

3次元任意物体のま

わりのおそい流れ

東大 生研 成瀬文雄

§ 1. あらまし

一様なおそい流れのなかに3次元の任意の形の物体があか
れてゐる。いま Navier-Stokes 方程式を基礎方程式として、
物体のまわりの流れを matched asymptotic expansion 法によ
る Reynolds 数 (Re) 展開によつて解析する。Chester¹⁾ は
(i) 物体の形として、流れの方向を逆にしたとき物体に働く
力が逆転するような物体であること、(ii) この物体のまわりの
流れの Stokes 近似の解が既知であることを仮定して、物体
に働く力を $O(Re)$ の項まで求め、かつ $O(Re)$ までは Oseen
近似によつて得られた解と一致することを示した。

本研究では、Chester のときと同じように、(i), (ii) の仮定
をするとき、物体に働く力が Stokes 近似のときの力の表示
のみを用いて、 $O(Re^2 \log Re)$ まで決定されることを示す。

§2. matched asymptotic expansion 法による解

いまつぎのように無次元変数を定義しよう。

$$\bar{q} = q^* / U, \quad \bar{r} = r^* / \ell, \quad \bar{p} = p^* \ell / U \mu, \quad Re = \ell U \rho / \mu, \quad (1)$$

ここで ρ は密度、 q^* は速度ベクトル、 r^* は位置ベクトル、 p^* は圧力、 μ は粘性率、 U は一様流の速度、 ℓ は物体の代表的長さとする。このとき物体のまわりの縮まない流れの場を支配する Navier-Stokes 方程式は

$$\Delta \bar{q} - \nabla \bar{p} = Re \bar{q} \cdot \nabla \bar{q}, \quad \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (2)$$

である。ここで Δ, ∇ は $\bar{r}$ (直角座標 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) を用いたときの Laplacian および gradient である。いま一様流の方向を $\bar{z}$ とし、物体の形は $\bar{r} = f(\theta, \varphi)$ で与えられるとするとき、境界条件は

$$\bar{r} \rightarrow \infty : \bar{q} \rightarrow \bar{u}, \quad \bar{p} \rightarrow \bar{p}_\infty; \quad \bar{r} = f(\theta, \varphi) : \bar{q} = 0 \quad (3)$$

となる。

matched asymptotic expansion 法でこの問題をとくためには、球のまわりの流れを解析した Proudman & Pearson²⁾ の場合と同じように、物体外の領域を 2 つにわけ、 $\bar{r} \sim O(1)$ の領域を内部領域、 $\bar{r} \sim O(1/Re)$ の領域を外部領域にわけ、

$$IR = \bar{r}, \quad IR = Re \bar{r} \quad (4)$$

でそれぞれ内部変数 IR (直角座標 x, y, z) および外部変数 IR (直角座標 x, y, z) を定義する。3次元任意物体のまわ

りの流れでは、流れの関数を用いることができるので、速度ベクトル $\bar{q}$, 圧力 $\bar{p}$ を内部領域では

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= Q_1(R) + R_e Q_2(R) + R_e^2 Q_3(R) + \dots \\ \bar{p} &= P_1(R) + R_e P_2(R) + R_e^2 P_3(R) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

のごとく Stokes 的展開を、また外部領域では

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \bar{u} + R_e \bar{q}_2(R) + R_e^2 \bar{q}_3(R) + \dots \\ \bar{p} &= \bar{p}_\infty + R_e^2 \bar{p}_2(R) + R_e^3 \bar{p}_3(R) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のように Oseen 的展開をする。

(i) 内部解の第1近似

Q_1, P_1 に対する方程式および物体上の境界条件は、(5) を (2), (3) に代入して、つぎのようになる。

$$\Delta Q_1 - \nabla P_1 = 0, \quad \nabla \cdot Q_1 = 0 \quad (7)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_1 = 0 \quad (8)$$

