

離散化波数法と有限要素法の結合による 不整形地盤の震動解析法

土岐 憲三・佐藤 忠信・清野 純史・藤村 和也

DEVELOPMENT OF A DW-FE HYBRID METHOD FOR THE SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF THE GROUND WITH IRREGULAR INTERFACES

By Kenzo TOKI, Tadanobu SATO, Junji KIYONO and Kazuya FUJIMURA

Synopsis

A Discrete Wavenumber-Finite Element (DW-FE) hybrid method for the problem of SH and P-SV wave inputs was developed. To check the validity of the DW-FE hybrid method, we compared it with a DW and a FE-BE hybrid methods. For the three different impedance ratios and incident angles, transfer functions were calculated. We defined calculation errors for stresses and displacements on the interfaces, and investigated whether the given boundary conditions were satisfied or not. As the results, the DW-FE hybrid method is a powerful tool with which to reduce the calculation cost and time for the seismic response of the ground with irregular interfaces.

1. ま え が き

従来、地盤の震動解析においては、重複反射理論がその適用の容易さのために用いられてきた¹⁾。この手法は対象地盤を水平成層地盤と仮定するものであり、実地盤が水平成層地盤に近い場合は基盤面と地表面との間の増幅特性をかなり正確に求めることができる。しかし、実際の地盤は地質学的な変遷を受けており、局所的に不整形境界面を有する場合が多い。地震波はこの不整形境界面で回折、散乱、反射するために地表面での応答値は場所により大きく変化する場合があります。このような現象は重複反射理論では表現できない。

このような不整形境界面をもつ地盤の震動解析のために、様々な手法が開発されてきた。代表的なものを挙げると、(i)有限要素法 (FEM)²⁾、(ii)境界要素法 (BEM)³⁾、(iii)離散化波数法 (DWM)⁴⁾ 等がある。

有限要素法は対象領域を有限の要素に分割し、各々の要素内で変位が支配方程式を満たすように定める方法であり、局所的な非均質性、非線形性を考慮した解析を行うことができるが、無限領域を対象とする場合の解析には適さず、粘性境界等⁵⁾を用いた境界の処理が必要となる。

境界要素法は対象領域の境界のみを有限の要素に分割し、グリーンの定理を用いて積分方程式を導くものであり、物理的意味としては境界上に置いた震源からの波動の重ね合わせで現象を表現するものである。この場合、各々の震源からの影響を領域内の波動方程式から得たグリーン関数で表現し、境界条件を満たすような震源強度を求める形で定式化される。この手法ではグリーン関数が放射条件を満たすので、無限領域の問題にも適しているが、連続体を仮定して定式化を行っているため領域内の局所的な非均質性、非線形性を考慮することは難しい。

離散化波数法は、波数の無限積分で表される波動方程式の一般解を離散化波数の有限和で表現するものであり、境界条件を満足するように各々の波数成分の重み（振幅）を求める形で定式化される。Aki-Larnar による DWM⁶⁾ は、地盤の周期性を仮定して波数の離散化に物理的意味を与えることにより、有限和の項数を減少させている。この場合も無限領域を対象としているが、局所的な非均質性、非線形性は考慮できない。

一般に地盤は局所的な非均質性を持つので、現象を詳細に把握するためには、対象領域を有限要素法により定式化し、境界部分を境界要素法等で定式化して組み合わせられる手法が妥当である。この方法により外部無限領域も含めた全体系の解析ができ、局所的な非均質性、非線形性を考慮することができる。実際、FE-BE ハイブリッド法については各種の解析が行われ、その妥当性が検証されている。

しかし、同一の地盤を境界要素法と離散化波数法を用いて解析する場合、境界要素法の未知パラメータは各境界上の節点における変位、表面力、離散化波数法では最上層と最下層の各波数成分の重み（振幅）であり、未知パラメータの数は層数が多くなればなるほど境界要素法の方が多くなる。また、BEM の場合、連立一次方程式を構成するマトリクスの成分の計算において、無限級数を含むグリーン関数の計算が必要であるが、DWM の場合は簡単な三角関数の組み合わせで計算される。このため、マトリクスを求める演算、逆行列を求める演算に要する時間に差が生じてくる。層内の変位、歪、応力等を求める場合についても、離散化波数法の場合は各重み係数が得られていれば簡単な演算で求められる。しかし、境界要素法の場合は対象点毎にグリーン関数を計算しなければならず、ここでも計算時間が異なってくる。

このような観点から離散化波数法の方が境界要素法よりも経済的な手法であるといえる。さらに解析結果の解釈についても、境界要素法では境界上の変位と応力が得られるのに対し、離散化波数法では波数毎ごとの重み係数が得られ、波動伝搬の様子が把握できるという利点を持っている。

以上のような理由から本研究では、周波数領域における2次元 SH および P-SV 波動場における有限要素法 (FEM) と離散化波数法 (DWM) を結合して不整形地盤の震動解析を行い、他手法との比較、検討を行った。

2. 離散化波数法による地盤震動解析

2.1 離散化波数法の定式化

Fig. 1 に示すような m 層地盤における2次元 SH 波動場⁷⁾ では、第 (i) 層 $(i=1, \dots, m-1)$ 、第 (m) 層の y 方向の変位 v は次式のように x 方向波数 k に関する無限積分の形で表される。

$$v^{(i)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A^{(i)}(k) \exp(i\nu^{(i)}z) + B^{(i)}(k) \exp(-i\nu^{(i)}z)] \exp(ikx) dk \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$v^{(m)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(m)}(k) \exp(i\nu^{(m)}z) \cdot \exp(ikx) dk + \exp(ik_0x - i\nu_0z) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 k, ν はそれぞれ x 方向、 z 方向の波数、 $A(k)$ は下降波動、 $B(k)$ は上昇波動についての強度を示す散乱係数、そして k_0, ν_0 は入射波の x, z 方向の波数である。ただし時間項 $\exp(-i\omega t)$ は省略している。

ここで地盤の水平方向に対する周期性を仮定し、その周期長を L とすることにより k が次式のように離散化される。

$$k_n = k_0 + \frac{2\pi}{L}n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (3)$$

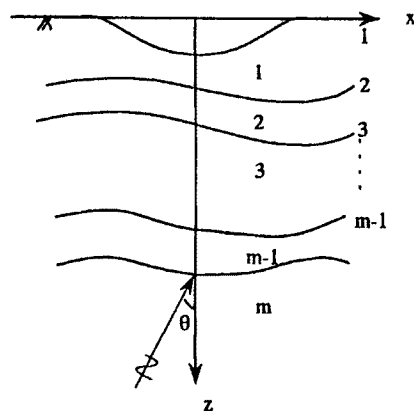


Fig. 1. Layered media with irregular interfaces.

これにより式(1), (2)の無限積分が無限級数の形になる。この項数を $\pm N$ 個で打ち切ると、変位、応力に関する以下の表現式を得る。すなわち、第 (i) 層境界面 I ($I = i, i+1, \dots, M-1$) の変位、応力は

$$v_{(i)}(x) = \sum_{n=-N}^N [A_n^{(i)} U_{A(i)}(n, x) + B_n^{(i)} U_{B(i)}(n, x)] \quad (4)$$

$$\tau_{(i)}(x) = \sum_{n=-N}^N [A_n^{(i)} T_{A(i)}(n, x) + B_n^{(i)} T_{B(i)}(n, x)] \quad (5)$$

また、第 (m) 層境界面 M の変位、応力は

$$v_{(m)}(x) = \sum_{n=-N}^N A_n^{(m)} U_{A(m)}(n, x) + U_0(x) \quad (6)$$

$$\tau_{(m)}(x) = \sum_{n=-N}^N A_n^{(m)} T_{A(m)}(n, x) + T_0(x) \quad (7)$$

と表せる。ここで

$$U_{A(i)}(n, x) = \exp(i\nu_n^{(i)} \zeta_i(x)) \exp(ik_n x) \quad (8)$$

$$U_{B(i)}(n, x) = \exp(-i\nu_n^{(i)} \zeta_i(x)) \exp(ik_n x) \quad (9)$$

$$T_{A(i)}(n, x) = i\mu^{(i)}(k_n \cdot n_z^i(x) + \nu_n^{(i)} \cdot n_z^i(x)) \exp(i\nu_n^{(i)} \zeta_i(x)) \exp(ik_n x) \quad (10)$$

$$T_{B(i)}(n, x) = i\mu^{(i)}(k_n \cdot n_z^i(x) - \nu_n^{(i)} \cdot n_z^i(x)) \exp(-i\nu_n^{(i)} \zeta_i(x)) \exp(ik_n x) \quad (11)$$

$$U_0(x) = \exp(ik_0 x - i\nu_0 \zeta_M(x)) \quad (12)$$

$$T_0(x) = i\nu^{(m)}(k_0 \cdot n_z^M(x) - \nu_0 n_z^M(x)) \exp(ik_0 x - i\nu_0 \zeta_M(x)) \quad (13)$$

