

# Multidimensional Brownian local times in the Malliavin calculus

高信 敏 (Satoshi Takanobu)

金沢大学自然科学研究科 (Graduate School of Natural Science and Technology,  
Kanazawa University)

## 1. 問題と結果

$(W, P)$  を  $r$  次元 Wiener 空間 ( $r \geq 2$ ) とする. 我々の問題は, 次の通り:

**問題.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とするとき, 局所時間  $L_T^x$  “=”  $\int_0^T \delta_x(w_s) ds$  はどの一般 Wiener 関数のクラス  $\mathfrak{D}_p^{-\alpha}$  に属するのか?

既知のこと この問について, Imkeller-Weisz ([1]) による次の結果がある:

**定理.**  $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}, T > 0$  とする. このとき  $\alpha > r/2 - 1$  に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_{2, -\alpha} = 0.$$

この定理より

$$L_T^x := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \text{ in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha},$$

よって  $L_T^x \in \mathfrak{D}_2^{-\alpha}$  ( $\alpha > \frac{r}{2} - 1$ ). しかしながら, 彼らの方法では, 我々の問題は無理. 何となれば, 彼らの方法は Itô-Wiener 展開を使うやり方だから.

動機 一般 Wiener 関数のクラス  $\mathfrak{D}_p^{-\alpha}$  にこだわる理由は次の通り. 渡辺 ([4], [5]) による次の事実が知られている:

**Fact.**  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^r$  が Malliavin の意味で regular のとき, Donsker の  $\delta$ -関数  $\delta_x(F)$  について次が成り立つ:

$$\delta_x(F) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \text{ if } \alpha > r \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

さらに  $F$  が 1 次の Wiener chaos ならば

$$\delta_x(F) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \text{ if and only if } \alpha > r \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

$F(w) = w_s (s > 0)$  は明らかに regular な 1 次の Wiener chaos であるから

$$\delta_x(w_s) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \stackrel{\text{必}+}{\iff} \alpha > r\left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (1)$$

局所時間  $L_T^x$  は形式的に

$$L_T^x = \int_0^T \delta_x(w_s) ds$$

となる. 各  $\delta_x(w_s)$  について (1) が分かったのだから, 次は, これを  $s$  について積分した  $L_T^x$  に対して, 上のようなことが分かってもいいのではないか, というのが, 我々がこの問題に手を染めた動機である.

結果 次が我々の結果である:

**Theorem.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.

(i)  $\forall p \in [1, \infty)$  に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1 - \frac{1}{p})(r-2)} \mathfrak{D}_p^{-\alpha}.$$

(ii)  $p \in [2, \infty), r = 2$  のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \stackrel{\text{必}+}{\iff} \alpha > 0.$$

(iii)  $p \in \mathbb{N} \cap [2, \infty), r \geq 3$  のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \stackrel{\text{必}+}{\iff} \alpha > (1 - \frac{1}{p})(r-2).$$

(iv) 一般に  $p \in (2, \infty), r \geq 3$  に対しては

$$L_T^x \notin \mathfrak{D}_p^{-\alpha}, \quad \forall \alpha < (1 - \frac{1}{p})(r-2).$$

実は, 我々が提起した問に対する答えは

$$\left[1 \leq p < \infty, \alpha > 0 \text{ に対して, } L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \stackrel{\text{必}+}{\iff} \alpha > (1 - \frac{1}{p})(r-2)\right]$$

であろうと予想している. 残念ながら, 上の Theorem はこの予想を完全には解決していない. 即ち, “ $\implies$ ” 部分が, 次のように不十分である:

- $p \in [1, 2)$  のときは, 完全に open である,
- $p \in [2, \infty) \setminus \mathbb{N}, r \geq 3$  のときは, 「 $\alpha \geq (1 - \frac{1}{p})(r-2)$ 」 と等号が付いてしまう分

↑  
ここ

だけ主張が弱い. 即ち,  $L_T^x$  が  $\mathfrak{D}_p^{-(1-1/p)(r-2)}$  に属するのか or 属さないのかが確定していない.

しかしながら, ここで展開する方法では, この Theorem の主張がベストであろうと思われる.

## 2. 定理の再証明と 2, 3 の補足

3つの補題を用意する:

**補題 1.**  $T > 0$  とする.  $\beta > 0, \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^r$  に対して

$$\begin{aligned} & (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} p^{(r)}(\varepsilon + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt. \end{aligned}$$

**証明 等式**

$$\begin{aligned} (I - L)^{-\beta} F(w) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} T_t F(w) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \int_{\mathbb{W}} F(e^{-t} w + \sqrt{1 - e^{-2t}} \omega) P(d\omega) \end{aligned}$$

より

左辺

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \int_{\mathbb{W}} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, e^{-t} w_s + \sqrt{1 - e^{-2t}} \omega_s - x) ds P(d\omega) \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\varepsilon, e^{-t} w_s + \sqrt{1 - e^{-2t}} y - x) p^{(r)}(s, y) dy \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \int_{\mathbb{R}^r} \left( \frac{1}{1 - e^{-2t}} \right)^{r/2} p^{(r)}\left( \frac{\varepsilon}{1 - e^{-2t}}, \frac{x - e^{-t} w_s}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} - y \right) p^{(r)}(s, y) dy \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} \left( \frac{1}{1 - e^{-2t}} \right)^{r/2} p^{(r)}\left( \frac{\varepsilon}{1 - e^{-2t}} + s, \frac{x - e^{-t} w_s}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \right) dt \\ &= \text{右辺}. \end{aligned}$$

**補題 2.**  $T > 0$  とする.  $\beta > 0, \delta_1, \delta_2 \geq 0, x \in \mathbb{R}^r$  に対して

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} p^{(r)}(\delta_1 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt \right) \right. \\ & \quad \cdot \left. \left( \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} p^{(r)}(\delta_2 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt \right) \right] \\ &= \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \Phi_{\delta_1 \delta_2}(s, \sigma, v; x). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \Phi_{\delta_1 \delta_2}(s, \sigma, v; x) \\ &= \left( \frac{1}{\delta_1 \delta_2 + \delta_1 \sigma s + \delta_2 s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v} \sigma s}{2(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 \sigma s + \delta_2 s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\} \\ &+ \left( \frac{1}{\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \sigma s + \delta_1 s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v} \sigma s}{2(\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \sigma s + \delta_1 s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\}. \end{aligned}$$

