbert 空間上の非線形縮小作用素の作る半群を論ずることを試みる。

(Kōmura [C1], Kato [C2] 参照)。これは Hilbert 空間 H における発展方程式

$$\frac{d}{dt} u(t) = A u(t) \quad , \quad (A \text{ はある種の非線形不連続作用素})$$

の解を調べることになる。従来研究されていた (Hilbert 空間又は Banach 空間における) 非線形発展方程式は、主として、半線形 (Browder [B1], Kato [B2], Segal [B3] 参照)

$$\frac{d}{dt} u(t) = A(t) u(t) + f(t, u) \quad \left(\begin{array}{l} A(t) \text{ は線形非有界作用素,} \\ f(t, u) \text{ は perturbation} \end{array} \right)$$

又は、準線形 (Lions [B4], Sobolevskii [B5] 参照)

$$\frac{d}{dt} u(t) = A(t, u(t)) u(t) + f(t, u) \quad \left(\begin{array}{l} A(t, u) \text{ は } t, u \text{ を固定し} \\ t \text{ とき線形, } f \text{ は同上} \end{array} \right)$$

の形のものであった。

§1. 半群の定義と例

Hilbert 空間 H 上の nonlinear continuous operator の family $\{T_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ が次の条件を満たすとき nonlinear contraction semi-group という:

- 1) 各 $x \in H$ に対し $T_t x$ は t について強連続.
- 2) $t, s \geq 0$ のとき $T_{t+s} = T_t T_s$, 且つ $T_0 = I$ (= 恒等作用素)
- 3) $\|T_t x - T_t y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H$.

以下このような $\{T_t\}$ を単に半群ということにしよう。

半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は線形の場合と同様に次式で定義される:

$$A_0 x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h x - x}{h} \quad (\lim \text{ は強位相の意味})$$

補題 1. 半群の生成作用素 A_0 は dissipative ($-A_0$ が monotone) である。即ち

$$\operatorname{Re} \langle A_0 x - A_0 y, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_0).$$

例 1. $f(t) = \begin{cases} \text{到る所微分不可能なある連続函数,} & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

とする。平面 $\mathbb{R}^2$ における contraction でない (即ち 3) を満たさない)

半群 $\{T_t\}$ を次の如く定める:

$$T_t(x, y) = (x+t, y+f(x+t)-f(x)), \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

この場合 $A_0(x, y) = (1, f'(x))$ であるから $\mathcal{D}(A_0) = \{(x, y) \mid x < 0\}$. よって

$$(x, y) \in \mathcal{D}(A_0) \not\Rightarrow T_t(x, y) \in \mathcal{D}(A_0).$$

この例は, contraction でない半群を考察することの困難さを示す.

例 2. 直線 $\mathbb{R}^1$ 上の半群を

$$T_t x = \begin{cases} \max(0, x-t) & , \quad x > 0 \\ x & \quad x \leq 0 \end{cases}$$

によって定める. すると生成作用素は

$$A_0 x = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

従って $I - A_0$ の値域は

$$\mathcal{R}(I - A_0) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \neq \mathbb{R}^1.$$

例 3. 複素平面 $\mathbb{C}^1$ における単位円内 $\{re^{i\theta} \mid r \leq 1\}$ での半群を

$$T_t re^{i\theta} = \varphi(\varphi(r) + t) e^{i\theta}$$

$$\text{但し } \varphi(r) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - (1-r)^2} & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & 1 \leq r \end{cases}$$

と定義する. 生成作用素は

$$A_0 re^{i\theta} = \varphi'(\varphi(r)) e^{i\theta} = \frac{\varphi(r)-1}{1-r} e^{i\theta}$$

