

Delta 関数相互作用をもつ 1 次元異種 Fermion 混合系

山口大・文理・物理 下 瀬 育 郎
秋 吉 康 光

(6 月 1 日受理)

§ 1. まえがき

多数の著者⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾によって, delta-function potential による相互作用をもつ 1 次元同種 fermion 系又は boson 系の問題が厳密に扱われた。とくに, C.N. Yang⁽⁶⁾ および B. Sutherland⁽⁷⁾ は, 斥力 potential ($c > 0$) をもつ N 個の同種フェルミオンおよび同種 boson の一般の体系について厳密解をうる方法を確立した。更に, M. Takahashi⁽⁷⁾ は Yang-Sutherland 理論を拡張して, 引力 potential ($c < 0$) をもつ同種 fermion 系の一般の場合について厳密解をえた。

本論文では, Yang-Sutherland 理論を斥力 delta-function potential ($c > 0$) による相互作用をもつ 1 次元異種 fermion 混合系の場合に拡張する。boson 系の場合は, § 3 で述べるように異種混合系への拡張がむづかしい。

§ 2. 1 次元異種 fermion 混合系

1 例として, fermion F_1 (質量 m_1) の N_1 個 (spin すべて同じ向き) と fermion F_2 (質量 m_2) の N_2 個 (spin 上向きもの N_2' 個, 下向きのもの N_2'' 個) との混合系を考察する*。一般に $m_1 \neq m_2$ とする。また

$$N_1 + N_2 = N, \quad N_2' + N_2'' = N_2. \quad (1)$$

(I) Hamiltonian

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2m_1} \sum_i \frac{d^2}{dx_i^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \sum_j \frac{d^2}{dx_j^2} + 2c_1 \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \\ & \quad (i, j \text{ とも } F_1) \\ & + 2c_2 \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) + 2c_{12} \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j), \quad (2) \\ & \quad (i, j \text{ とも } F_2) \quad (i, j \text{ のうち 1 つは } F_1, 1 \text{ つは } F_2) \\ & (c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_{12} > 0). \end{aligned}$$

波動関数 ψ は, Yang⁽⁶⁾ 等にならい, Bethe 仮説を用いて

$$\psi = \sum_P [Q, P] \exp i [p_{P1} x_{Q1} + \cdots + p_{PN} x_{QN}] \quad (3)$$

* 本論文の諸記号の意義の詳細については Yang⁽⁶⁾ および Sutherland⁽⁷⁾ の論文を参照して頂きたい。

とおく。こゝに、

$p_{P_1}, \dots, p_{P_N}$: unequal number の set ,

$0 < x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_N} < L$,

$P = [P_1, \dots, P_N]$, $Q = [Q_1, \dots, Q_N]$: integer

$1, \dots, N$ の 2 組の permutation .

(II) delta-function potential は次の境界条件でおきかえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2} \left[\left(\frac{1}{m^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m^{(j)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_{x_i = x_j +} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{m^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m^{(j)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_{x_i = x_j -} \right] = 2c \psi_{x_i = x_j} . \end{aligned} \quad (4)$$

(4) および $x_i = x_j$ における ψ の連続条件から

(i) i, j とも F_1 の場合 ; $m^{(i)} = m^{(j)} = m_1$, $c = c_1$,

$$x_{ij} = \frac{i c_1^*}{p_i - p_j} , \quad c_1^* = \frac{2m_1}{\hbar^2} c_1 , \quad (5)$$

(ii) i, j とも F_2 の場合 ; $m^{(i)} = m^{(j)} = m_2$, $c = c_2$,

$$x_{ij} = \frac{i c_2^*}{p_i - p_j} , \quad c_2^* = \frac{2m_2}{\hbar^2} c_2 , \quad (5')$$

(iii) i, j のうち 1 つは F_1 , 1 つは F_2 の場合 ; $m^{(i)} = m_1$, $m^{(j)} = m_2$ 又は $m^{(i)} = m_2$, $m^{(j)} = m_1$, $c = c_{12}$ ($= c_{21}$) ,

$$x_{ij} = \frac{i c_{12}^*}{p_i - p_j} , \quad c_{12}^* = \frac{2}{\hbar^2} \cdot \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} c_{12} . \quad (5'')$$