証明 まず

左辺

$$\begin{aligned} &= E \left[ \int_0^T \int_0^T ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \right. \\ &\quad \left. p^{(r)}(\delta_1 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) p^{(r)}(\delta_2 + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right] \\ &= E \left[ \iint_{0 < s' < s < T} ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \right. \\ &\quad \left( p^{(r)}(\delta_1 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) p^{(r)}(\delta_2 + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right. \\ &\quad \left. + p^{(r)}(\delta_1 + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) p^{(r)}(\delta_2 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) \right) \left. \right] \\ &= \iint_{0 < s' < s < T} ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \\ &\quad \times \left( E[p^{(r)}(\delta_1 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) p^{(r)}(\delta_2 + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'})] \right. \\ &\quad \left. + E[p^{(r)}(\delta_1 + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) p^{(r)}(\delta_2 + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s)] \right) \\ &=: (*). \end{aligned}$$

ここで  $0 < s' < s < \infty$ ,  $\eta, \eta' \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} & E[p^{(r)}(\eta' + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) p^{(r)}(\eta + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} u') p^{(r)}(\eta + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} u) \\ &\quad \times p^{(r)}(s', u') p^{(r)}(s - s', u - u') du du' \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} u') p^{(r)}(s', u') du' \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} u) p^{(r)}(s - s', u - u') du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'}u') p^{(r)}(s', u') du' (e^{2t})^{r/2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t}\eta + s(e^{2t} - 1), e^t x - u) p^{(r)}(s - s', u - u') du \\
&= (e^{2t})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'}u') p^{(r)}(s', u') \\
&\quad \times p^{(r)}(e^{2t}\eta + se^{2t} - s', e^t x - u') du' \\
&= (e^{2t})^{r/2} (e^{2t'})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t'}\eta' + s'(e^{2t'} - 1), e^{t'}x - u') p^{(r)}(s', u') \\
&\quad \times p^{(r)}(e^{2t}\eta + se^{2t} - s', e^t x - u') du' \\
&= (e^{2t})^{r/2} (e^{2t'})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(A, ax - u') p^{(r)}(B, u') p^{(r)}(C, bx - u') du' \\
&\quad \left[ \begin{aligned} &\text{ここで } A = e^{2t'}\eta' + s'(e^{2t'} - 1), B = s', C = e^{2t}\eta + se^{2t} - s', a = e^{t'}, b = e^t \end{aligned} \right] \\
&= (e^{2t})^{r/2} (e^{2t'})^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi A} \right)^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi B} \right)^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi C} \right)^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} \exp \left\{ -\frac{|ax - u'|^2}{2A} - \frac{|u'|^2}{2B} - \frac{|bx - u'|^2}{2C} \right\} du' \\
&= (e^{2t})^{r/2} (e^{2t'})^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi A} \right)^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi B} \right)^{r/2} \left( \frac{1}{2\pi C} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{a^2(B+C) + b^2(A+B) - 2abB}{2(BC+CA+AB)} |x|^2 \right\} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^r} \exp \left\{ -\frac{BC+CA+AB}{2ABC} |u' - \frac{(aC+bA)B}{BC+CA+AB} x|^2 \right\} du' \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \left( \frac{e^{2t}e^{2t'}}{BC+CA+AB} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{a^2(B+C) + b^2(A+B) - 2abB}{2(BC+CA+AB)} |x|^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \left( \frac{e^{2t}e^{2t'}}{e^{2t}e^{2t'}(\eta+s)(\eta'+s') - (s')^2} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{e^{2t}e^{2t'}(\eta+s) + e^{2t}e^{2t'}(\eta'+s') - 2e^t e^{t'} s'}{2(e^{2t}e^{2t'}(\eta+s)(\eta'+s') - (s')^2)} |x|^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \left( \frac{1}{(\eta+s)(\eta'+s') - (s')^2 e^{-2t}e^{-2t'}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\eta+s+\eta'+s'-2e^{-t}e^{-t'}s'}{2((\eta+s)(\eta'+s') - (s')^2 e^{-2t}e^{-2t'})} |x|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
(*) &= \iint_{0 < s' < s < T} ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+t')} (tt')^{\beta-1} dt dt' \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \\
&\quad \times \left( \left( \frac{1}{(\delta_1+s)(\delta_2+s') - (s')^2 e^{-2(t+t')}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1+s+\delta_2+s'-2e^{-(t+t')}s'}{2((\delta_1+s)(\delta_2+s') - (s')^2 e^{-2(t+t')})} |x|^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{(\delta_2+s)(\delta_1+s') - (s')^2 e^{-2(t+t')}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_2+s+\delta_1+s'-2e^{-(t+t')}s'}{2((\delta_2+s)(\delta_1+s') - (s')^2 e^{-2(t+t')})} |x|^2 \right\} \right) \\
&=: (**).
\end{aligned}$$

ここで変数変換  $t = u, t + t' = v$ , その後で  $s' = s\sigma$  をすると

$$(**) = \int_0^T ds \int_0^s ds' \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \left( \frac{1}{(\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1+s+\delta_2+s'-2e^{-v}s'}{2((\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\} \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{(\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_2+s+\delta_1+s'-2e^{-v}s'}{2((\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\} \right) \\
& = \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \\
& \quad \times \left( \left( \frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\} \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v})} |x|^2 \right\} \right). \blacksquare
\end{aligned}$$

補題 3. 簡単のため

$$\Phi(s, \sigma, v; x) := \sup_{\substack{(\delta_1, \delta_2) \in [0, 1]^2; \\ \delta_1\delta_2=0 \text{ or } \delta_1=\delta_2}} \Phi_{\delta_1\delta_2}(s, \sigma, v; x)$$

とおく. このとき  $\forall T > 0, \forall \beta > \frac{1}{2}(\frac{r}{2} - 1), \forall x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  に対して

$$\int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} \Phi(s, \sigma, v; x) dv < \infty.$$

証明  $\forall x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  を固定する.  $0 < \varepsilon < 1, 0 < \eta < 1$  とする.  $(s, \sigma, v)$  の積分範囲を

Case 1  $(0, T) \times (0, 1 - \varepsilon) \times (0, \infty),$

Case 2  $(0, T) \times [1 - \varepsilon, 1) \times (\eta, \infty),$

Case 3  $(0, T) \times [1 - \varepsilon, 1) \times (0, \eta]$

の 3 つに分けて考える.