ここで Δ, ∇ は $IR(X, Y, Z)$ を用いたときの Laplacian および gradient である。 $R \rightarrow \infty$ での境界条件は (5), (6) を用いて外部解と内部解との matching を考えて、

$$R \rightarrow \infty : Q_1 \rightarrow \bar{u}, \quad P_1 \rightarrow \bar{p}_\infty \quad (9)$$

となる。

方程式 (7) は Stokes の方程式である。境界条件 (8), (9) のもとに (7) の解が分つてゐるとする。このとき $R \rightarrow \infty$ での Q_1 , P_1 のふるまいおよび物体に働く力 F_1 はつぎのように表示されることが知られてゐる。^{3), 4)}

$$\begin{aligned} R \rightarrow \infty : \quad \left. \begin{aligned} Q_1 &\rightarrow \bar{u} - A \left(\frac{\hat{x}}{R} + \frac{\hat{x}^2 R}{R^3} \right) + O(R^{-2}) \\ P_1 &\rightarrow \bar{p}_\infty - 2A (\hat{x}/R^3) + O(R^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

$$F_1 = 8\pi\mu U L A \hat{x} \quad (11)$$

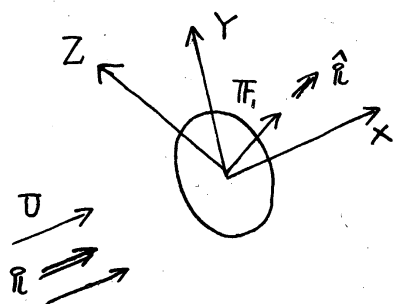


図 1.

ここで $\hat{x}$ は F_1 の方向の単位ベクトル $\hat{x}$, $\hat{u}$, $\hat{x}$ はそれぞれ

$$\hat{u} = l \bar{u} + m \bar{v} + n \bar{w} \quad (12)$$

$$\hat{x} = l X + m Y + n Z \quad (13)$$

をみたすとする。また $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$

は X , Y , Z 軸方向の単位ベクトル

である (図 1. 参照)。いまとくに物体の形が『流れの方向を逆転したときに、働く力の方向も逆転するような形』をしてゐるときには、(10) の代りに

$$\begin{aligned} R \rightarrow \infty : \quad \left. \begin{aligned} Q_1 &\rightarrow \bar{u} - A \left(\frac{\hat{x}}{R} + \frac{\hat{x}^2 R}{R^3} \right) + O(R^{-3}) \\ P_1 &\rightarrow \bar{p}_\infty - 2A (\hat{x}/R^3) + O(R^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

で表示できることを示すことができる。以下の研究で内部解

の第3近似を計算するときには、この形を用いることが必要になってくる。

(ii) 外部解の第2近似

外部解の第2近似 q_2, p_2 に対する方程式および $r \rightarrow \infty$ の境界条件は、(6) を (2), (3) に代入して

$$\Delta q_2 - \nabla p_2 - \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \quad \nabla \cdot q_2 = 0 \quad (15)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad q_2 \rightarrow 0, \quad p_2 \rightarrow 0 \quad (16)$$

のように得られる。ここで Δ および ∇ は $r(x, y, z)$ を用いたときの Laplacian および gradient である。方程式 (15) に対する補足境界条件は、(5), (6), (11) を参考とし、外部解と内部解の matching を求えて、つぎのように決定される。

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \quad q_2 &\rightarrow -A \left(\frac{\hat{r}}{r} + \frac{\hat{z} r}{r^3} \right) \\ &= -A \left[l \left(\frac{r}{r} + \frac{x r}{r^3} \right) + m \left(\frac{y}{r} + \frac{y r}{r^3} \right) + n \left(\frac{r}{r} + \frac{z r}{r^3} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