よって $D(A_0) = \{ re^{i\theta} \mid r < 1 \}$ であって

$$R(I - A_0) = \mathbb{C}^1$$

この半群は, contraction の条件を要求する限り, これ以上拡張することは出来ない。即ち, 半群の存在領域が本質的に空間の一部に限定されている。

§2. Minty の monotone sets

$H \times H$ の部分集合 M が次の条件を満足するとき monotone という:

$$\operatorname{Re} \langle x - x', y - y' \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in M.$$

Zorn の補題から, 任意の monotone 集合に対し, それを含む極大 monotone 集合が存在する。

補題 2. (Minty) 集合 M は monotone

$$\iff \text{写像 } M^*: x + y \rightarrow x - y, \quad (x, y) \in M$$

は定数 1 の Lipschitz 連続写像

$$\left(\text{即ち } \|x - y - (x' - y')\| \leq \|x + y - (x' + y')\| \quad \forall (x, y), (x', y') \in M \right)$$

補題 3. (Minty) monotone 集合 M は極大

$$\iff \text{Lipschitz 連続写像 } M^* \text{ は } H \text{ 全体で定義されている}$$

一般に写像 A_0 が dissipative であることは, 集合 $\{(x, -A_0 x) \mid x \in D(A_0)\}$ が monotone を意味する。従ってこの集合を含む極大 monotone 集合 M をとり $Ax = \{-y \mid (x, y) \in M\}$ とおけば, A は A_0 の拡大であって極大 dissipative 多価写像である。補題 3 より

$$\operatorname{Re}(I - \lambda A) = H \quad \forall \lambda > 0$$

が得られる。

注意. §1, 例2の場合, A_0 の極大 dissipative 拡大 A は唯一つ存在して

$$Ax = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ [-1, 0] & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

このことから一般に多価写像を考察する必要性分かる。

補題4. A を極大 dissipative 多価写像とする。 A を $[a, b]$ 上の H -valued L^2 -函数の作用空間 $L^2_{[a, b]}(H)$ に拡張したものを $\tilde{A}$ と記す。即ち $\tilde{A}f = \{g \in L^2_{[a, b]}(H) \mid g(t) \in Af(t) \text{ } a, e, t \in [a, b]\}$, $f \in L^2_{[a, b]}(H)$. すると $\tilde{A}$ は $L^2_{[a, b]}(H)$ において極大 dissipative 多価写像である。

$\tilde{A}$ が $L^2_{[a, b]}(H)$ において dissipative であることは, $f, g \in \mathcal{D}(\tilde{A})$, $f' \in \tilde{A}f$, $g' \in \tilde{A}g$ に対し

$$\operatorname{Re} \langle f' - g', f - g \rangle = \int_a^b \operatorname{Re} \langle f'(t) - g'(t), f(t) - g(t) \rangle dt \leq 0$$

であるから明白。極大であることは Lusin の条件より得られる。

§3 生成作用素と半群の一義性

非線形の場合 $A_0 T_\varepsilon \cap T_\varepsilon A_0$ は必ずしも成立しないから $x \in \mathcal{D}(A_0)$

から $T_t x \in \mathcal{D}(A_0)$ は直接には得られない。

補題 5. 同帰的 Banach 空間 E の値をとる (ノルムに因する) 絶対連続函数 $f(t)$ は殆んどいたる所微分係数 $\frac{d}{dt} f(t)$ を持ち

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} f(s) ds \quad \text{a.e. } t$$

である。

ある $x \in H$ に対し $\overline{\lim_{h \rightarrow 0}} \left\| \frac{1}{h} (T_h x - x) \right\| < \infty$ ならば
 $\|T_{t+h} x - T_t x\| \leq \|T_h x - x\|$ より $T_t x$ は (ノルムに因して) 絶対連続である。従って補題 5 によって次の定理が得られる。

定理 1. $x \in \mathcal{D}(A_0)$ ならば

$$T_t x \in \mathcal{D}(A_0) \quad \text{a.e. } t, \quad \|A_0 T_t x\| \leq \|A_0 x\|,$$

$$T_t x = x + \int_0^t A_0 T_s x ds$$

即ち $u(t) = T_t x$ は 発展方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = A_0 u(t) \\ u(0) = x \quad (x \in \mathcal{D}(A_0)) \end{cases}$$

