

Fixed Point が $\{2, 3\}$ -群であるような
素数位数の自己同型をもつ群。

北大 大学院

宮本 雅彦

Thompson による Frobenius 予想の解決 [9] 以来, 以下の
予想があります。

予想 " α を位数 s (素数) の s' -群 G の自己同型群とします。
もし $C_G(\alpha)$ が非零なら, G は可解。"

ここでは $C_G(\alpha)$ に条件を付けた以下の定理を示します。

定理 1 " α を位数 s の s' -群 G の自己同型群とします。
もし $C_G(\alpha)$ が $\{2, 3, s\}$ -群なら, G は可解。"

上の予想に対して, まず M.J. Collins [2] が, ほぼ
 $C_G(\alpha) \cong \mathbb{Z}_q$ (q は p と異なる素数) の場合を示し, 続いて
B. Rickman [7] が $C_G(\alpha)$ が cyclic r -群 (r は p と異なる
素数) の場合を示しました。ここでは それの
拡張になります。奇数群の可解性は Feit-Thompson [3]

によって証明されているので、定理1の $C_G(\alpha)$ は可解です。
定理の証明は fusion が中心であり、そこで、以下の定理が
重要です。

定理2. " G を有限群、そして S を G の Sylow 2-群と
します。もし G が S_4 -tree で $Z(S) \leq N_G(T(S))$ と仮定
します。このとき G は $Z(S)$ を *strongly closed*
abelian subgroup in S with respect to G として
もつ。 "

最近 Thompson [10], Glauberman 等によって
 G が単純で S_4 -tree だけで 上の結果が出ることを示した
そうです。

§ 1. 予備の補題と 定義。

$Syl_p(G)$ は G の Sylow p -群全体の集合、そして
 $Syl_p(\langle \alpha \rangle)(G)$ は G の $\langle \alpha \rangle$ -invariant な Sylow
 p -群全体の集合を表わすといいます。

補題1. (Schult). V を有限群 G の位数 p の自己同型群
とします。ただし p は素数で $(G, 2p) = 1$ 。 K を標数
が $|GV|$ と素な体とし、 A を faithful な KGV -module
とします。もし $C_A(V) = 0$ なら、このとき $[V, G] = 1$ 。

証明。([8] の定理 3.1 を見よ。)

補題 2. (Thompson)

V を有限群 G の位数 p (素数) の自己同型群とします。

もし $C_G(V) = 1$ なら G は 中零。

証明。([9] の主定理を見よ。)

補題 3. (Glauberman)

G を有限群, p を奇素数, $P \in G$ の Sylow p -部分群, そして Q を $Z(P)$ の部分群とします。もし $Q \triangleleft N_G(Z(P))$ で $p-1 \nmid |N_G(Q) : C_G(Q)|$ とすると Q は weakly closed in P with respect to G .

証明。([4] の系 3 を見よ。)

補題 4. (Glauberman)

S を有限群 G の Sylow 2-群とします。もし G が S_4 -free で $C_G(O_2(G)) \subseteq O_2(G)$ とすると,
 $G = \langle C_G(Z(S)), N_G(J(S)) \rangle$.

証明。([5] の系 1.0 を見よ。)

補題 5. (Goldschmidt)

G を有限単純群 (non-abelian) とする。もし G が strongly closed abelian 2-subgroup をもつならば, G は以下の群の一つと同型となる。

- a) Bender 群, b) $L_2(q)$ $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$

又は Janko-Ree type の群。

証明。([6] の定理 A を見よ。)

ここで G が可解群のときの構造を考える。

補題 6.