(III) 周期的境界条件から

$$\begin{aligned} \lambda_i(p; c; R_\psi) \xi_0 = X_{(j+1)j} X_{(j+2)j} \cdots X_{Nj} \\ \times X_{1j} X_{2j} \cdots X_{(j-1)j} \xi_0 , \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6)$$

$$\lambda_i(p; c; R_\psi) = \exp(i p_j L), \quad (7)$$

$$X_{ij} = \frac{1 - x_{ij} P_{ij}}{1 + x_{ij}}, \quad (8)$$

ここに

P_{ij} : Q_i と Q_j とを交換する operator,

X_{ij} : (Q_i, P_i) と (Q_i, P_j) とを交換する operator,

ξ_0 : (3)における matrix $[Q, P]$ の column,

R_ψ : N 個の座標 x_i の permutation group S_N の irreducible representation.

(IV)

$$\begin{aligned} \mu_j(p; c; R_\phi) \phi &= X'_{(j+1)j} X'_{(j+2)j} \cdots X'_{Nj} \\ &\quad \times X'_{1j} \cdots X'_{(j-1)j} \phi, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

$$X'_{ij} = \frac{1 + x_{ij} P'_{ij}}{1 + x_{ij}}, \quad (10)$$

$$P'_{ij} = -P_{ij}, \quad (11)$$

R_ϕ : R_ψ の conjugate representation $\widetilde{R}_\psi$.

i, j が同種 fermion で同じ向き spin のものについては $P'_{ij} = 1$, $X'_{ij} = 1$.

$$\mu_j(p; c; R_\phi) = \lambda_j(p; c; R_\psi) = \exp(i p_j L). \quad (12)$$

ϕ は Bethe-Yang 仮説⁽⁷⁾ を用いて

$$\phi = \sum_P [Q, P] F(A_{P_1}, y_{Q_1}) \cdots F(A_{P_{N_2}}, y_{Q_{N_2}}), \quad (13)$$

$$F(A, y) = \prod_{j=1}^{y-1} \frac{i p_j - i A - c_{12}^{*'}}{i p_{j+1} - i A + c_{12}^{*'}}, \quad c_{12}^{*'} = \frac{1}{2} c_{12}^*. \quad (14)$$

(V)

$$\nu_\alpha(A; -c_2; R_\phi) \zeta_0^{(1)} = X''_{(\alpha+1)\alpha} X''_{(\alpha+2)\alpha} \cdots X''_{N\alpha}$$

$$\times X_{1\alpha}'' \cdots X_{(\alpha-1)\alpha}'' \zeta_0^{(1)}, \quad \alpha = 1, \dots, N_2 \quad (15)$$

$$X_{\alpha\beta}'' = \frac{1 + x_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}'}{1 - x_{\alpha\beta}} = \frac{1 + x_{\alpha\beta}}{1 - x_{\alpha\beta}} \cdot X_{\alpha\beta}', \quad (16)$$

$$x_{\alpha\beta} = \frac{ic_2^*}{A_\alpha - A_\beta}, \quad (17)$$

$\zeta_0^{(1)}$: (13) における matrix $[Q, P]$ の column.

(13), (14) を用いて (15) から

$$\nu_\alpha = \prod_{j=1}^N \frac{iA_\alpha - ip_j + c_{12}^{*'}}{iA_\alpha - ip_j - c_{12}^{*'}}, \quad (18)$$

(16), (17) を用いて (15) から

$$\nu_\alpha = -\nu_\alpha' \cdot \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{iA_\alpha - iA_\beta + c_2^*}{iA_\alpha - iA_\beta - c_2^*}, \quad (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} \nu_\alpha'(A; c_2; R_{\zeta_0^{(1)}}) \zeta_0^{(1)} &= X_{(\alpha+1)\alpha}' X_{(\alpha+2)\alpha}' \cdots X_{N\alpha}' \\ &\times X_{1\alpha}' \cdots X_{(\alpha-1)\alpha}' \zeta_0^{(1)}. \quad \alpha = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (20)$$

(VI) 再び, Bethe-Yang 仮説⁽⁷⁾を用いて

$$\zeta_0^{(1)} = \sum_P [Q, P] G(k_{P1}, z_{Q1}) \cdots G(k_{PN_2}, z_{QN_2}), \quad (21)$$

$$G(k, z) = \prod_{\alpha=1}^{z-1} \frac{iA_\alpha - ik - c_2^{*'}}{iA_{\alpha+1} - ik + c_2^{*'}}, \quad c_2^{*'} = \frac{1}{2} c_2^{*}. \quad (22)$$

