

有理点を持たない楕円曲線について

上越教育大 中川 仁 (Jin Nakagawa)

山口大 教養 堀江 邦明 (Kuniaki Horie)

§ 1. Introduction.

この講演の目的は、「有理数体上定義された楕円曲線で、Mordell-Weil 群が自明であるようなものが無限個存在すること」の新証明を与えることである。この事実は基本的には既知のことである。それは、ここ数年間に発表された文献にあるいくつかの定理の直接の帰結である。実際に、 $E/\mathbb{Q}$ を類数 1 の虚 2 次体の整数環を虚数乗法に持つような楕円曲線とする。Waldspurger の定理によって、原始的 2 次指標 χ で、 $L(1, E\chi) \neq 0$ となるものが無限個存在する。ここで、 $E\chi$ は E の χ による twist である。このとき、Coates-Wiles の定理によって、 $E\chi(\mathbb{Q})$ は有限群である。さらに、 E を適当に選んでおけば虚数乗法の理論によって、 $E\chi(\mathbb{Q})_{\text{tor}} = 0$ となる。したがって、 $E\chi(\mathbb{Q}) = 0$ となる。

我々は、全く異なった方法によって上の事実を証明する。

ディオファントス方程式 $y^2 = x^3 + a$ ($a \neq 0$) の有理数解の非存在については、Fueter, Brunner, Mordell, K.-L. Chang 等によって研究されてきた。彼等は、有理数解が存在しないための十分条件を 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{a}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3a})$ の不変量を用いて与えている (Mordell [10])。それらの中で最も簡単な条件は、Fueter によって与えられた条件である。

D を 2 次体の判別式になるような整数とし、 $h(D)$ をその 2 次体の類数とする。また、 E_D を、方程式 $y^2 = x^3 + D$ で定義される $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする。このとき、

定理 A (Fueter, 1930) $D < 0$, $D \equiv 8$ or $12 \pmod{16}$,
 $D \equiv 2 \pmod{9}$ かつ $3 \nmid h(D)$ ならば、 $E_D(\mathbb{Q}) = 0$.

したがって、このような条件を満たす D が無限個存在することがいえればよい。これに関して、次の結果が知られている。

定理 B (Hartung, 1974) 任意の素数 p に対して、 $p \nmid h(D)$ となる $D < 0$ が無限個存在する。

岩沢健吉氏は 1970 年の大阪大における講演の中で、上の二つの結果を紹介し、「定理 B を合同条件を付けた形に拡張できれば、原点 ∞ 以外の有理点を持たない楕円曲線の無限存在の証明を得られる」と指摘した。我々はこの方針に従う。定理 B は Kronecker の類数関係式を用いて証明されるが、その証

明を改良して合同条件を付けることは非常に難しいと思われる (Horie [9] を参照)。しかし、幸いなことに $p = 3$ に対してだけは次の非常に強い定量的な結果が知られている。

定理 C (Davenport-Heilbronn, 1971) $h_3(D)$ によって、2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ のイデアル類 c で $c^3 = 1$ となるものの個数を表す。このとき、

$$\sum_{-X < D < 0} h_3(D) \sim 2 \sum_{-X < D < 0} 1 \quad (X \rightarrow \infty),$$

$$\sum_{0 < D < X} h_3(D) \sim (4/3) \sum_{0 < D < X} 1 \quad (X \rightarrow \infty).$$

特に、

$$\liminf_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{D; -X < D < 0, 3 \nmid h(D)\}}{\#\{D; -X < D < 0\}} \geq \frac{1}{2},$$

$$\liminf_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{D; 0 < D < X, 3 \nmid h(D)\}}{\#\{D; 0 < D < X\}} \geq \frac{5}{6}.$$

これは 2 元 3 次形式の類数に関する Davenport の結果を用いて証明される。我々は定理 C を判別式に任意の合同条件を付けた形に拡張して、次の結果を得た。

定理 1 m, N を次の条件 (*) を満たす自然数とする。

(*) m, N が奇素数 p を公約数に持てば、 $p^2 \mid N$, $p^2 \nmid m$.

N が偶数ならば、(i) $4 \mid N$, $m \equiv 1 \pmod{4}$ または、

(ii) $16 \mid N$, $m \equiv 8 \text{ or } 12 \pmod{16}$.