方程式 (15) は Oseen 方程式であり、(16), (17) をみたす (15) の解は、Oseen 方程式の3つの基本解 $q_{01}, p_{01}, q_{02}, p_{02}, q_{03}, p_{03}$ よりつぎのように構成される。

$$\begin{aligned} q_2 &= -A (l q_{01} + m q_{02} + n q_{03}), \\ p_2 &= -A (l p_{01} + m p_{02} + n p_{03}), \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} q_2 \\ p_2 \end{aligned}} \right\} (18)$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} q_{01} &= \nabla \left(\frac{1}{r} - \frac{e^{-\frac{1}{2}(r-x)}}{r} \right) + \frac{e^{-\frac{1}{2}(r-x)}}{r} \mathbf{e}, \quad p_{01} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \\ q_{02} &= \nabla \left[\left(e^{-\frac{1}{2}(r-x)} - 1 \right) \frac{y}{r(r-x)} \right] + \frac{e^{-\frac{1}{2}(r-x)}}{r} \mathbf{j}, \quad p_{02} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \\ q_{03} &= \nabla \left[\left(e^{-\frac{1}{2}(r-x)} - 1 \right) \frac{z}{r(r-x)} \right] + \frac{e^{-\frac{1}{2}(r-x)}}{r} \mathbf{k}, \quad p_{03} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} (19)$$

である。ここでさらに内部解の第2近似へとすすむためには、 $r \rightarrow 0$ での q_2 , p_2 のふるまいを知る必要がある。これは(18)、(19)を用いるとき

$r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} q_2 \rightarrow & -A \left(\frac{\hat{x}}{r} + \frac{\hat{x} r}{r^3} \right) + A \left(\frac{1}{2} l \mathbf{e} + \frac{3}{4} m \mathbf{j} + \frac{3}{4} n \mathbf{k} \right) \\ & + A \left(-\frac{3}{4} \frac{x}{r} \hat{\mathbf{e}} + \frac{\hat{x}}{4r} \mathbf{e} + \frac{l}{4} \frac{r}{r} - \frac{x \hat{x} r}{4r^3} \right) + O(r), \end{aligned} \quad (20)$$

$$p_2 \rightarrow -2A \frac{\hat{x}}{r^3}, \quad (21)$$

のようになれる。

(iii) 内部解の第2近似

内部解の第2近似 Q_2 , P_2 に対する方程式および物体上での境界条件は、(5)と(2), (3)に代入して

$$\Delta Q_2 - \nabla P_2 = Q_1 \cdot \nabla Q_1, \quad \nabla \cdot Q_2 = 0 \quad (22)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_2 = 0 \quad (23)$$

のようになる。 $R \rightarrow \infty$ での境界条件は、(5)、(6)、(20)、(21)を用い、外部解と内部解との matching を行って

$R \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &\Rightarrow \frac{1}{2} l A \hat{r} + \frac{3}{4} m A \hat{\theta} + \frac{3}{4} n A \hat{\phi} \\ &\quad + A \left(-\frac{3}{4} \frac{x}{R} \hat{r} + \frac{\hat{x}}{4R} \hat{r} + \frac{lR}{4R} - \frac{x\hat{x}R}{4R^3} \right) \\ P_2 &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (24)$$

となる。ここで

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22}, \quad P_2 = P_{21} + P_{22} \quad (25)$$

と書いて、(22) ~ (24) をつぎのように分解しよう。

$$\Delta Q_{21} - \nabla P_{21} = Q_1; \nabla Q_1, \quad \nabla \cdot Q_{21} = 0 \quad (26)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_{21} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} R \rightarrow \infty : Q_{21} &\rightarrow A \left(-\frac{3x}{4R} \hat{r} + \frac{\hat{x}}{4R} \hat{r} + \frac{lR}{4R} - \frac{x\hat{x}R}{4R^3} \right) \\ P_{21} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\Delta Q_{22} - \nabla P_{22} = 0, \quad \nabla \cdot Q_{22} = 0 \quad (28)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_{22} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} R \rightarrow \infty : Q_{22} &\rightarrow \frac{1}{2} l A \hat{r} + \frac{3}{4} m A \hat{\theta} + \frac{3}{4} n A \hat{\phi} \\ P_{22} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (29)$$

このように分解するとき、方程式および境界条件の性質を調べることによって、 Q_{21}, P_{21} は流れの方向を逆転しても全然変化しない部分、 Q_{22}, P_{22} は流れの方向を逆転したとき逆転する部分となっておりることがわかる。