上式中添字 (i) は層に関するもの、 I は境界面に関するものであり、変数 n は波数 k_n に関するもの、また、 $\zeta_i(x)$ は境界面 I の形状を表す関数である。ここで、境界面 1 の応力開放条件、境界面 I ($I = 2 \sim M$) の変位、応力の連続放条件により次式が成り立つ。

$$[G_i] \{A^{(i)}\} = \{0\} \quad (14)$$

$$[G_{(i)}] \{A^{(i)}\} = [G_{(i-1)}] \{A^{(i-1)}\} \quad (i = 1, \dots, m-1) \quad (15)$$

$$[G_{(m-1)}] \{A^{(m-1)}\} = [G_M] \{A^{(m)}\} + \{H\} \quad (16)$$

ここに、上式中の各マトリクス、各ベクトルは以下のとおりである。

$$\{A^{(i)}\} = \{A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_n^{(i)} | B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \dots, B_n^{(i)}\}^T \quad (i = 1, \dots, m-1) \quad (17)$$

$$\{A^{(m)}\} = \{A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, \dots, A_n^{(m)}\}^T \quad (18)$$

$$[G_i] = [T_{A(i)}(n, x) | T_{B(i)}(n, x)] \quad (19)$$

$$[G_{(i)}] = \begin{bmatrix} U_{A(i)}(n, x) & U_{B(i)}(n, x) \\ T_{A(i)}(n, x) & T_{B(i)}(n, x) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[G_M] = \begin{bmatrix} U_{A(m)}(n, x) \\ T_{A(m)}(n, x) \end{bmatrix} \quad (21)$$

各行列の成分は、波数に関しては行方向、 x に関しては列方向に並んでいる。上式を解く場合の未知数は $\{A^{(i)}\}$, $\{A^{(m)}\}$ の $3 \times (2N+1)$ 個であり、これを解くためには $3 \times (2N+1)$ の離散点をとることで解決できる。しかし、DWM では地盤に周期性を仮定しているため、変位の式、応力の式の各列をフーリエ変換し、その長波長成分から $2n+1$ の成分を取り出して並べかえることにより、最終的に $6 \times (2N+1)$ の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} G'_I & 0 \\ G'_E & G'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ A^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H' \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここに、 $[G']$ は $[G]$ のフーリエ変換であり、 $[G'_E]$ は次式で表される。

$$[G'_E] = [G_{(m-1)}']^{-1} [G_{(m-2)}']^{-1} \dots [G_{(2)}']^{-1} [G_{(1)}']^{-1} \quad (23)$$

これを解くことにより $A^{(i)}, A^{(m)}$ が得られ、式 (15), (16) を適用することによって各層内の散乱係数ベクトルが得られる。これを用いると、式 (4)～(7) により各層、任意の点での変位、応力が得られる。以上が、2次元 SH 波動場に対する DWM の定式化である。

2次元 P-SV 波動場に対しては、以下のような変位ポテンシャルを導入する。

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (24)$$

ϕ は P 波を代表するポテンシャル、 ψ は SV 波を代表するポテンシャルである。地盤の周期性を仮定して無限積分を無限離散和で表現した後、波数を $\pm N$ で打ち切ると、SH 波動場における変位と同様、以下の式が得られる。すなわち、 m 層地盤における第 (i) 層内 ($i = 1, \dots, m-1$) では

$$\phi^{(i)}(x, z) = \sum_{n=-N}^N [A_p^{(i)}(k_n) \exp(i\nu_{pn}^{(i)}z) + B_p^{(i)}(k_n) \exp(-i\nu_{pn}^{(i)}z)] \exp(ik_nx) \quad (25)$$

$$\psi^{(i)}(x, z) = \sum_{n=-N}^N [A_s^{(i)}(k_n) \exp(i\nu_{sn}^{(i)}z) + B_s^{(i)}(k_n) \exp(-i\nu_{sn}^{(i)}z)] \exp(ik_nx) \quad (26)$$

第 (m) 層内では

$$\phi^{(m)}(x, z) = \sum_{n=-N}^N A_p^{(m)}(k_n) \exp(i\nu_{pn}^{(m)}z) \exp(ik_nx) + \phi_0(x, z) \quad (27)$$

$$\psi^{(m)}(x, z) = \sum_{n=-N}^N A_s^{(m)}(k_n) \exp(i\nu_{sn}^{(m)}z) \exp(ik_nx) + \psi_0(x, z) \quad (28)$$

$$\nu_{pn}^{(i)} = \left[\left(\frac{\omega}{c_p^{(i)}} \right)^2 - k_n^2 \right]^{1/2} \quad \nu_{sn}^{(i)} = \left[\left(\frac{\omega}{c_s^{(i)}} \right)^2 - k_n^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

が成り立つ。ここで、 $A_p(k), A_s(k)$ は下降波動、 $B_p(k), B_s(k)$ は下降波動に対する散乱係数である。添字 p, s はそれぞれ P 波と S 波に関するものを表す。また、 ϕ_0, ψ_0 は、入射波に関するポテンシャルであり、P 波、SV 波入射に対しては適宜ポテンシャル値を与えればよい。

各層、各境界面での変位、応力の表現式を用いて、境界条件（地表面での応力 = 0、境界面での変位、応力の連続）を適用することにより連立方程式を構築する。係数行列を x 方向にフーリエ変換し、その長波長成分より $2N+1$ の成分を取り出すことにより、散乱係数ベクトル $A^{(i)}, A^{(m)}$ に関する $6 \times (2N+1)$ 元の連立一次方程式を得る。これを解くことにより散乱係数が得られるので、任意の地点での変位、応力を求めることができる。以上が 2次元 P-SV 波動場に対する定式化である。

DWM はマトリックスが数値的に不安定になる場合が生じるため、それを防ぐために振動数にわずかの虚数を加える。これは k の無限積分を実軸上の積分路から複素平面内の積分路に変える意味があり、実軸上に存在するラブ波、レーリー波の極を回避することができる。

2.2 離散化波数による解析

解析対象としては幅 500 m、最大深さ 50 m のコサイン型境界面を持つ不整形地盤を考え、これをモデル化した。この地盤モデルの形状を Fig. 2 に示す。

解析条件に関しては、地盤周期長 L は 1280 m、離散地点数 $N_p = 64, 128$ 、打ち切り波数 $N = 15, 31, 45$ とした。減衰定数 h は上下どちらの層も 0.05 である。Fig. 3(a), (b) は、SH 波入射に対する解析例を示したものである。入射波の振動数は 1 Hz, 2 Hz, 3 Hz、上下層のインピーダンス比 1:2、入射角は 0° である。(a) は周波数応答の地表面分布、境界面分布を表し、縦軸が応答倍率、横軸が地表面の水平方向距離である。(b) は第 2 層内の散乱波数の振幅スペクトルであり、これは反射散乱波数の各波動ごとの強度を表す。横軸は k_0 を中心とした離散化波数 k_n の番号 n を表している。また、これらの図中には 5 本の線が描かれ

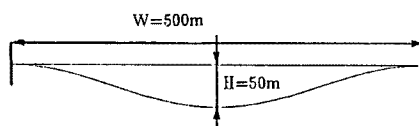
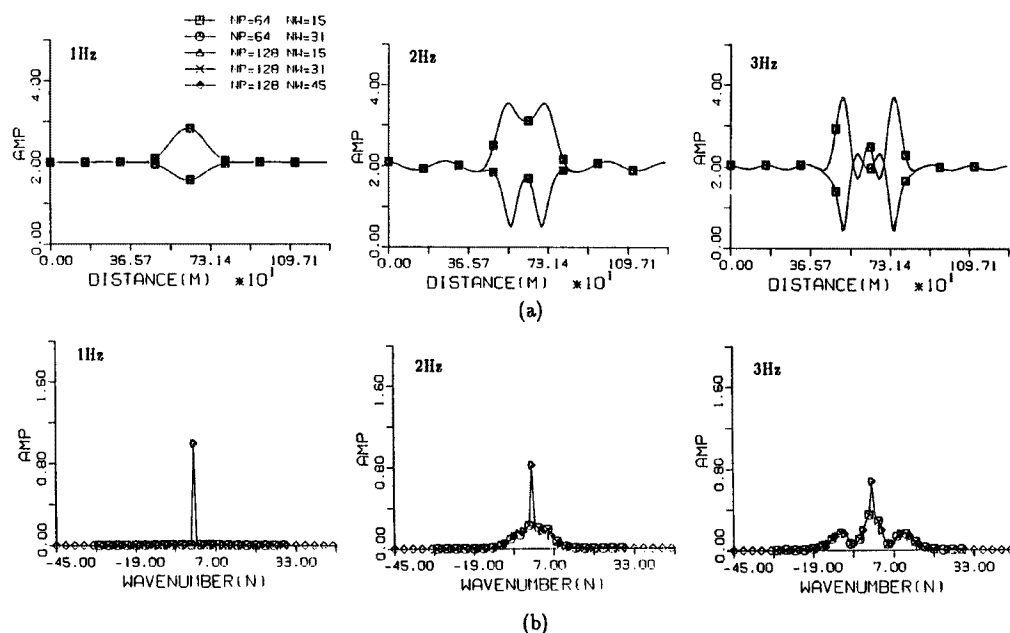


Fig. 2. Ground model.