Case 1. このときは

$$\begin{aligned}
\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s & \geq \delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2\sigma s \\
& = \delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma) \\
& \geq \delta_1 + \delta_2 + s\varepsilon \\
& \geq \varepsilon(\delta_1 + \delta_2 + s), \\
\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v} & \leq \delta_1\delta_2 + \delta_1s + \delta_2s + s^2 \\
& \leq (\delta_1 + \delta_2 + s)^2, \\
\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v} & \leq \delta_1\delta_2 + \delta_2s + \delta_1s + s^2
\end{aligned}$$

$$\leq (\delta_1 + \delta_2 + s)^2$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}} \\ &= \frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}} \\ &\geq \frac{\varepsilon(\delta_1 + \delta_2 + s)}{\delta_1 + \delta_2 + s} \frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}}, \\ &\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_1\delta_2}(s, \sigma, v; x) &\leq \left(\frac{1}{X}\right)^r \exp\left\{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2X}\right\} \Big|_{X=\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{Y}\right)^r \exp\left\{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2Y}\right\} \Big|_{Y=\sqrt{\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}}} \\ &\leq \frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{\varepsilon^r|x|^{2r}} \left[ \odot e^{-a} \leq \left(\frac{t}{e}\right)^t \frac{1}{a^t}, \forall a > 0, \forall t \geq 0 \text{ であるから.} \right. \\ &\quad \left. \text{ただし } t=0 \text{ のときは } \left(\frac{t}{e}\right)^t = 1 \text{ と理解する.} \right]. \end{aligned}$$

故に

$$\Phi(s, \sigma, v; x) \leq \frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{\varepsilon^r|x|^{2r}}.$$

Case 2. このときは

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s &= \delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s + 2(1 - e^{-v})\sigma s - 2\sigma s \\ &= \delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma) + 2(1 - e^{-v})\sigma s \\ &\geq \delta_1 + \delta_2 + 2(1 - e^{-\eta})(1 - \varepsilon)s \\ &\geq (1 \wedge 2(1 - e^{-\eta})(1 - \varepsilon))(\delta_1 + \delta_2 + s) \end{aligned}$$

であるから, Case 1 と同じようにして

$$\Phi(s, \sigma, v; x) \leq \frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{(1 \wedge 2(1 - e^{-\eta})(1 - \varepsilon))^r|x|^{2r}}.$$

Case 3. このときは

$$\begin{aligned}
& \delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s \\
&= \delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma) + 2\frac{1-e^{-v}}{v}v\sigma s \\
&\geq \delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma) + 2\frac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1 - \varepsilon)vs \\
&\quad \left[ \odot v \mapsto \frac{1-e^{-v}}{v} \text{ は decreasing であるから} \right] \\
&= \delta_1 + \delta_2 + s\left(1 - \sigma + 2\frac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1 - \varepsilon)v\right), \\
&\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v} \\
&= \delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma(1 - \sigma)s^2 + \frac{1-e^{-2v}}{2v}2v\sigma^2s^2 \\
&\begin{cases} \geq \delta_1\delta_2 + \delta_1(1 - \varepsilon)s + \delta_2s + (1 - \varepsilon)(1 - \sigma)s^2 + \frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1 - \varepsilon)^22vs^2 \\ \leq \delta_1\delta_2 + \delta_1s + \delta_2s + (1 - \sigma)s^2 + 2vs^2, \end{cases} \\
&\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v} \\
&\begin{cases} \geq \delta_1\delta_2 + \delta_2(1 - \varepsilon)s + \delta_1s + (1 - \varepsilon)(1 - \sigma)s^2 + \frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1 - \varepsilon)^22vs^2 \\ \leq \delta_1\delta_2 + \delta_1s + \delta_2s + (1 - \sigma)s^2 + 2vs^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで  $0 < \varepsilon < 1, 0 < \eta < 1$  を

$$2\frac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1 - \varepsilon) > 1, \frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1 - \varepsilon)^2 > \frac{1}{2}, 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}$$

となるように十分小さくとると<sup>注1</sup>

$$\begin{aligned}
& \delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s \geq \delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma + v), \\
& \delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v} \geq \delta_1\delta_2 + \delta_1s\frac{1}{2} + \delta_2s + \frac{1}{2}(1 - \sigma)s^2 + vs^2 \\
& \geq \frac{1-\sigma+v}{2}(\delta_1\delta_2 + \frac{\delta_1+\delta_2}{2}s + s^2) \\
& \geq \begin{cases} \frac{1-\sigma+v}{2}s^2 & \text{if } \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1-\sigma+v}{4}(\delta + s)^2 & \text{if } \delta_1 = \delta_2 = \delta, \end{cases} \\
& \delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v} \geq \begin{cases} \frac{1-\sigma+v}{2}s^2 & \text{if } \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1-\sigma+v}{4}(\delta + s)^2 & \text{if } \delta_1 = \delta_2 = \delta, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2 + \delta_1\sigma s + \delta_2s + \sigma s^2 - \sigma^2s^2e^{-2v}} \geq \frac{\delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma + v)}{\delta_1\delta_2 + (\delta_1 + \delta_2)s + 2s^2(1 - \sigma + v)}$$

<sup>注1</sup>  $1 - \varepsilon \geq \frac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1 - \varepsilon) \geq \frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1 - \varepsilon)^2$  だから, 実は  $\frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1 - \varepsilon)^2 > \frac{1}{2}$  だけでよい.