3次元任意物体に働く力は、(26) ~ (29) をとくことによ

って決定されるが、一般論をこれ以上すすめることはむづかしい。そこで物体の形に制限を加え、『流れの方向を逆にしたとき、物体に働く力も逆転するような物体』を考へることにする。ここでこのような物体に働く力の第2近似を考へよう。このとき Q_{21}, P_{21} より誘起される流れはこの力には寄与しないから、 Q_{22}, P_{22} からの影響についでのみ考へればよい。

いま速度 U_1 , 圧力 P_∞ および速度 U_2 , 圧力 P_∞ の一様流中にこの物体がおかれたときの Stokes 方程式の解もまた既知であるとし、このときの速度、圧力、物体に働く力をそれぞれ Q_1', P_1', F_1' および Q_1'', P_1'', F_1'' としよう。方程式 (28) は Stokes 方程式であるから、(28), (29) をみたす解は

$$\left. \begin{aligned} Q_{22} &= \frac{1}{2} l A Q_1 + \frac{3}{4} m A Q_1' + \frac{3}{4} n A Q_1'' \\ P_{22} &= \frac{1}{2} l A (P_1 - P_\infty) + \frac{3}{4} m A (P_1' - P_\infty) + \frac{3}{4} n A (P_1'' - P_\infty) \end{aligned} \right\} (30)$$

となり、またこの流れによつて誘起される物体に働く力 F_2 は

$$F_2 = \frac{1}{2} l A F_1 + \frac{3}{4} m A F_1' + \frac{3}{4} n A F_1'' \quad (31)$$

で与えられる。

(iv) 内部解の第3近似についで

内部解の第3近似 Q_3, P_3 に対する方程式は、(5) と (2) に代入して、

$$\Delta Q_3 - \nabla P_3 = Q_1 \cdot \nabla Q_2 + Q_2 \cdot \nabla Q_1, \quad \nabla \cdot Q_3 = 0 \quad (32)$$

である。ここで Q_3 を再び

$$Q_3 = Q_{31} + Q_{32}, \quad P_3 = P_{31} + P_{32} \quad (33)$$

のごとくかいて、 Q_{31}, P_{31} は一様流の方向を逆転したとき全
然変化しない部分、 Q_{32}, P_{32} は一様流の方向を逆転したとき
逆転する部分とする。内部解の第2近似の場合と同じように、

Q_{31}, P_{31} による流れは物体に働く力としては寄与しない。こ
こで Q_{32}, P_{32} により誘起される流れについて考えて見よう。

Q_{32}, P_{32} に対する方程式は、 Q_{21}, P_{21} および Q_{22}, P_{22} の対
称性を考慮して、つぎのようにする。

$$\Delta Q_{32} - \nabla P_{32} = Q_1 \cdot \nabla Q_{21} + Q_{21} \cdot \nabla Q_1, \quad \nabla \cdot Q_{32} = 0 \quad (34)$$

いま $R \rightarrow \infty$ での Q_{32} の漸近展開形を $O(1)$ まで調べて見よ
う。そのためには $R \rightarrow \infty$ での Q_{21} の漸近展開形を $O(1/R)$
まで正確に求めておく必要がある。

方程式 (26) の右辺に (14) を代入し、(26) を満たす特解を容
易に求めることができる。その結果は

$R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} Q_{21} \rightarrow & A \left[-\frac{3}{4} \frac{X}{R} \hat{e} + \frac{1}{4} \frac{\hat{X}}{R} \hat{e} + \frac{1}{4R} - \frac{1}{4} \frac{X \hat{X}}{R^3} \right] \\ & + A^2 \left[\frac{\hat{X}}{2R^2} \hat{e} - \frac{1}{2R^2} + \frac{\hat{X}^2}{R^4} \right] + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