Fig. 3. Frequency responses and wave number spectra of the ground for SH-wave input; impedance ratio (IMR) is 1:2 and incident angle θ is 0° .

(a) frequency responses on ground surface and interface,

(b) wave number spectra of scattered waves in the second layer.

ているが、これは解析条件の種別であり、 $\square$ は $N_p = 64$, $N = 15$, $\circ$ は $N_p = 64$, $N = 31$, $*$ は $N_p = 128$, $N = 15$, $\triangle$ は $N_p = 128$, $N = 31$, $\diamond$ は $N_p = 64$, $N = 31$ の解析結果を示している。

Fig. 3(a) からわかるように、不整形地盤においては、水平成層地盤と異なり場所により応答倍率が急変する。また水平成層地盤においては、入射波と同じ波数の波しか存在しないが、(b) から入射波数の近傍にも散乱波が存在している。これは入射角をつけた場合にさらに顕著に現れる。また、散乱波動は波数が入射波の波数から遠ざかるほど小さくなっていく。

解析法の誤差は通常、解析解（厳密解）と比較し評価すべきであるが、今回解析に用いたモデルのような形状に対する解析解は得られていない。半円形谷や楕円谷については解析解が得られているが、そのようなモデルは地表面と境界面との交点がなめらかでなく微分可能でないため、DWM ではモデル化に起因する誤差が生ずる可能性がある。そこで本研究においては、DWM の解析結果から手法内部における誤差を評価する。すなわち、2層地盤においては上下層のいずれのパラメタを用いても境界面での変位、応力が計算されるので、以下のように変位、応力の誤差を定義する。

$$eru(\%) = \frac{\max ||u_{(b)}^2| - |u_{(b)}^1||}{\max |u_{(b)}^2|} \dots\dots\dots (30)$$

$$ert(\%) = \frac{\max ||\tau_{\hat{h}}| - |\tau_{\hat{h}}||}{\max |\tau_{\hat{h}}|} \dots\dots\dots (31)$$

上式中 $u_{\hat{h}}$, $\tau_{\hat{h}}$ は, (i) 層のパラメタを用いて計算された第 2 境界面での変位, 応力である。上式の誤差は, 設定した境界条件が満たされている程度を表すものである。この誤差を周波数に対してプロットしたものが Fig. 4, 5 である。図中の 5 本の線は前述の結果と同様, 解析条件を示している。Fig. 4 はインピーダ

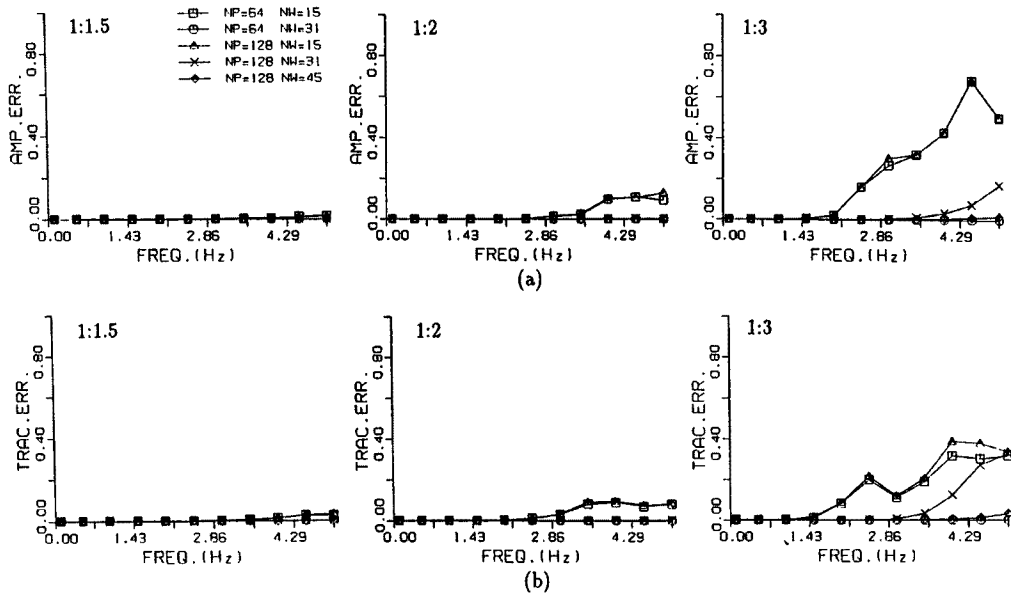


Fig. 4. Calculation errors at the interface for three different impedance ratios.
(a) displacement, (b) stress.

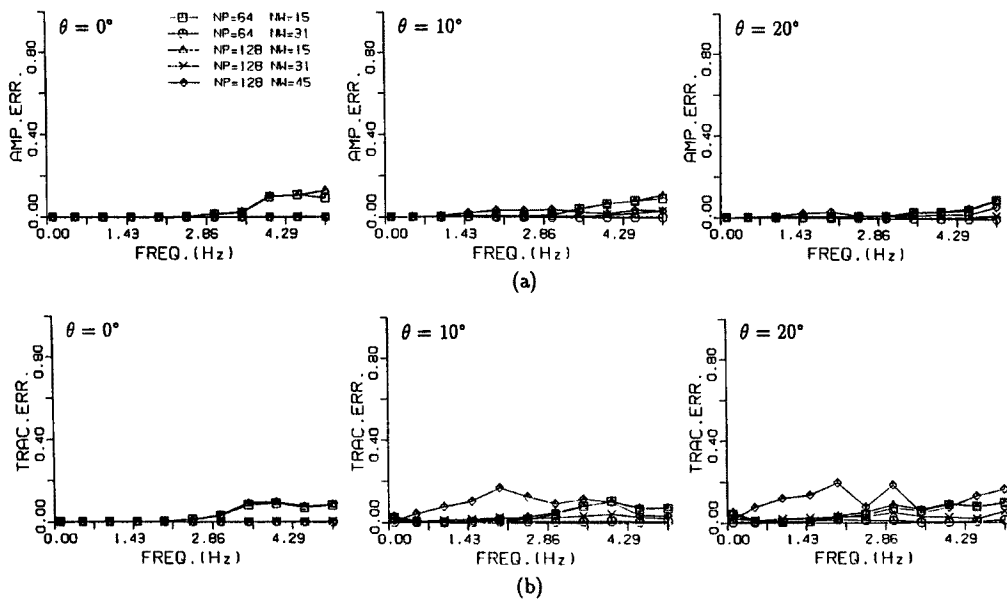


Fig. 5. Calculation errors at the interface for three different incident angles.
(a) displacement, (b) stress.

ンス比による比較, Fig. 5 は入射角による比較, (a), (b) はそれぞれ変位, 応力を表す。Fig. 4より, インピーダンス比が大きいほど誤差が大きくなり, また解析条件から考えると, 離散地点数よりも打ち切り波数による影響が大きいことがわかる。Fig. 5 から, 入射角の誤差に対する影響は小さいことがわかるが, ここでも打ち切り波数が小さい場合に大きな誤差が現れている。さらに, 同じ打ち切り波数 31 において離散地点数が少ない方が精度の良い結果を得ている。これは, DWM では通常の変点法から波数領域の連続条件にフーリエ変換を用いて変換しているためであり, 離散地点数と総波数が近いほど精度の良い結果が得られるためである。

Fig. 6, 7 は SV 波入射による解析結果を示したものである。インピーダンス比 1:2, 入射角 0° の場合を SH 波と同様 1 Hz, 2 Hz, 3 Hz に対して示したものである。Fig. 6(a) は水平変位, (b) は鉛直変位の応答倍率, また Fig. 7(a), (b) は P 波, SV 波の第 2 層内の散乱係数を示す。これらの図から変位に関しては, 離散値点数, 打ち切り波数を大きくすると解が収束していく傾向が見られるが, 散乱係数に関しては SH 波と異なり, 必ずしも離散地点数, 打ち切り波数が大きくしても収束する結果は得られていない。SV 波の場合は, SH 波よりも波動場が複雑であるため係数行列が特異になり易く, また変位, 応力がそれぞれ 2 方向あるので行列成分の大きさに片寄りが生じる場合があるからである。そのため, 打ち切り波数を大きくして係数行列を大きくしていくと, 変位, 応力の連続条件が全ての点で満たされるとは限らなくなるためである。