$$\begin{aligned}
&\geq \begin{cases} \frac{1}{2s} & \text{if } \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1}{2(\delta+s)} & \text{if } \delta_1 = \delta_2 = \delta, \end{cases} \\
\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}} &\geq \frac{\delta_1 + \delta_2 + s(1 - \sigma + v)}{\delta_1\delta_2 + (\delta_1 + \delta_2)s + 2s^2(1 - \sigma + v)} \\
&\geq \begin{cases} \frac{1}{2s} & \text{if } \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1}{2(\delta+s)} & \text{if } \delta_1 = \delta_2 = \delta. \end{cases}
\end{aligned}$$

よって  $\delta_1\delta_2 = 0$  のときは

$$\begin{aligned}
\Phi_{\delta_1\delta_2}(s, \sigma, v; x) &\leq 2 \left( \frac{2}{1 - \sigma + v} \frac{1}{s^2} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4s} \right\} \\
&\leq \frac{2^{1+\frac{3}{2}r} (re^{-1})^r}{|x|^{2r}} \left( \frac{1}{1 - \sigma + v} \right)^{r/2};
\end{aligned}$$

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$  のときは

$$\begin{aligned}
\Phi_{\delta_1\delta_2}(s, \sigma, v; x) &\leq 2 \left( \frac{4}{1 - \sigma + v} \frac{1}{(\delta + s)^2} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4(\delta + s)} \right\} \\
&\leq \frac{2^{1+3r} (re^{-1})^r}{|x|^{2r}} \left( \frac{1}{1 - \sigma + v} \right)^{r/2}.
\end{aligned}$$

故に

$$\Phi(s, \sigma, v; x) \leq \frac{2^{1+3r} (re^{-1})^r}{|x|^{2r}} \left( \frac{1}{1 - \sigma + v} \right)^{r/2}.$$

3つの case を1つにまとめれば

$$\begin{aligned}
&\Phi(s, \sigma, v; x) \\
&\leq \frac{2^{1+r} (re^{-1})^r}{|x|^{2r}} \left( \frac{1}{\varepsilon^r} \mathbf{1}_{(0, 1-\varepsilon)}(\sigma) + \frac{1}{(1 \wedge 2(1 - e^{-\eta})(1 - \varepsilon))^r} \mathbf{1}_{[1-\varepsilon, 1)}(\sigma) \mathbf{1}_{(\eta, \infty)}(v) \right. \\
&\quad \left. + 4^r \mathbf{1}_{[1-\varepsilon, 1)}(\sigma) \mathbf{1}_{(0, \eta]}(v) \left( \frac{1}{1 - \sigma + v} \right)^{r/2} \right)
\end{aligned}$$

という評価を得る。補題3にある積分の収束を見なければならぬが、問題になるのはこの評価式の右辺3項目の積分の収束性である。これを

$$\begin{aligned}
&\int_{1-\varepsilon}^1 d\sigma \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} \left( \frac{1}{1 - \sigma + v} \right)^{r/2} dv \\
&= \int_0^\varepsilon d\tau \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} \left( \frac{1}{\tau + v} \right)^{r/2} dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} dv \int_0^\varepsilon \left( \frac{1}{\tau+v} \right)^{r/2} d\tau \\
&= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} dv \int_0^{\varepsilon/v} v^{-r/2+1} (\theta+1)^{-r/2} d\theta \\
&\quad \left[ \odot \text{変数変換 } \tau = v\theta \text{ より} \right] \\
&= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-r/2} dv \int_0^{\varepsilon/v} (\theta+1)^{-r/2} d\theta
\end{aligned}$$

と書き直してみる.  $r=2$  のときは

$$\int_0^{\varepsilon/v} (\theta+1)^{-r/2} d\theta = \log\left(\frac{\varepsilon}{v} + 1\right) = o(v^{-\kappa}) \quad \text{as } v \downarrow 0, \forall \kappa > 0$$

に注意すれば,  $\beta > \frac{1}{2}(\frac{r}{2}-1)$  により  $\kappa > 0$  を十分小さくにとって  $2\beta - \frac{r}{2} - \kappa + 1 > 0$  とできるので, 確かに積分は収束する.  $r \geq 3$  のときは

$$\int_0^{\varepsilon/v} (\theta+1)^{-r/2} d\theta \leq \int_0^\infty (\theta+1)^{-r/2} d\theta = \frac{2}{r-2} < \infty$$

であるから, やはり  $2\beta - \frac{r}{2} + 1 > 0$  より積分は収束する.

以上のことから補題3の主張が分かる. ■

**定理の証明**  $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ ,  $\alpha > \frac{r}{2} - 1$  とする. 補題2と3より

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s) dt\right)^2\right] \\
&= \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \Phi_{00}(s, \sigma, v; x) < \infty.
\end{aligned}$$

次に補題1と2より

$$\begin{aligned}
&E\left[\left((I-L)^{-\alpha/2} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s) dt\right)^2\right] \\
&= \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \\
&\quad \times \left( \Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s, \sigma, v; x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s, \sigma, v; x) + \Phi_{00}(s, \sigma, v; x) \right).
\end{aligned}$$

$\varepsilon \downarrow 0$  のとき

$$\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s, \sigma, v; x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s, \sigma, v; x) + \Phi_{00}(s, \sigma, v; x) \rightarrow 0.$$

$0 < \forall \varepsilon \leq 1$  に対して

$$|\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s, \sigma, v; x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s, \sigma, v; x) + \Phi_{00}(s, \sigma, v; x)| \leq 4\Phi(s, \sigma, v; x).$$

補題 3 より

$$\int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} \Phi(s, \sigma, v; x) dv < \infty$$

であるから, Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( (I - L)^{-\alpha/2} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt \right)^2 \right] \\ & \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

これは

$$L_T^x := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds \text{ exists in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha},$$

そして

$$\begin{aligned} & (I - L)^{-\alpha/2} L_T^x \\ & = \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt \end{aligned}$$

であることを云っている. ■

定理の主張は次のように少しだけ良くなる.