もし 可解群 G が 定理 1 の条件を満たす素数位数の自己同型群 V をもつとする。このとき $G = O_{g',g}(G) C_G(V)$ for $\forall g \notin \pi(C_G(V))$ 。

証明。 補題 1 と 補題 2 より 容易に出てくる。

§ 2. 定理 2 の証明。

Alperin [1] の定理 5.2 より $Z(S)$ が weakly closed であること, strongly closed であること, $N_G(Z(S))$ が 2-fusion を controls すること, これらすべて同値です。ここでは $Z(S)$ が weakly closed なることを示しましょう。正しくないとは仮定します。Alperin [1] より, S の部分群 H で $Z(S) \trianglelefteq H$ で $Z(S) \not\trianglelefteq N_G(H)$ となるものがあります。これらの中で 以下を満たす H を 選びます。

i) $|N_S(H)|$ を 最大にとる。そして,

ii) $|H|$ を i) を満たす中で最大にとる。

この H の極大性より, $N_S(H) \in \text{Syl}_2(N_G(H))$ や, $N_G(H)$ が 2-constrained となることがわかります。ここで補題 4 より

$N_G(H) = \langle C_{N_G(H)}(Z(N_S(H))), N_{N_G(H)}(J(N_S(H))) \rangle$ を得ます。
 H の極大性より, $N_S(H) = S$ を得ます。しか、これは
 $N_G(H) = \langle C_{N_G(H)}(Z(S)), N_{N_G(H)}(J(S)) \rangle \supseteq Z(S)$ となつて、
 $N_G(H) \not\subseteq Z(S)$ に矛盾します。

これで 定理 A の証明終り。

§ 3. 定理 1 の証明。

背理法によります。 G を最小反例とします。このとき G は単純となります。とくに G の *local*-部分群はすべて可解となります。今 S を G の Sylow 2-群, Q を G の Sylow 3-部分群とします。

(1). $N_G(J(S)) \triangleright Z(S)$ 。

$N_G(J(Q)) \triangleright Z(Q)$, $N_G(Z(Q)) = C_G(Z(Q))C_{N_G(Q)}(\alpha)$ 。

証明。これは 補題 6 より出ます。

それゆえ, $2 \nmid |N_G(Z(Q) : C_G(Z(Q)))|$. ゆえに 補題 3 に
 よつて 3-fusion は $N_G(Z(Q))$ が controls する。しか
 $|C_G(\alpha)|$ は奇数なので G は S_3 -free となる。とくに
 G は S_4 -free。又 (1) と 定理 2 を合わせて, G が
 S_4 -free なので,

(2). $Z(S)$ は *strongly closed subgroup* 。

一方 G は 単純群なので, 補題 5 より, G は

(3). Bender 群, $L_2(q)$, 又は J-R type の群
 のどれか一つと同型となる。しかしよく知られているよ
 うに, これらの群は 定理 1 の条件を満たすような自己同型
 群をもっていない。これは矛盾である。

これで 定理 1 の証明終り。

参考文献

- [1]. J. Alperin, 'Sylow intersections and fusion,'
 J. Algebra 6 (1967), 222-41.
- [2]. M. J. Collins, 'Finite Groups admitting almost fixed-
 Point-free automorphisms,' 'Proceedings of Symposia
 in Pure Mathematics, Vol. XXI,' Amer. Math. Soc.
 (Providence, Rhode Island, 1971).
- [3]. W. Feit and J. G. Thompson, 'Solvability of groups
 of odd order,' Pacific J. Math. 13 (1963), 775-1029.
- [4]. G. Glauberman, 'A sufficient condition for p -stability
 ,' Proc. London Math. Soc. 25 (1972), 253-87.
- [5]. ———, 'Weakly closed elements of Sylow
 subgroups,' Math. Z. 107 (1968), 1-29.
- [6]. D. M. Goldschmidt, '2-Fusion in finite groups,'
 Ann. Math. Vol. 99 (1974), 70-117.

- [77]. B. Rickman, 'Groups admitting an automorphism of prime order fixing a cyclic subgroup of prime power order,' *Quart. J. Math. Oxford* (2), 26 (1975), 47-59.
- [78]. E. Shult, 'On groups admitting fixed point free operator groups,' *J. Math.* 9 (1965), 701-20.
- [79]. J. G. Thompson, 'Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 45 (1959), 578-881.
- [101]. J. G. Thompson, 'Simple Groups of Order Prime to 3,'
to appear.