Fig. 8 は, $N_p = 64$, $N_w = 31$ に対する結果を 1 次元波動論による結果と比較したものである。1 次元解析は境界面上の離散点の深さに対応する水平成層地盤の応答を表しているため, 当然散乱波動による影響は考慮できない。この点, DWM は 1 次元解析で表せない不整形境界での波動の散乱の影響を表現していることがわかる。鉛直入射の場合, 1 次元波動論では鉛直変位は生じないが, DWM 法では散乱波動から生じる鉛直変位が現れている。

Fig. 9 は応力の誤差を入射角の違いによって比較したものである。変位の連続に関しては入射角による

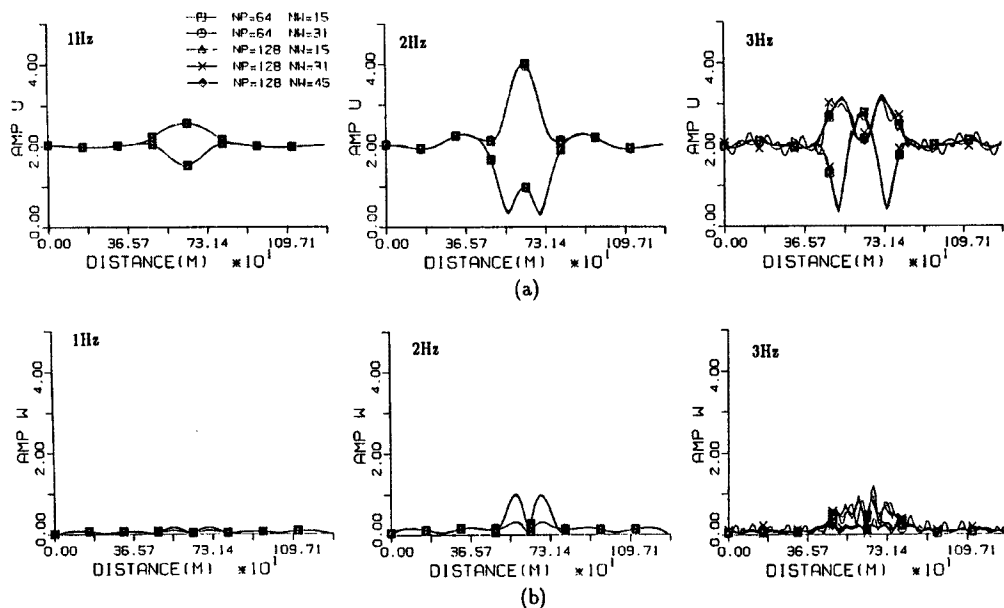


Fig. 6. Frequency responses of the surface ground and interface for SV-wave input (IMR=1:2 and $\theta=0^\circ$).

(a) amplification factor of horizontal displacement.

(b) amplification factor of vertical displacement.

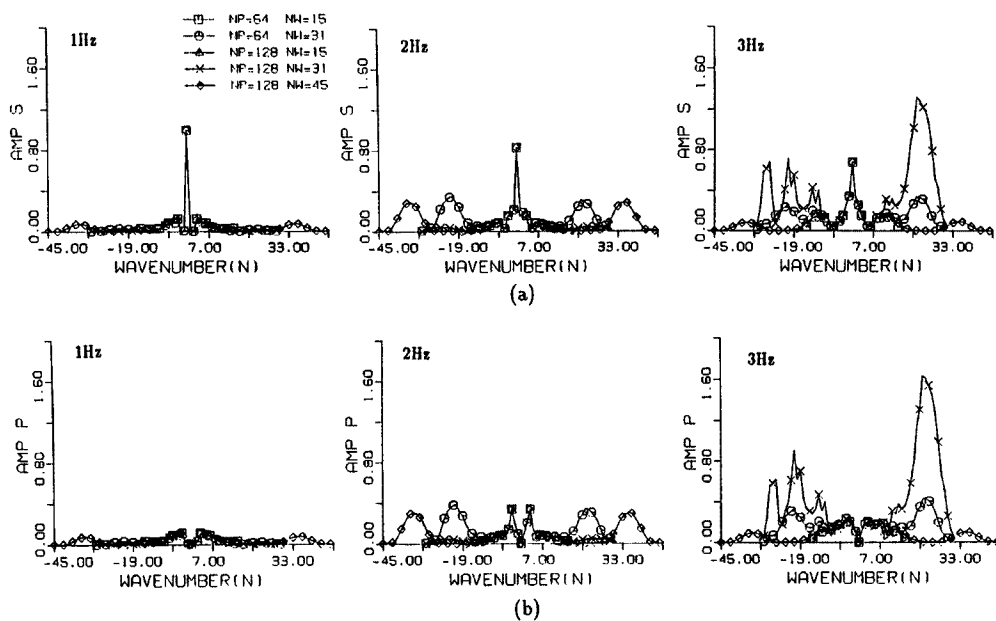


Fig. 7. Wave number spectra of scattered waves in the second layer for SV-wave input. (a) SV-wave, (b) P-wave.

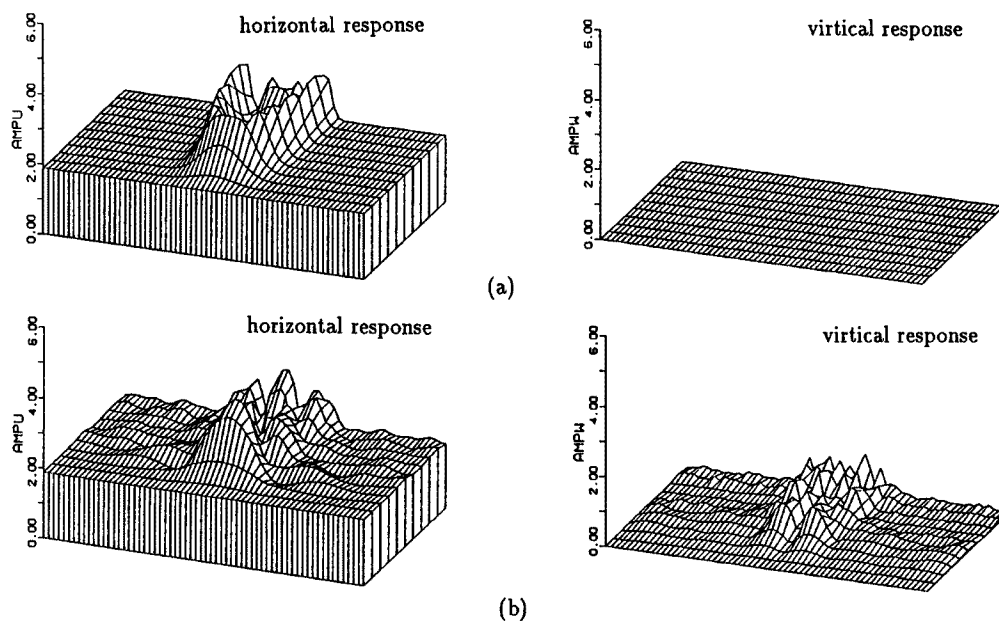


Fig. 8. Comparison of one-dimensional and two-dimensional analyses.
(a) response functions for 1D analysis,
(b) response functions for 2D analysis.

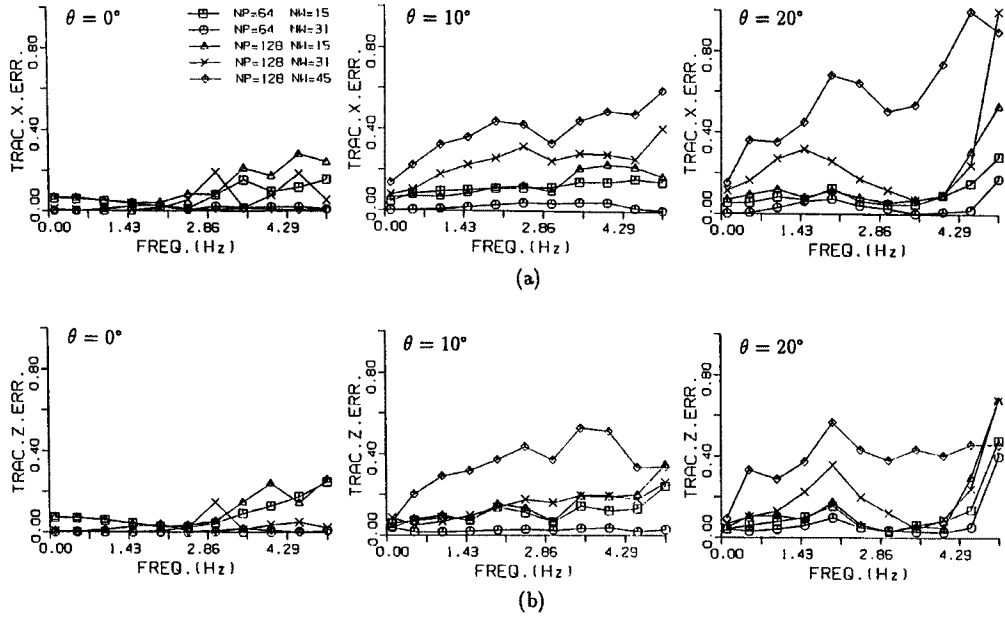


Fig. 9. Calculation error of stress for three different incident angles.
(a) horizontal direction, (b) vertical direction.