定理'.  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^r)$  with  $\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(y) dy = 1$  は次をみたすと  
する:

$$0 < \exists \delta < \infty \text{ s.t. } \sup_{y \in \mathbb{R}^r} |\varphi(y) e^{\delta|y|^2}| < \infty.$$

このとき  $\forall \alpha > r/2 - 1$  に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s) ds = L_T^x \text{ in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha}.$$

ここで

$$\varphi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon^r} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right).$$

証明 まず次のことに注意:

$$|\varphi(y)| \leq cp^{(r)}\left(\frac{1}{2\delta}, y\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^r. \quad (2)$$

ここで  $c := (\pi/\delta)^{r/2} \sup_{y \in \mathbb{R}^r} |\varphi(y)e^{\delta|y|^2}|$ . 簡単のため

$$F_\varepsilon(w) := \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s) ds$$

とおく. ここで  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}, \varepsilon > 0$ . 補題 1 と全く同じようにして

$$\begin{aligned} & (I - L)^{-\beta} F_\varepsilon(w) \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

(2) より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y) dy \right| \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\delta}, y\right) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y) dy \\ & = cp^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\delta} + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s\right) \end{aligned} \quad (4)$$

今,  $\beta > \frac{1}{2}(l_2 - 1)$  とする. 次を示せばよい:

$$\begin{aligned} & E \left[ \left| (I - L)^{-\beta} F_\varepsilon(w) - \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s) dt \right|^2 \right] \\ & \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

左辺は (3) より 2 乗を展開し, そのあとで平均  $E$  と積分  $ds, dt$  を入れ換えることにより次のようになる:

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^T \int_0^T ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \\ & \quad \times E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y) dy \right. \\ & \quad \cdot \left. \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'}w_{s'} - y) dy \right] \\ & - 2 \int_0^T \int_0^T ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \\ & \quad \times E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y) dy \right. \\ & \quad \cdot \left. \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'}w_{s'} - y) dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \Big] \\
& + \int_0^T \int_0^T ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \\
& \times E \left[ p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right].
\end{aligned}$$

ここで、各  $s, s' \in (0, T)$ ,  $t, t' \in (0, \infty)$  に対して

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s - y) dy \right. \\
& \quad \cdot \left. \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'} - y) dy \right] \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s - y) dy \right. \\
& \quad \times \left. p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right] \\
& = E \left[ p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right].
\end{aligned}$$

また (4) と補題 2 より

$$\begin{aligned}
& \left| E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s - y) dy \right. \right. \\
& \quad \cdot \left. \left. \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'} - y) dy \right] \right| \\
& \leq c^2 E \left[ p^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\delta} + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s\right) p^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\delta} + s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}\right) \right] \\
& = \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \Phi_{\frac{\varepsilon^2}{2\delta}, \frac{\varepsilon^2}{2\delta}}\left(s \vee s', \frac{s \wedge s'}{s \vee s'}, t + t'; x\right) \\
& \leq \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \Phi\left(s \vee s', \frac{s \wedge s'}{s \vee s'}, t + t'; x\right), \\
& \left| E \left[ \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y) p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s - y) dy \right. \right. \\
& \quad \cdot \left. \left. p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right] \right| \\
& \leq c E \left[ p^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\delta} + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s\right) p^{(r)}(s'(1 - e^{-2t'}), x - e^{-t'} w_{s'}) \right] \\
& \leq c \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \Phi_{\frac{\varepsilon^2}{2\delta}, 0}\left(s \vee s', \frac{s \wedge s'}{s \vee s'}, t + t'; x\right) \\
& \leq c \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \Phi\left(s \vee s', \frac{s \wedge s'}{s \vee s'}, t + t'; x\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし  $0 < \varepsilon \leq \sqrt{2\delta}$ . よって補題 3 より

$$\int_0^T \int_0^T ds ds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} e^{-t'} (t')^{\beta-1} dt dt' \Phi\left(s \vee s', \frac{s \wedge s'}{s \vee s'}, t + t'; x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma(2\beta)} \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} \Phi(s, \sigma, v; x) dv \\
&< \infty
\end{aligned}$$

であるから, Lebesgue の収束定理より (5) が直ぐに分かる. ■

**注意 1.**  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$  は明らかに定理' の条件をみたすから

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s) ds = L_T^x \quad \text{in } \mathcal{D}_2^{-\alpha}, \quad \forall \alpha > \frac{r}{2} - 1.$$

これはすでに植村 ([2]) が注意していることである!

補足として, 次の2つの claim が成り立つ:

**Claim 1.**  $\forall \alpha > 0$  に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2, -\alpha} = \infty.$$

**証明** 補題 1, 2 より

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2, -\alpha}^2 \\
&= 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \left( \frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon \sigma s + \varepsilon s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}} \right)^{r/2}.
\end{aligned}$$

よって単調収束定理より

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2, -\alpha}^2 \\
&= 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \frac{1}{s^r} \left( \frac{1}{\sigma(1-e^{-2v}\sigma)} \right)^{r/2} \\
&= 2 \int_0^T s^{1-r} ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \left( \frac{1}{\sigma(1-e^{-2v}\sigma)} \right)^{r/2} \\
&= \infty \quad [\odot r \geq 2 \text{ だから}].
\end{aligned}$$
■

**Claim 2.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする. このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{2, -(r/2-1)} = \infty.$$

証明 まず  $r \geq 3$  のとき. 補題 2 と Fatou の不等式より

$$\begin{aligned}
& \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{2, -(r/2-1)}^2 \\
& \geq 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(r/2-1)} \int_0^\infty e^{-v} v^{r/2-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \\
& \quad \times \left( \frac{1}{s} \right)^r \left( \frac{1}{\sigma(1-\sigma e^{-2v})} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{1+\sigma-2e^{-v}\sigma}{\sigma(1-\sigma e^{-2v})} \frac{|x|^2}{2s} \right\} \\
& =: (\star).
\end{aligned}$$

補題 3 の証明のように  $0 < \kappa < 1, 0 < \eta < 1$  を

$$(1-\kappa) \frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta} > \frac{1}{2}$$