の解である。この発展方程式の解の一意性に因しては、もっと一般に

定理 2. A を dissipative 多価写像, $\tilde{A}$ を A の $L^2_{loc,0}(H)$ への拡張とすると, 発展方程式

$$\frac{d}{dt} u(t) \in \tilde{A} u(t)$$

の解 u, v について

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\| \quad 0 \leq t \leq t_0$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \text{証)} \quad & \|u(t) - v(t)\|^2 - \|u(0) - v(0)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u(s) - v(s)\|^2 ds \\ &= \int_0^t \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{ds} u(s) - \frac{d}{ds} v(s), u(s) - v(s) \right\rangle ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} u(s) \in A u(s), \quad \frac{d}{ds} v(s) \in A v(s) \quad \text{a.e. } s \quad \text{であるから}$$

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{ds} u(s) - \frac{d}{ds} v(s), u(s) - v(s) \right\rangle \leq 0 \quad \text{a.e. } s$$

よって上の積分は ≤ 0 。

§ 4. 半群の生成

A を H における極大 dissipative 多価写像, $\tilde{A}$ を A の $L^2_{\text{loc}}(H)$ への拡張とする。我々の目標は次の Cauchy 問題の連続な解を求める事である。

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in \tilde{A} u(t) \\ u(0) = x \quad (x \in \mathcal{D}(A)) \end{cases}$$

A に対し A_n を次のように定める。 $x \in \mathcal{D}(A)$, $x' \in Ax$ に対し

$$A_n : x - \frac{1}{n} x' \longrightarrow x'.$$

この写像は 1 価, dissipative, 且つ Lipschitz 連続: $\|A_n x - A_n y\| \leq$

$n \|x - y\|$. A が 1 価ならば明らかに

$$A_n = A(I - \frac{1}{n} A)^{-1}$$

である。逐次近似により次の補題が得られる。

補題 5. $x_n = x - \frac{1}{n} x'$ ($x \in \mathcal{D}(A)$, $x' \in Ax$) に対し

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_n(t) = A_n u_n(t) \\ u_n(0) = x_n \end{cases}$$

は唯一つの解を持つ。また $\|A_n u_n(t)\| \leq \|A_n u_n(0)\|$ が成立す。

上述の x, x' を固定したとき $\{u_n(t)\}$ は $n \rightarrow \infty$ につれて任意の有限区間 $[0, t_0]$ 上で一様にある連続函数 $u(t)$ に強収束する。また $\{\tilde{A}_n u_n\}$ が $L^2_{[0, t_0]}(H)$ の中で有界であるから弱収束する部分列を導き出すことが出来、その極限を v とすると、補題 4 を用いて $v \in \tilde{A}u$ が得られ、 u が (*) の解となることが証明される。特に A が $\pm$ 値ならば、各 t について $A_n u_n(t)$ が $A u(t)$ に弱収束する。結果として

定理 3. 1) 発展方程式 (*) は唯一つ解を持つ。 2) (Kato)

特に A が $\pm$ 値ならば、この解 $u(t)$ について、すべての t に対し

$$u(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \frac{d}{dt} u(t) = A u(t), \quad A u(t) \text{ は弱連続,}$$

が成立する。

この解 $u(t)$ は定理 2 より $u(0) \rightarrow x$ ならば一様にある連続函数に強収束するから、その極限を $T_t x$ とおけば半群が得られる。即ち

定理 4. 極大 dissipative 多価寫像 A は、その定義域の閉包 $\overline{\mathcal{D}(A)}$ において一意に半群 $\{T_t\}$ を生成する。 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は

$$A_0 \subset A, \quad \overline{\mathcal{D}(A_0)} = \overline{\mathcal{D}(A)}$$

を満足する。逆に、半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 の定義域が $\{T_t\}$ の定義域