影響は小さいが、応力の連続条件に関しては、入射角による影響は非常に大きい。さらに $N_p = 128$, $N_w = 45$ に関しては、入射角をつけると解が安定しない。これは、入射角がある場合に波動場がさらに複雑になり、行列の成分の非均衡性が大きくなりやすいためであると考えられる。

本解析では、SH 波動場に関しては打ち切り波数、離散地点数が大きくなるほど収束する傾向が見られたが、P-SV 波動場に関しては余り大きな打ち切り波数を用いると解が収束しない場合が生じた。しかし、2 Hz 程度までの周波数帯では、いずれの場合も安定した解が得られた。以後、他解析手法との比較に際しては SH に関しては $N_p = 64$, $N_w = 31$ 、P-SV に関しては $N_p = 64$, $N_w = 15$ の解析結果を用いる。

3. 有限要素法と境界要素法による地盤震動解析

3.1 有限要素法と境界要素法の定式化

地盤震動問題を解析する場合、FEM のみでは逸散波動が考慮できず、また、仮想の境界上での反射波が生じる問題があるため、粘性境界等^{8),9)}の境界処理法が開発されてきた。しかしこれも、仮想の境界で生じる反射波を完全に取り去ることはできない。一方、BEM は無限地盤にも適用でき、このような問題の解析に適している。そこで本研究では、有限要素法による震動解析法としては境界要素法 (BEM) とのハイブリッド法を考え¹⁰⁾、解析を行った。

まず、要素質量マトリクス $[M_e]$ 、要素剛性マトリクス $[K_e]$ 、要素節点力ベクトル $\{f_e\}$ を自由度に合わせて重ね合わせることで全体系の方程式が得られる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (32)$$

ここに、 $[M]$, $[K]$, $\{f\}$ は全体系の質量マトリクス、剛性マトリクス、節点力ベクトルである。

定常状態においては、 $\{u\} = \{u\} \exp(-i\omega t)$ とおくと次式が得られる。

$$[[K] - \omega^2[M]]\{u\} = \{f\} \quad (33)$$

減衰を考慮する場合は、減衰定数を h として次式のように剛性マトリクスを複素数にすればよい。

$$[K^*] = (1 - 2ih)[K] \dots\dots\dots (34)$$

地盤震動問題においては、物体力（重力）の影響は小さいと考えられるので、本研究では右辺の節点力ベクトルのうち重力によるものは 0 とした。

BEM の定式化には様々な手法があるがここでは、相反定理に基づくもの¹¹⁾を用いる。無限体の中 (D) の空洞 (D^c) による散乱問題を考え、空洞の外部領域に相反定理を適用する。そして、散乱場に対する積分方程式を全変位場に拡張し、これを境界上に移行することで境界積分方程式を得る。これを離散化することによりマトリクス形式の境界積分方程式が得られる。この離散化に際しては境界を有限個の要素に分割し、要素内での変位応力を FEM 同様節点の変位、応力で置き換える。これにより次式のマトリクス形式を得る。

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{p\} \dots\dots\dots (35)$$

以上より、FEM からは $[[K] - \omega^2[M]]$ を $[S]$ と置くことで

$$[S]\{u\} = \{f\} \dots\dots\dots (36)$$

の形の剛性方程式が、BEM からは式 (35) の形の式が得られるのでこれらを結合する。

3.2 有限要素と境界要素ハイブリッド法の定式化¹⁰⁾

まず、FE 領域の節点について境界上の節点を添字 c 、それ以外の節点を添字 f で表すと、マトリクスが分割されて次式のように並びかえられる。

$$\begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fc} \\ S_{cf} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_f \\ f_c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

BE 領域についても FEM と同様の剛性方程式の形に変形するために、分布マトリクス $[L]$ によって以下のように BE 領域の $\{t\}$ を FE 領域の $\{f\}$ に対応させる。この $[L]$ を用いると、BEM における剛性方程式は次のようになる。

$$[K]\{u\} = \{f\} + \{p\} \dots\dots\dots (38)$$

ここに

$$[K] = [L][G]^{-1}[H] \dots\dots\dots (39)$$

$$\{p\} = [L][G]^{-1}\{p\} \dots\dots\dots (40)$$

BEM と FEM の境界での変位、応力の連続条件を用い、両剛性方程式を重ねることにより次の全体系の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fc} \\ S_{cf} & S_{cc} + K_{cc} & K_{cb} \\ & K_{bc} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_c \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_f \\ 0 \\ f_b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

上式を解くことにより、あらゆる節点の変位が求められる。以上が FE-BE ハイブリッド法の定式化の概略である。

3.3 有限要素—境界要素ハイブリッド法による解析

解析モデルは DWM と同じモデルを用いた。FEM のメッシュの長さは解析最小波長の 1/6 から 1/12 が好ましいとされている。このことを勘案し、本研究においては 5 Hz までを解析対象とするため、メッシュ長さとしては 10 m が単位のもの、20 m が単位のもの 2 種類を考えた。このモデル図を Fig. 10(a), (b) に示す。用いた要素は FEM においては 3 節点および 4 節点の 1 次要素を用い、BEM においては変位、応力のいずれも 1 次要素を用

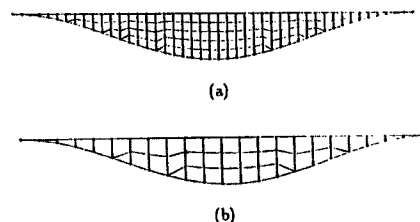


Fig. 10. FEM mesh; (a) 10 m, (b) 20 m.

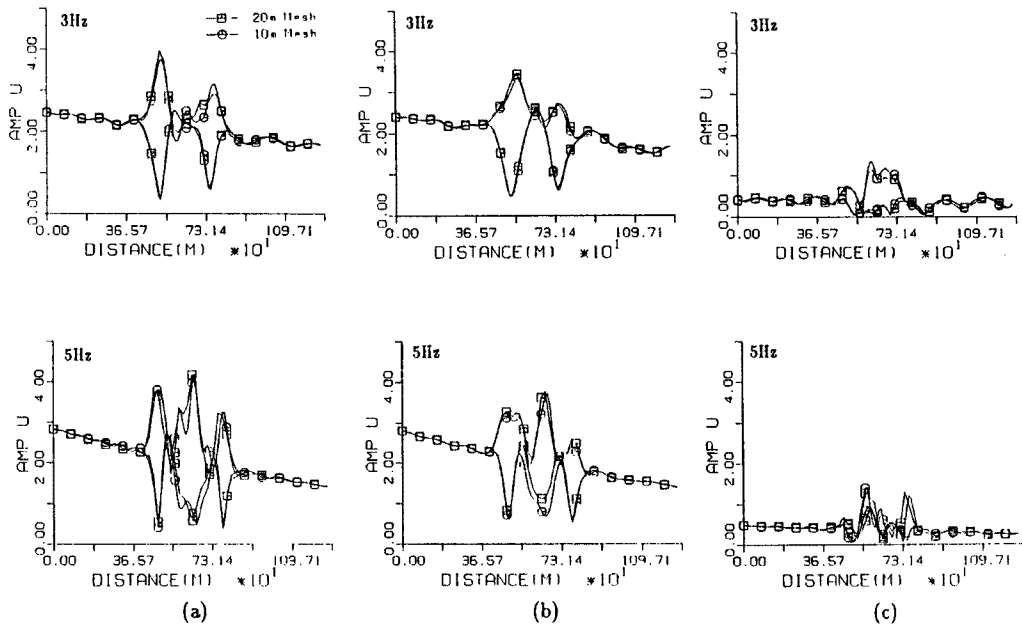


Fig. 11. Frequency responses of the ground surface and interface for SH- and SV-wave inputs by FE-BE hybrid method (IMR=1:2, $\theta=10^\circ$).

(a) SH-wave input, (b) amplification factor of horizontal direction for SV-wave input, (c) amplification factor of vertical direction for SV-wave input.