となるように選ぶと,  $1-\kappa < {}^v\sigma < 1, 0 < {}^v v < \eta$  に対して

$$\begin{aligned}
\sigma(1-\sigma e^{-2v}) & \begin{cases} \leq 2(v+1-\sigma) \\ \geq \frac{1}{2}(v+1-\sigma), \end{cases} \\
1+\sigma-2e^{-v}\sigma & \leq 2(v+1-\sigma).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
(\star) & \geq 2 \int_0^T s ds \int_{1-\kappa}^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(r/2-1)} \int_0^\eta e^{-v} v^{r/2-1} dv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r \\
& \quad \times \left( \frac{1}{s} \right)^r \left( \frac{1}{2(v+1-\sigma)} \right)^{r/2} \exp \left\{ -\frac{2|x|^2}{s} \right\} \\
& = 2 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r 2^{-r/2} \int_0^T s^{1-r} e^{-2|x|^2/s} ds \\
& \quad \times \frac{1}{\Gamma(r/2-1)} \int_0^\kappa \int_0^\eta e^{-v} v^{r/2-1} \left( \frac{1}{v+\tau} \right)^{r/2} dv d\tau \\
& = 2 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^r 2^{-r/2} \int_0^T s^{1-r} e^{-2|x|^2/s} ds \\
& \quad \times \frac{1}{\Gamma(r/2-1)} \int_0^\eta e^{-v} v^{-1} \frac{2}{r-2} \left( 1 - \left( \frac{v}{v+\kappa} \right)^{r/2-1} \right) dv \\
& = \infty.
\end{aligned}$$

次に  $r = 2$  のとき. Fatou の不等式より

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(2)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_2^2$$

$$\begin{aligned}
&= \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{s\sigma(2\varepsilon + s(1-\sigma)) + (\varepsilon + s(1-\sigma))\varepsilon} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{2\varepsilon + s(1-\sigma)}{2(s\sigma(2\varepsilon + s(1-\sigma)) + (\varepsilon + s(1-\sigma))\varepsilon)} |x|^2 \right\} \\
&\geq 2 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^T \int_0^1 \frac{1}{s\sigma(1-\sigma)} e^{-|x|^2/2s\sigma} ds d\sigma \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

定理と Claim 2 をまとめて次の theorem が得られる:

**Theorem** ( $p = 2$  の場合). 各  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > r/2-1} \mathcal{D}_2^{-\alpha}, \text{ but } \notin \mathcal{D}_2^{-(r/2-1)}.$$

### 3. $p = 1$ の場合

**Claim 3.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.

(i)  $\beta > 0$  に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_{1, -2\beta} = 0.$$

$$(ii) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_1 = \infty.$$

**証明** まず補題 1 より

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_{1, -2\beta} \\
&= \left\| (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_1 \\
&= E \left[ \left| \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} (p^{(r)}(\varepsilon + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p^{(r)}(\varepsilon' + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s)) dt \right| \right] \\
&\leq \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E \left[ |p^{(r)}(\varepsilon + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) \right. \\
&\quad \left. - p^{(r)}(\varepsilon' + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s)| \right] dt.
\end{aligned}$$



$x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  のとき,  $0 < \delta \leq 1$  に対して

$$\begin{aligned}
& E[p^{(r)}(\delta + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\delta + s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t}y) p^{(r)}(s, y) dy \\
&= (e^{2t})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t}\delta + s(e^{2t} - 1), e^t x - y) p^{(r)}(s, y) dy \\
&= (e^{2t})^{r/2} p^{(r)}(e^{2t}\delta + s e^{2t}, e^t x) \\
&= \left( \frac{1}{2\pi(\delta + s)} \right)^{r/2} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{2(\delta + s)} \right\} \\
&\leq \left( \frac{r}{2\pi e} \right)^{r/2} \frac{1}{|x|^r}.
\end{aligned}$$

よって Lebesgue の収束定理より (i) は上の2つから従う.

次に (ii) についてであるが, これは

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_1 &= \int_0^T E[p^{(r)}(\varepsilon, w_s)] ds \\
&= \int_0^T \left( \frac{1}{2\pi(\varepsilon + s)} \right)^{r/2} ds \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \infty.
\end{aligned}$$

この claim より次が得られる:

**Theorem ( $p = 1$  の場合).** 各  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > 0} \mathfrak{D}_1^{-\alpha}.$$

**注意 2.**  $p = 2$  のときのように「 $L_T^x \notin \mathfrak{D}_1^0 = \mathcal{L}_1$ 」, i.e.,

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_1 \neq 0$$

が成り立つと信じているが, 今のところまだ出来ていない. (ここで  $\mathcal{L}_1$  は  $L_1$ -空間を表わす.)

#### 4. $1 < p < 2$ の場合

**Claim 4.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.  $1 < \forall p < 2, \forall \gamma > (1 - \frac{1}{p})(\frac{r}{2} - 1)$  に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s) ds \right\|_{p, -2\gamma} = 0.$$

この claim の証明のため、次の補題を用意する:

**補題 4.**  $1 \leq p_1 < p_2 < p_3 < \infty$ ,  $\alpha, \beta > 0$  とする.  $F : W \rightarrow [0, \infty)$  を Borel 可測関数とする. このとき

$$\begin{aligned} & \left\| (I - L)^{-\left(\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \frac{p_1}{p_2} \alpha + \frac{p_2-p_1}{p_3-p_1} \frac{p_3}{p_2} \beta\right)} F \right\|_{p_2} \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \frac{p_1}{p_2}} \Gamma(\beta)^{\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1} \frac{p_3}{p_2}}}{\Gamma\left(\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \frac{p_1}{p_2} \alpha + \frac{p_2-p_1}{p_3-p_1} \frac{p_3}{p_2} \beta\right)} \left\| (I - L)^{-\alpha} F \right\|_{p_1}^{\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \frac{p_1}{p_2}} \left\| (I - L)^{-\beta} F \right\|_{p_3}^{\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1} \frac{p_3}{p_2}}. \end{aligned}$$

ここで

$$(I - L)^{-\kappa} F = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\kappa-1} T_t F dt, \quad \kappa > 0$$

は  $[0, \infty]$ -値 Borel 可測関数, そして  $[0, \infty]$ -値 Borel 可測関数  $G$  に対して簡単のため

$$\|G\|_q := (E[G^q])^{1/q} \in [0, \infty], \quad 1 \leq q < \infty$$

とおく.