で dense ならば, A_0 の極大 dissipative 拡大 A の生成する半群 $\{\tilde{T}_t\}$ は $\{T_t\}$ の拡大 (即ち $T_t \subset \tilde{T}_t$) である。

§ 5. 補遺

生成作用素 A_0 が densely defined であるような半群を「正則」であることにしよう。定理 4 は正則な半群に関する Hille-Yosida の定理と与えるものである。正則な半群 $\{T_t\}$ の正則な拡大 $\{\tilde{T}_t\}$ が存在すれば, それぞれの生成作用素を $A_0, \tilde{A}_0$ とすれば, $\overline{\mathcal{D}(A_0)} \subsetneq \overline{\mathcal{D}(\tilde{A}_0)}$ であるから次の定理を得る。

定理 5. 正則な半群 $\{T_t\}$ が極大である (即ち正則な拡大をもたない) ための必要且つ十分な条件は, 生成作用素 A_0 の極大 dissipative 拡大 A が常に $\overline{\mathcal{D}(A_0)} = \overline{\mathcal{D}(A)}$ を満たすことである。

A を極大 dissipative 寫像とすれば $\overline{\mathcal{D}(A)}$ は convex であることが証明される。逆に Ω を内点を持つ closed convex 集合とすれば, 例 3 から分るように, Ω を定義域とする極大な正則半群が存在するから, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \Omega$ となる極大 dissipative 寫像 A が存在する。

問題. 内点を含む凸閉集合で定義された半群は常に正則 (即ちその生成作用素は densely defined) であろうか。

その他の結果. 半群 $\{T_t\}$ が contraction の条件 3) の代りに

$$3') \quad \|T_t x - T_t y\| \leq e^{\lambda t} \|x - y\|$$

を満足する場合も全く同様である。写像 B が Lipschitz 連続で H 全体で定義されていれば、このような半群を生成する。更に、写像 A がこのような半群の生成作用素であれば、 $A + B$ も同様である。(perturbation の理論)。

また生成作用素が t に依存する場合の発展方程式：

$$\frac{d}{dt} u(t) = A(t) u(t)$$

を論ずること、さらに理論を Banach 空間に拡張することについて Kato [C2] を参照されたい。

参考文献

A. 線形作用素の半群に関するもの

- [1] Hille, E. and Phillips, R. S. Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Collog. Publ. 31, 1957
- [2] Yosida, K. Functional analysis, Springer 1965
- [3] Kōmura, T. Semi-groups of operators in locally convex spaces, to appear.
- [4] Lions, J. Les semi-groupes distributions, Portugal. Math. 19 (1960), 141-164.

B. 非線形発展方程式に関するもの

- [1] Browder, F. E. Nonlinear equations of evolution, Ann. of Math. 80 (1964) 485-523.
- [2] Kato, T. Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Sympos. Appl. Math. XVII, 50-67.

Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1965.

[3] Segal, I. E. Nonlinear semi-groups, Ann. of Math.
78 (1963) 339-364.

[4] Lions, J. Équations différentielles opérationnelles,
Springer, 1961

[5] Sobolevskii, P. E. On the use of fractional powers of
self-adjoint operators for the investigation of some nonlinear
differential equations in Hilbert space (russian)
Dokl. Akad. Nauk SSSR 130, No. 2 (1960) 272-275

C. 非線形半群及び monotone 集合に関するもの

[1] Komura, Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space,
to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] Kato, T. Nonlinear semigroups and evolution equations,
to appear in J. Math. Soc. Japan.

[3] Neuberg, J. W. An exponential formula for one-parameter
semi-groups of nonlinear transformations, J. Math. Soc. Japan
18 (1966) 154-157.

[4] Minty, G. J. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert
space, Duke Math. J. 29 (1962) 541-546.