いて補間した。

Fig. 11 は、SH 波、SV 波入射に対する応答倍率の地表面分布、境界面分布を 3 Hz と 5 Hz に対して表したものである。インピーダンス比は 1:2、入射角は 10° である。(a) は SH 波入射の応答倍率、(b)、(c) は SV 波入射の水平、鉛直応答倍率である。応答倍率の図は縦軸が応答倍率、横軸が地表面方向の距離を表す。図中には 2 本の線が描かれているが、□ はメッシュ長が 20 m のもの、○ は 10 m のものである。この解析対象に対しては、5 Hz までいずれのメッシュ長においても発散等の不安定現象は現れず、上記の解析条件で近似できることがわかる。

DWM では周波数が 3.0 Hz 以上になると解が発散する場合があるが、FE-BE ハイブリッド法においてはメッシュ長により多少の差異はあるもののこの傾向は顕著には見られない。

以上が FE-BE 解析の結果である。特筆すべきことは、5 Hz までの周波数において、解析条件、モデルに関わらず安定した解が得られたことである。これは DWM においては見られなかったものであり、これが FE-BE ハイブリッド法の長所である。

4. 離散化波数と有限要素ハイブリッド法による地盤震動解析

4.1 離散化波数—有限要素ハイブリッド法の定式化

離散化波数—有限要素 (DW-FE) ハイブリッド法については SH 波動場に対する研究¹²⁾があるが、本研究では P-SV 波動場にも適用し、実地盤に近いパラメータを用いて解析する。また、これを基に DW-FE ハイブリッド法の適用性、解析限界等について考察する。

Fig. 1 に示したような $m+1$ 層地盤を考え、最上層は FEM により定式化し、残りの m 層を DWM により定式化する。そして、これらを境界上の変位、応力の連続条件により連結し、全体系の方程式を導く。こ

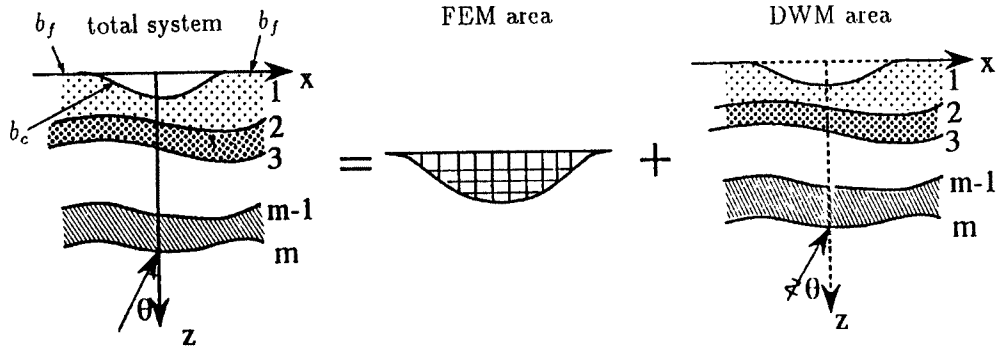


Fig. 12. Schematic explanation of DW-FE hybrid method.

の概念図を示したものが Fig. 12 である。

定常波動場における運動方程式は FEM のマトリックスを用いると式 (33) で表され、これを整理すると式 (37) のようにマトリックス分割される。ここで、物体力を無視すると $\{f_f\}$ は 0 であり、このことから次式が得られる。

$$\{u_f\} = [S_f]\{u_c\} \quad (42)$$

$$\{f_b\} = [F_c]\{u_c\} \quad (43)$$

$$[S_f] = -[S_{ff}]^{-1}[S_{fc}] \quad (44)$$

$$[F_c] = [S_{cc}] - [S_{cf}][S_{ff}]^{-1}[S_{fc}] \quad (45)$$

添字 c は結合境界面上の節点に、添字 f はその他の節点に対応しており、また、 $[S]$ は $[[K] - \omega^2[M]]$ を表している。上式より、境界面上の変位と境界面上の節点力が結びつけられ、これを用いて DWM と結合する。

DW 領域については、上から第 (1) ~ (m) 層とし境界面を 1 ~ M とする。2. で得られたように境界面 1 の応力 $\{\tau_{(1)}(x)\}$ と境界面 2 ~ M-1 の連続条件が第 (1) 層内と第 (m) 層内の散乱係数ベクトル $\{A^{(1)}\}$, $\{A^{(m)}\}$ をパラメータとして次式のマトリックスで表される。

$$\{\tau_{(1)}(x)\} = [T_1]\{A^{(1)}\} \quad (46)$$

$$\{u_{(1)}(x)\} = [U_1]\{A_{(1)}\} \quad (47)$$

$$[G_E]\{A^{(1)}\} = [G_M]\{A^{(m)}\} + \{H\} \quad (48)$$

境界面の離散点数を N_p , DW 領域における打ち切り波数を N とすると上式中のベクトル $\{\tau_{(1)}(x)\}$, $\{u_{(1)}(x)\}$, マトリックス $[T_1]$, $[U_1]$ の次数は各波動場で次のようになる。

$\{\tau_{(1)}(x)\}$: SH 波動場で	N_p	P-SV 波動場で	$2 N_p$
$\{u_{(1)}(x)\}$: SH 波動場で	N_p	P-SV 波動場で	$2 N_p$
$[T_1]$: SH 波動場で	$N_p \times (2 N + 1)$	P-SV 波動場で	$2 N_p \times (4 N + 2)$
$[U_1]$: SH 波動場で	$N_p \times (2 N + 1)$	P-SV 波動場で	$2 N_p \times (4 N + 2)$

2 層地盤について考える場合は、DW 領域は単一地盤であり、その表面での変位応力が次のように表される。

$$\{u(x)\} = [U_M]\{A\} + \{u_0(x)\} \quad (49)$$

$$\{\tau(x)\} = [T_M]\{A\} + \{t_0(x)\} \quad (50)$$

上式は (n) 層地盤の DWM における (m) 層 M 境界での変位、応力の式に対応しており、 $\{t_0(x)\}$, $\{u_0(x)\}$ は入射波による項である。以上が DW 領域の定式化である。

これらの式を基に、境界条件によって結合する。DW 領域の境界面 1 は自由境界と結合領域に分けられるので、それぞれ b_f , b_c で表す (Fig. 12)。境界条件は次式で表される。

$$\{\tau_h(x)\} = \{0\} \quad \text{on } b_f \dots\dots\dots (51)$$

$$\{\tau_h(x)\} = \{\tau_c\} \quad \text{on } b_c \dots\dots\dots (52)$$

$$\{u_h(x)\} = \{u_c\} \quad \text{on } b_c \dots\dots\dots (53)$$

上式中 $\{\tau_c\}$, $\{u_c\}$ はそれぞれ, FE 領域の境界上の応力, 変位を表す。FEM では, 境界上の応力は, 等価集中荷重ベクトル $\{f_c\}$ の形で与えられているので, これを FE-BE で導入した分布マトリックス $[L]$ を用いて $\{\tau_c\}$ に変換する。

$$\{f_c\} = [L]\{\tau_c\} \dots\dots\dots (54)$$

$$\{\tau_c\} = [L]^{-1}\{f_c\} \dots\dots\dots (55)$$

$\{f_c\}$ は式 (42), (43) により境界面上の変位 $\{u_c\}$ で表されており, これを用いると境界面上の応力が $\{u_c\}$ を用いて次式のように表される。

$$\{\tau_c\} = [T_c]\{u_c\} \dots\dots\dots (56)$$

$$[T_c] = [L]^{-1}[F_c] \dots\dots\dots (57)$$

上式に式 (51) ~ (53) を代入することにより, DWM と FEM の結合条件が, FE 領域境界上の応力 $\{\tau_c\}$ と DW 領域境界上の変位 $\{u_h\}$ を用いて次式のように表される。

$$\{\tau_c\} = [T_c]\{u_h\} \dots\dots\dots (58)$$

ここで, 境界条件式 (51), (52) を用いると次式が得られる。

$$\{\tau_h(x)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [T_c]\{u_h\} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (59)$$

上式は, DW 領域第 (1) 層の散乱係数ベクトル $\{A^{(1)}\}$ を用いて次式のように表される。

$$[G_1]\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [T_c][U_1]\{A^{(1)}\} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (60)$$

ただし, 式 (59) の $\{\tau_h(x)\}$ は式 (5), (17), (19) より $[G_1]\{A^{(1)}\}$ の形になっている。これは 2 層地盤 (DW 領域が一層) の場合には次式となる。

$$[G_1]\{A^{(1)}\} + \{t_0(x)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [T_c][U_1]\{A^{(1)}\} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ [T_c]\{u_0(x)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (61)$$

これを基に, 多層地盤および 2 層地盤についての散乱係数ベクトル $\{A^{(1)}\}$ をパラメータとする方程式が, それぞれ次式のように求められる。

$$[G_1]\{A^{(1)}\} = [TU]\{A^{(1)}\} \dots\dots\dots (62)$$

$$[G_1]\{A^{(1)}\} + \{t_0\} = [TU]\{A^{(1)}\} + \{TU_0\} \dots\dots\dots (63)$$

ここに

$$[TU] = \begin{Bmatrix} [0] \\ [T_c][U_1] \\ [0] \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (64)$$

$$\{TU_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [T_c]\{u_0(x)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (65)$$