のようになる。(27) を満たす (26) の解として、(35) の他に

$O(1/R)$ のところに (26) の齊次方程式 (すなわち Stokes の方程式) の解が加わってよい。しかし Stokes 方程式の解で $O(1/R)$ の項は一樣流を逆転するとき、逆転する性質をもつから Q_{21} に加えることはできない。したがって (35) の Q_{21} は (27) をみたす (26) の解として $O(1/R)$ まで正しい展開形をもっていることになる。

方程式 (35) を (34) の右辺に代入して、(34) をみたす Q_{32} の特解は

$R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} Q_{32} \rightarrow & A \left[\left(\frac{\ell}{12} \hat{r} - \frac{5}{24} \hat{r} \right) R + \frac{1}{24} \frac{\hat{X} R}{R} + \frac{1}{12} \frac{X \hat{X}}{R} \hat{r} + \frac{\ell}{12} \frac{X}{R} R \right. \\ & \left. - \frac{5}{24} \frac{X^2}{R} \hat{r} - \frac{1}{24} \frac{X^2 \hat{X}}{R^3} R \right] + A^2 \left[\left(\frac{31}{60} \ell \hat{r} - \frac{7}{60} \hat{r} \right) \log R \right. \\ & \left. - \frac{3}{40} \frac{\hat{X}^2}{R^2} \hat{r} - \frac{2}{5} \frac{\ell \hat{X}}{R^2} R - \frac{19}{120} \frac{X}{R^2} R + \frac{13}{30} \frac{X \hat{X}}{R^2} \hat{r} + \frac{43}{120} \frac{\hat{X}^2 X}{R^4} R \right] \\ & + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

の形をもつ。なおこの解に (34) 式の齊次方程式 (Stokes 方程式) の解が加わってよい。いま

$$A^2 \left(\frac{31}{60} \ell \hat{r} - \frac{7}{60} \hat{r} \right) \log R \quad (37)$$

の項に注目しよう。(34) の齊次方程式の解には (37) のような形の解は存在しないから、(34) の齊次方程式の解を (36) につ

け加えたとしても、この項に影響を及ぼすことは無い。したがってこの項は $R \rightarrow \infty$ での $Q_{3,2}$ の正しい漸近展開形のみかに存在する。ここで (37) の項の matching について考えて見よう。(37) 式に $R = r/R_e$ を代入して、かつ Q_3 が $O(R_e^2)$ であることを考えるとき、

$$-A^2 \left(\frac{31}{60} l \hat{k} - \frac{7}{60} l \right) R_e^2 \log R_e \quad (38)$$

が、(i) 外部解の $r \rightarrow 0$ での展開のみかに存在するか、または(ii) 内部解の $R \rightarrow \infty$ での展開のみかにこれを打消す項が存在するか、どちらかでなければならぬ。(i) のばあいについては Proudman & Pearson²⁾ が球のばあいに示した理由と同じ理由で、その可能性はないと思われる。したがって(ii) の場合でなければならぬ。このためには内部展開は(5)の代りに

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= Q_1 + R_e Q_2 + R_e^2 \log R_e Q_e + R_e^2 Q_3 + \dots \\ \bar{P} &= P_1 + R_e P_2 + R_e^2 \log R_e P_e + R_e^2 P_3 + \dots \end{aligned} \right\} (39)$$

のように展開されねばならぬ。

(39) を (2), (3) に代入し、かつ Q_e が共通領域で (38) を打ち消すことを考えるとき、 Q_e, P_e に対する方程式および境界条件は

$$\Delta Q_e - \nabla P_e = 0, \quad \nabla \cdot Q_e = 0 \quad (40)$$

$$R = f(0, \varphi) : Q_e = 0 \quad (41)$$

$$R \rightarrow \infty : Q_e \rightarrow \left(\frac{31}{60} l^2 - \frac{7}{60} l \right) A^2, P_e \rightarrow 0 \quad (42)$$