このとき、定理 C において判別式 D にすべて合同条件 $D \equiv m$

mod N を付けた主張は正しい。

定理 1 と後述の命題 1 から直ちに次を得る。

定理 2

$$\liminf_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{D; -X < D < 0, E_D(Q) = 0\}}{X} \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

特に、方程式 $y^2 = x^3 + D$ で定義される Q 上の楕円曲線で原点 ∞ 以外には有理点をもたないものが無限個存在する。

定理 1 にはもう一つ別の応用がある。有限次代数体 K と素数 p に対して、 $\lambda_p(K)$ を K の basic Z_p -extension の岩沢 λ 不変量とする。 Z_p -extension の理論においてよく知られているように、 p の K における素因子が唯一かつ K の類数が p と素ならば、 $\lambda_p(K) = 0$ である。特に、 $D \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3}$ ならば、 $\lambda_3(Q(\sqrt{D})) = 0$ である。したがって、定理 1 と後述の命題 1 から直ちに次を得る。

定理 3

$$\liminf_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{D; -X < D < 0, \lambda_3(Q(\sqrt{D})) = 0\}}{\#\{D; -X < D < 0\}} \geq \frac{5}{16},$$

$$\liminf_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{D; 0 < D < X, \lambda_3(Q(\sqrt{D})) = 0\}}{\#\{D; 0 < D < X\}} \geq \frac{25}{48}.$$

§ 2. 定理 1 の証明

まず、Davenport-Heilbronn の証明の主なアイデアを復習する。 K/Q を 3 次体とし、 D_K を K の判別式とする。 K の

整数環 O_K の基底 $1, \omega, \nu$ をとり、

$f_K(x, y) = \Delta^{1/2}(x\omega + y\nu) / D_K^{1/2}$ とおく。ここで、 $\Delta(\alpha)$ は K の元 α の判別式を表す。 $f_K(x, y)$ は整数係数 2 元 3 次形式であり、原始的 (係数の最大公約数が 1)、 Q 上既約かつ f_K の判別式 $D(f_K)$ は K の判別式 D_K に一致することがわかる。もちろん、 $f_K(x, y)$ は基底 $1, \omega, \nu$ のとり方によるが、 f_K の $GL(2, Z)$ -同値類 $[f_K]$ は基底のとり方によらない。そこで、写像

$$\begin{array}{ccc} \{3\text{次体}\} & \rightarrow & \{\text{整数係数 2 元 3 次形式の } GL(2, Z)\text{-同値類}\} \\ \psi & & \psi \\ K & \longmapsto & [f_K] \end{array}$$

を考える。この写像は単射であり、像も合同条件で決定される。このことから、ある条件を満たす 3 次体の個数を数えるには、対応する条件を満たす整数係数 2 元 3 次形式の同値類の個数を数えればよいことになる。今、非アーベルな 3 次体 K/Q に対して、 L をその Q 上のガロア閉包、 F を L に含まれる 2 次体とする。このとき、 L/F が不分岐 3 次巡回拡大となるための必要十分条件は、 $D_K = D_F$ となることである。さらに類体論によって、2 次体の判別式 D に対して、

$$(h_3(D) - 1)/2 = \#\{3\text{次体 } K/Q; D_K = D\} \quad \text{----- (1)}$$

が成立する。そこで、整数係数 2 元 3 次形式 f に対して次の合同条件 (**) を考える。

(**) すべての奇素数 p に対して、 $D(f) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$,

$$D(f) \equiv 1 \pmod{4} \text{ or } D(f) \equiv 8 \text{ or } 12 \pmod{16}.$$

この条件 (**) を満たす整数係数 2 元 3 次形式 f 全体の集合を U とする。自然数 N に対して、 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -係数の 2 元 3 次形式の全体を $\Phi(N)$ とする。このとき、(1) の和をとれば、

$$\begin{aligned} \sum_{-X < D < 0} (h_3(D) - 1)/2 &= \sum_{-X < D < 0} \#\{3 \text{ 次体 } K/\mathbb{Q}; D_K = D\} \\ &\sim \#\{[f]; -X < D(f) < 0, (**) \text{ を満たす}\} \\ &\sim \prod_p \frac{\#\{f \pmod{q}; f \in U\}}{\#\Phi(q)} \#\{[f]; -X < D(f) < 0\} \end{aligned}$$

(2)

ここで、(2) の右辺の積はすべての素数 p についての無限積であり、奇素数 p に対しては $q = p^2$, $p = 2$ に対しては $q = 16$ である。この無限積はリーマンの ζ 関数を用いて、

$$\prod_p (1 - p^{-2})^2 = \zeta(2)^{-2} \quad (3)$$

と計算される。また、Davenport [3] の結果から、

$$\#\{[f]; -X < D(f) < 0\} \sim (\zeta(2)/4)X \quad (4)$$

が成立する。さらに、よく知られているように、

$$\sum_{-X < D < 0} 1 \sim [2\zeta(2)]^{-1}X \quad (5)$$

が成立する。したがって、(2) ~ (5) より、

$$\sum_{-X < D < 0} h_3(D) \sim \zeta(2)^{-1}X \sim 2 \sum_{-X < D < 0} 1 \quad (X \rightarrow \infty)$$

を得る。(2)の証明における一つの重要なポイントは、すべての素数 p に対する合同条件 (**) を満たす 2 元 3 次形式 f の類を数えることを、合同条件を考えない場合の結果に帰着させることである。したがって、与えられた自然数 N の素因数であるような有限個の素数 p の部分だけ合同条件 (**) を変更しても、全く同じ議論ができる。これから、定理 1 を証明するためには次の二つの命題を証明すればよい。