**証明** 簡単のため  $P, Q > 0$  を

$$P := \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} \frac{p_2}{p_1}, \quad Q := \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} \frac{p_2}{p_3}$$

とおく. このとき  $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$  であるから

$$\begin{aligned} (I - L)^{-\left(\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{Q}\right)} F &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/P + \beta/Q - 1} T_t F dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \int_0^\infty (e^{-t} t^{\alpha-1} T_t F)^{1/P} (e^{-t} t^{\beta-1} T_t F)^{1/Q} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \left( \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} T_t F dt \right)^{1/P} \left( \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} T_t F dt \right)^{1/Q} \\ &\quad \left[ \odot \text{ Hölder の不等式より} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)^{1/P} \Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \left( (I - L)^{-\alpha} F \right)^{1/P} \left( (I - L)^{-\beta} F \right)^{1/Q}. \end{aligned}$$

よって再び Hölder の不等式より  $P', Q' > 0$ ;  $\frac{1}{P'} + \frac{1}{Q'} = 1$  に対して

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( (I - L)^{-\left(\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{Q}\right)} F \right)^{p_2} \right] \\ & \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha)^{1/P} \Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \right)^{p_2} E \left[ \left( (I - L)^{-\alpha} F \right)^{p_2/P} \left( (I - L)^{-\beta} F \right)^{p_2/Q} \right] \end{aligned}$$

$$\leq \left( \frac{\Gamma(\alpha)^{1/P} \Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P + \beta/Q)} \right)^{p_2} E \left[ \left( (I-L)^{-\alpha} F \right)^{p_2 P'/P} \right]^{1/P'} E \left[ \left( (I-L)^{-\beta} F \right)^{p_2 Q'/Q} \right]^{1/Q'}.$$

ここで

$$P' := \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2}, \quad Q' := \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1}$$

とすれば

$$\frac{p_2 P'}{P} = p_1, \quad \frac{p_2 Q'}{Q} = p_3$$

となり、補題の主張は直ちに分かる. ■

**Claim 4 の証明**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする. 簡単のため  $0 < \forall \varepsilon \leq 1$  に対して

$$F_\varepsilon := \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds$$

とおく. 補題 4 より,  $1 < q < 2, \alpha, \beta > 0$  に対して ( $p_1 = 1, p_2 = q, p_3 = 2$  として)

$$\begin{aligned} & \| (I-L)^{-(\frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta)} F_\varepsilon \|_q \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha)^{(2-q)/q} \Gamma(\beta)^{2(q-1)/q}}{\Gamma(\frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta)} \| (I-L)^{-\alpha} F_\varepsilon \|_1^{(2-q)/q} \| (I-L)^{-\beta} F_\varepsilon \|_2^{2(q-1)/q}. \end{aligned}$$

補題 3 より

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \| (I-L)^{-\beta} F_\varepsilon \|_2 < \infty, \quad \forall \beta > \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} - 1 \right).$$

Claim 3 より

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \| (I-L)^{-\alpha} F_\varepsilon \|_1 < \infty, \quad \forall \alpha > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \| (I-L)^{-(\frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta)} F_\varepsilon \|_q & < \infty, \quad 1 < \forall q < 2, \\ & \forall \alpha > 0, \\ & \forall \beta > \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

さて  $1 < p < 2, \gamma > (1 - \frac{1}{p})(\frac{r}{2} - 1)$  とする.  $q \searrow p$  のとき  $(1 - \frac{1}{q})(\frac{r}{2} - 1) \searrow (1 - \frac{1}{p})(\frac{r}{2} - 1)$  であるから

$$1 < p < \exists q < 2 \text{ s.t. } \gamma > (1 - \frac{1}{q})(\frac{r}{2} - 1).$$

次に  $\alpha \searrow 0, \beta \searrow \frac{1}{2}(\frac{r}{2} - 1)$  のとき  $\frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta \searrow (1 - \frac{1}{q})(\frac{r}{2} - 1)$  であるから

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > \frac{1}{2}(\frac{r}{2} - 1) \text{ s.t. } \gamma = \frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta.$$

よって上のことと合わせて

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon\|_q < \infty \quad (6)$$

が分かる. ところで Claim 3 より

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon - (I - L)^{-\gamma} F_{\varepsilon'}\|_1 = 0 \quad (7)$$

である. (6) は  $\{(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$  が  $L_q$ -有界であること, (7) は  $\varepsilon \downarrow 0$  のとき  $(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon$  が  $L_1$ -収束することを云っている. 故に  $(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon$  は  $L_p$ -収束する. これは Claim 4 の主張に他ならない. ■

Claim 4 より次が得られる:

**Theorem** ( $1 < p < 2$  の場合). 各  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1-1/p)(r-2)} \mathcal{D}_p^{-\alpha}.$$

**注意 3.** 次のことが open である:  $1 < p < 2$  のとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{p, -(1-1/p)(r-2)} = \infty.$$

## 5. $p > 2$ の場合

**Claim 5.**  $2 < p < \infty$  とする. 各  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  に対して

(i)  $r = 2$  のときは

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_p = \infty.$$

(ii)  $r \geq 3$  のときは

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{p, -\alpha} = \infty, \quad 0 < \forall \alpha < \left(1 - \frac{1}{p}\right)(r - 2).$$

**Claim 5 の証明** まず  $r = 2$  のとき. Hölder の不等式と Claim 2 より

$$\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_p \geq \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_2$$

$\rightarrow \infty$  as  $\varepsilon \downarrow 0$ .