のよゝにえまる。(40) は再び Stokes 方程式' であるから、

(41), (42) をみたす解は

$$\begin{aligned} Q_e &= \left(\frac{31}{60} l^2 - \frac{7}{60} l \right) A^2 Q_1 + \frac{31}{60} l m A^2 Q_1' + \frac{31}{60} l n A^2 Q_1'' \\ P_e &= \left(\frac{31}{60} l^2 - \frac{7}{60} l \right) A^2 (P_1 - \bar{P}_\infty) + \frac{31}{60} l m A^2 (P_1' - \bar{P}_\infty) + \frac{31}{60} l n A^2 (P_1'' - \bar{P}_\infty) \end{aligned} \quad (43)$$

となり、また Q_e, P_e によつて物体に誘起される力 F_e は

$$F_e = \left(\frac{31}{60} l^2 - \frac{7}{60} l \right) A^2 F_1 + \frac{31}{60} l m A^2 F_1' + \frac{31}{60} l n A^2 F_1'' \quad (44)$$

で表示される。いま F_1 の (X, Y, Z) 成分を (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})

とするとき

$$l = \frac{F_{1x}}{F_1}, \quad m = \frac{F_{1y}}{F_1}, \quad n = \frac{F_{1z}}{F_1}, \quad A = \frac{F_1}{8\pi\mu\vartheta l} \quad (45)$$

であるから、(11), (31), (44), (45) を用いて、物体に

働く力 F は、

$$\begin{aligned} F &= F_1 + \frac{R_e}{8\pi\mu\vartheta l} \left(\frac{1}{2} F_{1x} F_1 + \frac{3}{4} F_{1y} F_1' + \frac{3}{4} F_{1z} F_1'' \right) \\ &+ \frac{R_e^2 \log R_e}{(8\pi\mu\vartheta l)^2} \left[\left(\frac{31}{60} F_{1x}^2 - \frac{7}{60} F_1^2 \right) F_1 + \frac{31}{60} F_{1x} F_{1y} F_1' \right. \\ &\left. + \frac{31}{60} F_{1x} F_{1z} F_1'' \right] + O(R_e^2) \end{aligned} \quad (46)$$

のようになる。

いま物体は楕円体のように、前後、左右、上下対称であるとし、中心を原点にとり、3つの対称軸の方向を (x_1, x_2, x_3) とする。また x_i 軸方向の速度 U の一様流中にこの物体がかかれたときの抵抗を D_i とする。いま ℓ_i と x_i 軸との方向余弦を ℓ_i とするとき、(46) は D_i を用いて、つぎのように表される。

$$\begin{aligned} F = \sum_{i=1}^3 \ell_i D_i \left[1 + \frac{R_e}{8\pi\mu U l} \left(\frac{3}{4} D_i - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \ell_j^2 D_j \right) \right. \\ \left. + \frac{R_e^2 \log R_e}{(8\pi\mu U l)^2} \sum_{j=1}^3 \ell_j^2 D_j \left(\frac{31}{60} D_i - \frac{7}{60} D_j \right) + O(R_e^2) \right] \quad (47) \end{aligned}$$

以下において (47) を用いて、2, 3 の例について F を求めてみることにする。

例 1. 球 (半径 a^*)

$l = a^*$ とし、また $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = \ell_3 = 0$ としよ。

$D_1 = 6\pi\mu U a^*$ であるから、(47) より

$$F = 6\pi\mu U a^* \left\{ 1 + \frac{3}{8} R_e + \frac{9}{40} R_e^2 \log R_e + O(R_e^2) \right\} \quad (48)$$

が得られる。これは Proudman + Pearson²⁾ または Kaplan + Lagerstrom⁵⁾ の結果と一致する。

例 2. 偏平回転楕円体 (半短軸 a^* , 半長軸 $b^* = c^*$)

$l = b^* = c^*$ とおくとき、 D_1, D_2, D_3 は

$$D_1 = \frac{8\pi\mu\bar{v}(b^{*2} - a^{*2})}{a^* + \frac{b^{*2} - 2a^{*2}}{\sqrt{b^{*2} - a^{*2}}} \cot^{-1} \frac{a^*}{\sqrt{b^{*2} - a^{*2}}}} \quad (49)$$

$$D_2 = D_3 = \frac{16\pi\mu\bar{v}(b^{*2} - a^{*2})}{\frac{3b^{*2} - 2a^{*2}}{\sqrt{b^{*2} - a^{*2}}} \cot^{-1} \frac{a^*}{\sqrt{b^{*2} - a^{*2}}} - a^*} \quad (50)$$