上式は境界面の離散点数を N_p とすると, SH 波動場で N_p 次, P-SV 波動場で $2N_p$ 次の式であり, DWM と同様, 係数行列の列方向にフーリエ変換し, $(2N+1)$ 個の長波長成分を取り出すことにより, SH 波動場で $(2N+1)$ 次, P-SV 波動場で $(4N+2)$ 次の方程式となる。フーリエ変換後の各行列を ' で表すと式 (62), (63) は次式のようになる。

$$[G_T]\{A^{(1)}\} = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$[G_T]\{A^{(1)}\} = \{H\} \quad \dots\dots\dots (67)$$

ここに

$$[G_T] = [G'_T] - [TU'] \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\{H\} = \{TU'_0\} - \{t'_0\} \quad \dots\dots\dots (69)$$

式 (22) にない DW 領域が 2 層以上となる場合を考えると、第 2 境界面から最下境界面までの連続式と連立することにより、次式のような、SH 波動場で $(6N+1) \times (6N+1)$ 、P-SV 波動場で $(12N+1) \times (12N+1)$ の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} [G_T] & [0] \\ [G'_E] & [G'_M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (70)$$

上式より $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(m)}\}$ が得られ、DW 領域における伝達マトリックスを用いることにより全層での散乱係数ベクトル $\{A^{(1)}\}$ が得られる。これにより DW 領域内の任意の点での変位、応力等が求められる。また、FE 領域に関しては $\{A^{(1)}\}$ により境界面上の変位 $\{u_b(x)\} = \{u_c\}$ が求められ、これを式 (42) に代入することにより全節点の変位が求められる。以上が DW-FE ハイブリッド法の定式化である。

4.2 離散化波数—有限要素ハイブリッド法による解析

DW-FE ハイブリッド法による解析においては DW 領域の節点と FE 領域の節点を同じ位置にとらなければならぬというかなり厳しい制約条件がある。これまでの解析結果より、DWM の方が解析条件に対して非常に敏感であるので、本研究では DW 領域の解析条件を決定することにより、FEM 領域のメッシュ長を決定した。周期長は 1280 m で一定とし、離散地点数に関しては 64, 128 の 2 種について解析を行った。こ

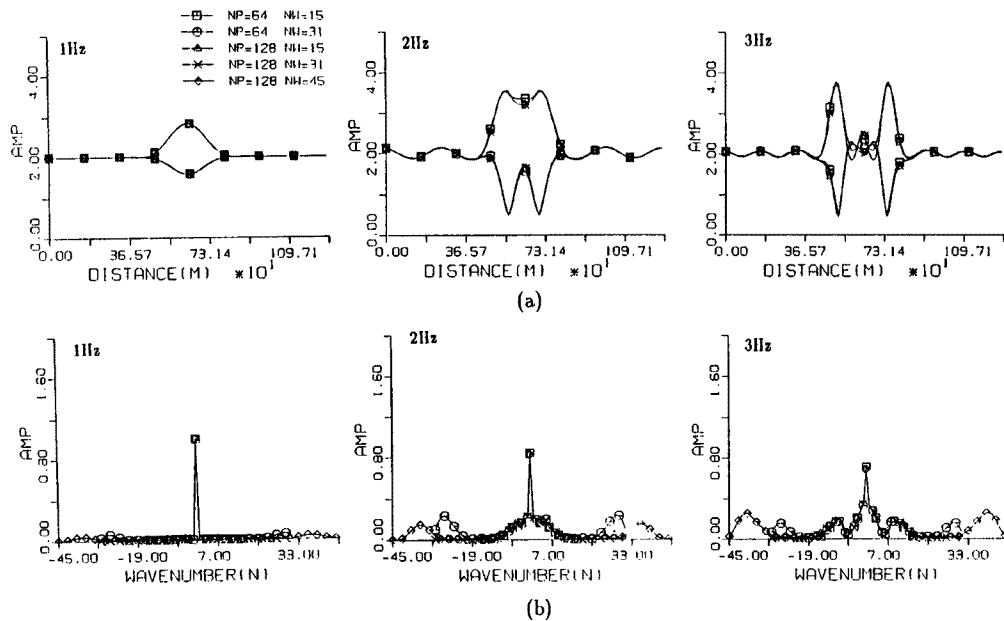


Fig. 13. Frequency responses and wave number spectra of the ground for SH-wave input (IMR = 1:2, $\theta=0^\circ$).

(a) frequency responses on ground surface and interface,

(b) wave number spectra of scattered waves in the second layer.

の場合、離散地点間隔はそれぞれ 20 m, 10 m であるので、自動的に FEM 領域のメッシュ長が 20 m, 10 m と決定される。打ち切り波数は 15, 31, 45 の 3 種である。

Fig. 13(a), (b) は SH 波入射に対する解析結果である。(a) が地表面、境界面での応答倍率分布, (b) が第 2 層内での散乱波数の振幅スペクトルである。入射角が 0° の場合、変位に関しては Fig. 2 の DW 解析と同様、離散地点数が多いほど、また打ち切り波数が大きいほど安定した解が得られる傾向がある。しかし、入射角が大きくなるにつれ境界面と地表面の交わる部分で変位の値が大きくなり、発散する場合も生じる。これは、FEM では境界上で変位、応力が線形補間で表されるのに対し、DWM ではその点での値が与えられるので、変位、応力が急変する部分では連続条件が満たされにくくなるためである。

誤差の評価に関しては、DW-FE ハイブリッド法の場合、定式化上、境界面での変位の連続条件は必ず満たされているので、境界面上の応力の連続条件についての誤差を評価する。この誤差に関しては、2. で定義したものと同一のものを用いる。これを Fig. 14(a), (b) に示す。(a) はインピーダンス比, (b) は入射角による比較である。インピーダンスによる誤差は 1:3 の場合が一番大きくなっている。これは、上層の波長が短くなることに起因するものである。入射角による誤差は $N_p = 64, N_w = 31$ の場合を除いて発散傾向がある。

Fig. 15(a), (b) は SV 波入射に対する水平、鉛直応答倍率を示したものである。インピーダンス比は 1:2, 入射角は 0° である。ただし、 $N_p = 128, N_w = 45$ の場合については発散したためプロットされていない。図より、 $N_p = 64, N_w = 15$; $N_p = 128, N_w = 15$; $N_p = 128, N_w = 31$ の場合に安定した解が得られており、SH 波の場合と異なっている。特に、 $N_w = 15$ については入射角が 20° においても安定した解が得られた。

Fig. 16(a), (b) は境界面水平方向応力の連続条件における誤差を示したものである。(a) はインピーダンス比による比較, (b) は入射角による比較である。(a) より、応力の連続条件は、 $N_p = 64, N_w = 15$ と $N_p = 128, N_w = 15$ の場合に比較的満足されていることがわかる。この傾向は(b)の入射角による比較についても同様である。DWM による解析でも述べたが、P-SV 波動場に関しては行列の成分の非均衡性が大きい

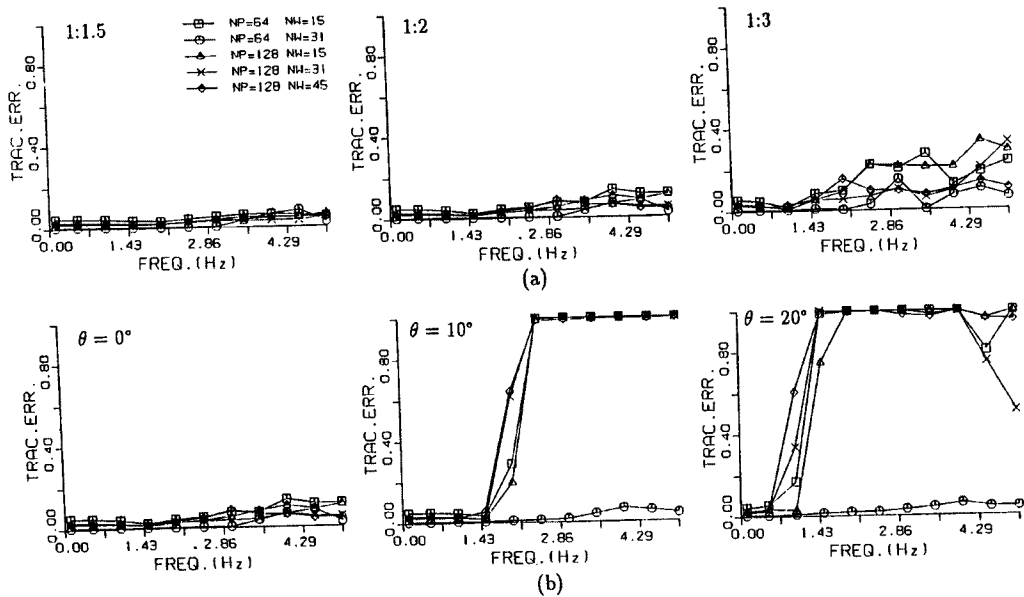


Fig. 14. Calculation error at the interface for three different impedance ratios and incident angles.
(a) comparison at errors for three different impedance ratios,
(b) comparison of errors for three different incident angles.