(21), (22) を用いると (20) から

$$\nu_\alpha' = \prod_{b=1}^{N_2} \frac{iA_\alpha - ik_b - c_2^{*'}}{iA_\alpha - ik_b + c_2^{*'}}. \quad (23)$$

(VII)

$$\nu_a(k; -c_2; R_{\zeta_0^{(1)}}) \zeta_0^{(2)} = X_{(a+1)a}''' X_{(a+2)a}''' \cdots X_{N_2''a}''' \times X_{1a}''' \cdots X_{(a-1)a}''' \zeta_0^{(2)}, \quad a = 1, \dots, N_2'' \quad (24)$$

$$X_{ab}''' = \frac{1 + x_{ab} P_{ab}'}{1 - x_{ab}} = \frac{1 + x_{ab}}{1 - x_{ab}} \cdot X_{ab}', \quad (25)$$

$$x_{ab} = \frac{ic_2^*}{k_a - k_b}, \quad (17')$$

$$X_{ab}' = \frac{1 + x_{ab} P_{ab}'}{1 + x_{ab}} = 1, \quad (26)$$

$\zeta_0^{(2)}$: (21) における matrix $[Q, P]$ の column.

(21), (22) を用いて (24) から

$$\nu_a = \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ik_a - iA_\beta + c_2^{*'}}{ik_a - iA_\beta - c_2^{*'}}, \quad (27)$$

(25), (17'), (26) を用いて (24) から

$$\nu_a = - \prod_{b=1}^{N_2''} \frac{ik_a - ik_b + c_2^*}{ik_a - ik_b - c_2^*}. \quad (28)$$

(VIII) (9), (13), (14), (12) から

$$\exp(ip_j L) = \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ip_j - iA_\beta - c_{12}^{*'}}{ip_j - iA_\beta + c_{12}^{*'}}, \quad j = 1, \dots, N \quad (29)$$

(18), (19), (23) から

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \frac{iA_\alpha - ip_j + c_{12}^{*'}}{iA_\alpha - ip_j - c_{12}^{*'}} &= - \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{iA_\alpha - iA_\beta + c_2^{*'}}{iA_\alpha - iA_\beta - c_2^{*'}} \\ &\times \prod_{b=1}^{N_2''} \frac{iA_\alpha - ik_b - c_2^{*'}}{iA_\alpha - ik_b + c_2^{*'}}, \quad \alpha = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (30)$$

(27), (28) から

$$\prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ik_a - iA_{\beta} + c_2^{*'}}{ik_a - iA_{\beta} - c_2^{*'}} = - \prod_{b=1}^{N_2''} \frac{ik_a - ik_b + c_2^*}{ik_a - ik_b - c_2^*} \quad a = 1, \dots, N_2'' \quad (31)$$

(IX) (29), (30), (31)の対数をとると

$$L_p = 2\pi I_p + \sum_A \theta_{12}(2p - 2A), \quad (29')$$

$$\sum_{A'} \theta_2(A - A') = 2\pi J_A + \sum_p \theta_{12}(2A - 2p) + \sum_k \theta_2(2A - 2k), \quad (30')$$

$$\sum_{k'} \theta_2(k - k') = 2\pi K_k + \sum_A \theta_2(2k - 2A), \quad (31')$$

ここに $\theta_{12}(x) = -2 \tan^{-1} \frac{x}{c_{12}^*},$

$$\theta_2(x) = -2 \tan^{-1} \frac{x}{c_2^*},$$

I_p, I_A, K_k : integer 又は half integer.

ground state に対しては, 例えば N_1, N_2', N_2'' が何れも odd ($N_2 = \text{even}, N = \text{odd}$) の場合には

I_p : $-\frac{1}{2}(N-1)$ から $\frac{1}{2}(N-1)$ までの間の N 個の integer,

J_A : $-\frac{1}{2}(\frac{N_2}{2} - \frac{1}{2})$ から $\frac{N_2}{2} - \frac{1}{2}$ までの間の N_2 個の half integer,

K_k : $-\frac{1}{2}(N_2'' - 1)$ から $\frac{1}{2}(N_2'' - 1)$ までの間の N_2'' 個の integer.