で与えられ、これを(47)式に代入すればTFが得られる。

且方向が x_1 方向と一致するとき、すなわち $l_1=1$, $l_2=l_3=0$ のときにはBreach⁶⁾の結果と一致する。とくに円板のときには $a^*=0$ とあって

$$D_1 = 16\mu\bar{v}b^*, \quad D_2 = D_3 = \frac{32}{3}\mu\bar{v}b^* \quad (51)$$

を代入すればよい。

例3. 偏長回転楕円体(半長軸 a^* , 半短軸 $b^*=c^*$)

$l = b^* = c^*$ とおくとき、 D_1, D_2, D_3 は

$$D_1 = \frac{8\pi\mu\bar{v}(a^{*2} - b^{*2})}{\frac{(-2a^{*2} - b^{*2})}{\sqrt{a^{*2} - b^{*2}}} \coth^{-1} \frac{a^*}{\sqrt{a^{*2} - b^{*2}}} - a^*} \quad (52)$$

$$D_2 = D_3 = \frac{16\pi\mu\bar{v}(a^{*2} - b^{*2})}{a^* + \frac{2a^{*2} - 3b^{*2}}{\sqrt{a^{*2} - b^{*2}}} \coth^{-1} \frac{a^*}{\sqrt{a^{*2} - b^{*2}}}} \quad (53)$$

を(47)式に代入すればよい。また l 方向が x_1 方向と一致する

るとき、すなわち $l_1=1, l_2=l_3=0$ のときには、Breach⁶⁾ の結果と一致する。

例 4. 楕円体 (x_i 方向の半軸の長さを a_i^*)

適当な代表的長さを l とし、 $a_j^*/l = a_j$ とするときは、

D_i は

$$D_i = \frac{16\pi\mu U l}{\chi_i + \alpha_i},$$

($i=1, 2, 3$)

$$\left. \begin{aligned} \chi_i &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\frac{3}{\pi} (a_j^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}}, \\ \alpha_i &= \int_0^\infty \frac{a_i^2 d\lambda}{(a_i^2 + \lambda) \frac{3}{\pi} (a_j^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

のように表わすから、これを (47) 式に代入すればよい。

§ 3. むすび

3次元物体の形として、流れの方向を逆転するとき物体に働く力が逆転するような形であること、およびこの物体が、その一様流中におかれたときの Stokes 近似の解が既知であることを仮定する。このような3次元任意物体が一様なおそい流れのなかにおかれたときの流れの解析を、Navier-Stokes の方程式を基礎方程式として、matched asymptotic expansion による Re 数展開の形で行い、物体に働く力を $O(Re^2 \log Re)$ まで、Stokes 近似による力の表示のみを用いて表わした。物体に働く力として $O(Re)$ までは、Oseen 方程式

による結果と一致するから、 $O(R_e^2 \log R_e)$ の項は Navier-Stokes 方程式の非線型効果を表わしている項として注目されるべきであると思われる。また $O(R_e^2)$ を含のより高い order までの結果を得るためには、Stokes 近似による力の表示だけでは表わし得ないと思われる。

参考文献

1. W. Chester : J. Fluid Mech. 13 (1962), 557
2. I. Proudman & J.R.A. Pearson : J. Fluid Mech 2 (1957), 237
3. I. Imai : The Second International JSME Symposium Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Sept. 1972, 2, 15
4. J. Happel & H. Brenner : Low Reynolds Number Hydrodynamics (Noordhoff, Leyden, 1973), P289
5. S. Kaplan & P. Lagerstrom : J. Math. Mech. 6 (1957) 585
6. D.R. Breach : J. Fluid Mech. 10 (1961), 306