次に  $r \geq 3$  のとき. 補題 4 で  $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = p > 2, F = \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds$  とすると

$$\begin{aligned} & \left\| (I - L)^{-\left(\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2} + \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}\right)} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_2 \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}} \Gamma(\beta)^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2} + \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}\right)} \left\| (I - L)^{-\alpha} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_1^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left\| (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_p^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ここで  $0 < \beta < \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})(r - 2) = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}(r - 2)$  とする.  $\frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2} < \frac{r-2}{4}$  であるから  $\alpha := 2\frac{p-1}{p-2}(\frac{r-2}{4} - \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}) > 0$  で

$$\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2} + \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2} = \frac{r-2}{4}.$$

また

$$\left\| (I - L)^{-\alpha} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_1 = \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_1.$$

よって上の不等式は

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{2, -(r/2-1)} \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}} \Gamma(\beta)^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{r-2}{4})} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_1^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{p, -2\beta}^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる.  $\varepsilon \downarrow 0$  とすると

$$\text{左辺} \rightarrow \infty \quad \left[ \odot \text{ Claim 2 より} \right],$$

$$\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_1 \rightarrow \int_0^T \left( \frac{1}{2\pi s} \right)^{r/2} e^{-|x|^2/2s} ds$$

であるから

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{p, -2\beta} = \infty. \quad \blacksquare$$

**Claim 6.**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.  $p \in \mathbb{N}, \beta > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})(r - 2)$  に対して

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \left\| (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_p < \infty.$$

$r \geq 3, p \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$  のときは, Claim 6 の主張の逆が成り立つ:

**Claim 7.**  $r \geq 3, T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする. もし,  $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty), \beta > 0$  に対して

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \left\| (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_k < \infty$$

ならば,  $\beta > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})(r - 2)$  でなければならない.

実は, Claim 6 と 7 が我々の計算において一番肝心なところであるが, それらの証明はたくさんの労力 (ページ数) を必要とするので, ここでは省略する (詳細は, [3] に譲ることにする. このプレプリントで, Claim 6 の証明には 36 ページ, Claim 7 の証明には 6 ページを費している).

**Theorem ( $p > 2$  の場合).**  $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  とする.

(i)  $L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1 - \frac{1}{p})(r - 2)} \mathfrak{D}_p^{-\alpha}.$

(ii)  $r = 2$  のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \iff_{\text{必+}} \alpha > 0.$$

(iii)  $r \geq 3, p \in \mathbb{N}$  のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \iff_{\text{必+}} \alpha > (1 - \frac{1}{p})(r - 2).$$

(iv) 一般の  $p \in (2, \infty)$  に対しては

$$L_T^x \notin \mathfrak{D}_p^{-\alpha}, \quad \forall \alpha < (1 - \frac{1}{p})(r - 2).$$

(i) の証明 2 段階で示す.

1°  $k \in \mathbb{N}, k < q < k + 1$  とする. 補題 4 より,  $\forall \alpha, \beta > 0$  に対して

$$\begin{aligned} & \left\| (I - L)^{-\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha + \frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)} F_\varepsilon \right\|_q \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{k+1-q}{q}k} \Gamma(\beta)^{\frac{q-k}{q}(k+1)}}{\Gamma\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha + \frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)} \left\| (I - L)^{-\alpha} F_\varepsilon \right\|_k^{\frac{k+1-q}{q}k} \left\| (I - L)^{-\beta} F_\varepsilon \right\|_{k+1}^{\frac{q-k}{q}(k+1)}. \end{aligned}$$

ここで簡単のため

$$F_\varepsilon = \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds$$

とする. Claim 6 より  $\alpha > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})(r - 2)$ ,  $\beta > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k+1})(r - 2)$  のときは

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|(I - L)^{-\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha + \frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)} F_\varepsilon\|_q < \infty$$

となる. ところで

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{k+1-q}{q}k\alpha + \frac{q-k}{q}(k+1)\beta; \alpha > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})(r - 2), \beta > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k+1})(r - 2) \right\} \\ &= \left( \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{q})(r - 2), \infty \right) \end{aligned}$$

であるから,  $\forall \gamma > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{q})(r - 2)$  に対して

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon\|_q < \infty.$$

2°  $1 \leq p < \infty$ ,  $\gamma > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})(r - 2)$  とする.

$$\lim_{q \searrow p} \left(1 - \frac{1}{q}\right)(r - 2) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)(r - 2)$$

より

$$p < \exists q < \infty \text{ s.t. } \gamma > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{q})(r - 2).$$

よって Claim 6 と 1° より

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon\|_q < \infty.$$

一方, Claim 3 より

$$\|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon - (I - L)^{-\gamma} F_{\varepsilon'}\|_1 \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0$$

であるから, 上と合わせて

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \|(I - L)^{-\gamma} F_\varepsilon - (I - L)^{-\gamma} F_{\varepsilon'}\|_p = 0. \quad \blacksquare$$

(ii) の証明 “ $\Leftarrow$ ” は (i) より, “ $\Rightarrow$ ” は Claim 5(i) より従う. ■

(iii) の証明 “ $\Leftarrow$ ” は (i) より従う. “ $\Rightarrow$ ” は Claim 7 より次のようにして分かる:  
 $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ ,  $\beta > 0$  に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \|F_\varepsilon - F_{\varepsilon'}\|_{k, -2\beta} = 0$$

とする. このとき

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \left\| (I - L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_k < \infty$$

となるから, Claim 7 より

$$\beta > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) (r - 2).$$

これは “ $\Rightarrow$ ” を示している. ■

(iv) の証明 これは Claim 5(ii) より明らかである. ■

## 参考文献

- [1] P. Imkeller and F. Weisz, The asymptotic behaviour of local times and occupation integrals of the  $N$ -parameter Wiener process in  $\mathbb{R}^d$ , *Probab. Theory Relat. Fields*, **98** (1994), 47–75.
- [2] H. Uemura, Plane wave decomposition of odd-dimensional Brownian local times, *J. Math. Kyoto Univ.*, **39** (1999), 365–375.
- [3] 植村英明・高信敏, Malliavin 解析における多次元 Brown 運動の局所時間について, 2.00 版, プレプリント (2003 年 9 月).
- [4] S. Watanabe, Donsker’s  $\delta$ -functions in the Malliavin calculus, in *Stochastic analysis, Liber amicorum for Moshe Zakai* (ed. by E. Mayer-Wolf, E. Merzbach and A. Shwartz), 495–502, Academic Press, New York, 1991.
- [5] S. Watanabe, Fractional order Sobolev spaces on Wiener space, *Probab. Theory Relat. Fields*, **95** (1993), 175–198.
- [6] S. Watanabe, Wiener functionals with the regularity of fractional order, in *New trends in stochastic analysis, Proceedings of a Taniguchi International Workshop* (ed. by K.D. Elworthy, S. Kusuoka and I. Shigekawa), 416–429, World Scientific, Singapore, 1997.