(X) $N, N_2, N_2'' \rightarrow \infty$ (上記の比例関係を保って)

$$p = 2\pi f + \int_{-B}^B \theta_{12}(2p - 2A) \sigma(A) dA, \quad (29'')$$

$$\begin{aligned} \int_{-B}^B \theta_2(A - A') \sigma(A') dA' &= 2\pi g + \int_{-Q}^Q \theta_{12}(2A - 2p) \rho(p) dp \\ &\quad + \int_{-R}^R \theta_2(2A - 2k) \tau(k) dk, \end{aligned} \quad (30'')$$

$$\int_{-R}^R \theta_2(k - k') \tau(k') dk' = 2\pi \ell + \int_{-B}^B \theta_2(2k - 2A) \sigma(A) dA, \quad (31'')$$

$$\frac{df}{dp} = \rho, \quad \frac{dg}{dA} = \sigma, \quad \frac{d\ell}{dk} = \tau.$$

(XI) (29''), (30''), (31'') をそれぞれ p, A, k で微分して

$$2\pi\rho = 1 + \int_{-B}^B \frac{4c_{12}^* \sigma dA}{c_{12}^{*2} + 4(p-A)^2}, \quad (29''')$$

$$\begin{aligned} \int_{-Q}^Q \frac{4c_2^* \rho dp}{c_{12}^{*2} + 4(A-p)^2} + \int_{-R}^R \frac{4c_2^{*2} \tau dk}{c_2^{*2} + 4(A-k)^2} \\ = 2\pi\sigma + \int_{-B}^B \frac{2c_2^* \sigma dA'}{c_2^{*2} + (A-A')^2}, \end{aligned} \quad (30''')$$

$$\int_{-B}^B \frac{4c_2^* \sigma dA}{c_2^{*2} + 4(k-A)^2} = 2\pi\tau + \int_{-R}^R \frac{2c_2^* \tau dk'}{c_2^{*2} + (k-k')^2}, \quad (31''')$$

$$\frac{N}{L} = \int_{-Q}^Q \rho dp, \quad \frac{N_2}{L} = \int_{-B}^B \sigma dA, \quad \frac{N_2''}{L} = \int_{-R}^R \tau dk. \quad (32)$$

ground state energy E は

$$\frac{E}{L} = \frac{\hbar^2}{2} \cdot \frac{1}{N} \left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2} \right) \int_{-Q}^Q p^2 \rho dp. \quad (33)$$

(XII) (29'''), (30'''), (31'''), (32), (33) の結果は, $m_1 = m_2 = m$, $N_2 = M$, $N_2'' = M_1$, $c_1 = c_2 = c_{12} = c$ ($= c_1^* = c_2^* = c_{12}^*$) とおけば Sutherland⁽⁷⁾の結果 ($\kappa = 3$) と完全に一致する。

(XIII) 上例の場合を, fermion が3種以上の場合, 各種について spin の向きが2つ以上の場合の一般の混合系に拡張することは容易にできる。

§3. 1次元 boson 系

同種 boson 系についての Yang-Sutherland 理論から

$$\exp(i p_j L) = \lambda_j(p; c; R_\psi)$$

$$= \prod_{i \neq j} \frac{1 - x_{ij}}{1 + x_{ij}} \cdot \mu_j(p; -c; R_\phi), \quad (34)$$

$$X_{ij} = \frac{1 - x_{ij} P_{ij}}{1 + x_{ij}}, \quad X'_{ij} = \frac{1 - x_{ij} P_{ij}}{1 - x_{ij}}. \quad (35)$$

(34) 右辺の factor $\prod_{i \neq j} \frac{1 - x_{ij}}{1 + x_{ij}}$ のため, boson 系では異種混合系に拡張することはむつかしい。

文 献

- 1) E.H.Lieb and W.Liniger, Phys. Rev. 130 (1963) 1605.
E.H.Lieb, Phys. Rev. 130 (1963) 1616.
- 2) J.B.Mc'Guire, J.Math. Phys. 5 (1964) 622.
- 3) J.B.Mc'Guire, J.Math. Phys. 6 (1965) 432 ; 7 (1966) 123.
- 4) M.Flicker and E.H.Lieb, Phys. Rev. 161 (1967) 179.
- 5) M.Gaudin, Phys. Letters 19 (1967) 55.
- 6) C.N.Yang, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1312.
- 7) B.Sutherland, Phys. Rev. Lettes 20 (1968) 98.
- 8) M.Takahashi, Prog. Theor. Phys. 44 (1970) 899.