命題 1 m, N を定理 1 の (*) を満たす自然数とすれば、

$$\begin{aligned} -X < D < 0, D \equiv m \pmod{N} &\sim 0 < D < X, D \equiv m \pmod{N} \\ &\sim [\varphi(N)^{-1} \prod_{p|N} q(p+1)^{-1}] [2\epsilon(2)]^{-1} X \end{aligned}$$

ここで、 φ はオイラー関数、 $q=p$ ($p>2$)、 $q=4$ ($p=2$) である。

命題 2 m, N を定理 1 の (*) を満たす自然数とし、

$\Phi(N, m) = \{f \in \Phi(N); D(f) = m\}$ とおけば、

$$\frac{\#\Phi(N, m)}{\#\Phi(N)} = \frac{1}{N} \prod_{p|N} \frac{q}{p} (1 - p^{-2})$$

ここで、 $q=p$ ($p>2$)、 $q=4$ ($p=2$) である。

命題 1 は解析的整数論においてよく知られた方法で証明される。命題 2 は $N=p^e$ の場合に帰着され、その場合には指数 e に関する帰納法で証明される。

§ 3. 超楕円曲線の場合について

Gross-Rohlich は、フェルマー曲線のヤコビ多様体に関する論文 [7] の中で、虚 2 次体の類数に関する次の二つの定理を証明した。

定理 D (Gross-Rohlich, 1978) $p=5, 7$ or 11 とすると、有理数 $V \neq 1$, $1-4V^p < 0$ に対して、虚 2 次体 $Q(\sqrt{1-4V^p})$ の類数は p で割れる。

定理 E (Gross-Rohlich, 1978) p を奇素数とすると、自然数 $V > 1$ に対して、虚 2 次体 $Q(\sqrt{1-4V^p})$ の類数は p で割れる。

そこで、自然数 $n \geq 3$ と虚 2 次体の判別式 D に対して、 $C_{n,D}$ によって方程式 $Dy^2 = 1 - 4x^n$ で定義される Q 上の超楕円曲線 (affine 平面曲線とみる) を表すとする。今、 $n=5, 7, 11$ のいずれかとし、 $h(D)$ が n で割れないような D をとる (定理 A によって、このような D は無限個存在する)。このとき、定理 D によって、 $C_{n,D}$ は有理点を持たない。また、 $n=3$ に対しては定理 1 と Feuter [5] の結果を、 $n=4$ に対しては Aigner [1] と Nagell [11] の結果を用いて、同様の結論がでる。以上をまとめると、

定理 4 n が $3, 4, 5, 7, 11$ のどれかの倍数ならば、 $C_{n,D}(Q) = \emptyset$ となる D が無限個存在する。

整数点についても、定理 A と定理 E から、次を得る。

定理 5 3 以上の任意の n に対して、 $C_{n,p}(Z) = \emptyset$ となる D が無限個存在する。特に、任意の $g \geq 1$ に対して、種数 g の超楕円曲線で整数点を持たないものが無限個存在する。

References

1. A.Aigner, Über die Möglichkeit von $x^4+y^4=z^4$ in quadratischen Körpern. Jahresber.d.Deutschen Math. Verein. 43 (1934), 226-229.
2. J.Coates and A.Wiles, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. Invent. math. 39 (1977), 223-251.
3. H.Davenport, On the class-number of binary cubic forms (I). J. London Math. Soc. 26 (1951), 183-192.
4. H.Davenport and H.Heilbronn, On the density of discriminants of cubic fields II. Proc. Royal Soc. London Ser. A 322 (1971), 405-420.
5. R.Fueter, Die Diophantische Gleichung $\xi^3+\eta^3+\zeta^3=0$. Sitzungsberichte Heidelberg Akad. d. Wiss. 25. Abh. (1913), 25pp.
6. R.Fueter, Über kubische diophantische Gleichungen.

- Comm. Math. Helv. 2 (1930), 69-89.
7. B.Gross and D.Rohrlich, Some results on the Mordell-Weil group of the Jacobian of the Fermat curve. Invent. math. 44 (1978), 201-220.
 8. P.Hartung, Proof of the existence of infinitely many imaginary quadratic fields whose class number is not divisible by 3. J. Number Theory 6 (1974), 276-278.
 9. K.Horie, A note on basic Iwasawa λ -invariants of imaginary quadratic fields. Invent. math. 88 (1987), 31-38.
 10. L.J.Mordell, Diophantine equations. New York: Academic Press 1969.
 11. T.Nagell, Sur la résolubilité de l'équation $x^2+y^2+z^2=0$ dans un corps quadratique. Acta Arithm. 21 (1972), 35-43.
 12. J.L.Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, J. Math. Pures et Appl. 60 (1981), 375-484.