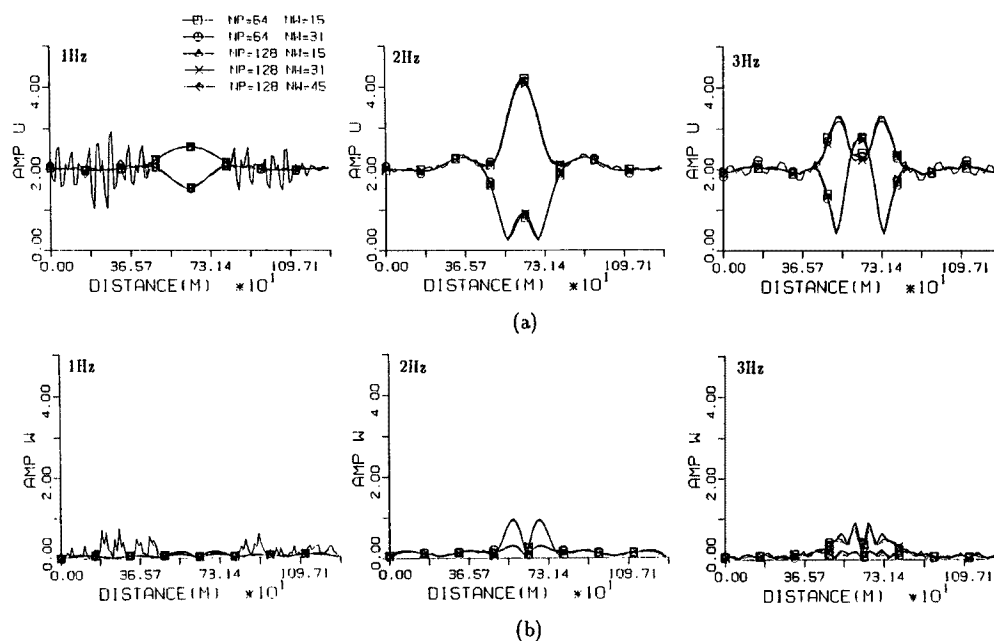


Fig. 15. Frequency responses on the ground surface and interface for SV-wave inputs by DW-FE hybrid method ($IMR=1:2$, $\theta=10^\circ$).

(a) amplification factors of horizontal direction,

(b) amplification factors of vertical direction.

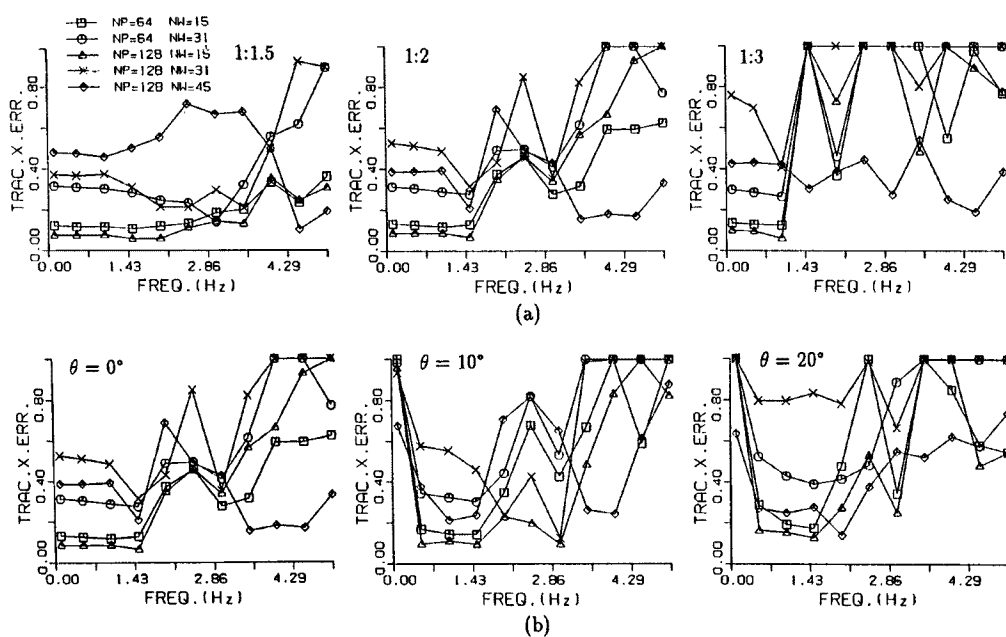


Fig. 16. Calculation error at the interface for three different impedance ratios and incident angles.

(a) comparison of errors for three different impedance ratios,

(b) comparison of errors for three different incident angles.

く、打ち切り波数を大きくしても必ずしも精度が上がるとは限らないことを示している。しかし、2.0 Hz 程度までは安定した解が得られている。

以上より、DW-FE ハイブリッド法によっても、解析条件を適切に選べば安定した解が得られることがわかった。

4.3 他手法との比較

Fig. 17(a), (b) は、SH 波入射に関して FEM-BEM, DWM-FEM, DWM のそれぞれの手法による解析結果の比較を示したものである。比較対象としては FE-BE ハイブリッド法の 10 m メッシュによる解析結果を用いる。これは FE-BE ハイブリッド法では、あらゆるケースについて解析条件によらず安定した解を得ており、厳密解に最も近いと考えられるからである。図の縦軸は、次式で示されるような FE-BE ハイブリッド法の 10 m メッシュの解に対する誤差を表す。

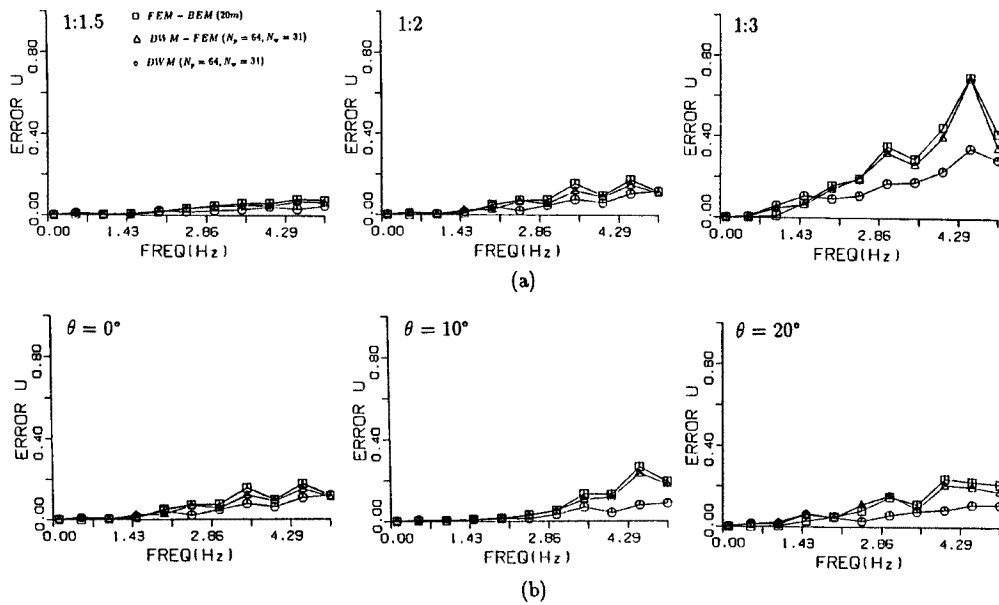


Fig. 17. Calculation errors of FEM-BEM, DWM-FEM and DWM.

(a) comparison of errors for three different impedance ratios,

(b) comparison of errors for three different incident angles.

$$eru = \frac{\max |u_{20}| - |u_{10}|}{\max |u_{10}|} \dots\dots\dots (71)$$

図中 3 本の線が描かれているが□は FEM-BEM の 20 m メッシュの解であり、△は DWM-FEM、○は DWM によるものである。なお、DW-FE, DW 各手法については、 $N_p = 64$, $N_w = 31$ の解析条件を用いた。(a) より、インピーダンス比によらず DWM が最も精度がよい。また、DWM-FEM は FEM-BEM と DWM の中間の値をとっている。グラフの形から考えると、DWM-FEM の誤差は FEM-BEM の誤差と同じ形をしており、FE 領域の精度に及ばず影響が大きいことがわかる。(b) は入射角による比較であるが、この図からは入射角の違いが解析の精度に殆ど影響を与えないことがわかる。

SV 波入射時について、同様の解析結果を示したものが Fig. 18, 19 である。両図とも (a) が水平、(b) が鉛直変位である。DWM と DWM-FEM に関しては、 $N_p = 64$, $N_w = 15$ の解析条件を用いた。これはこの

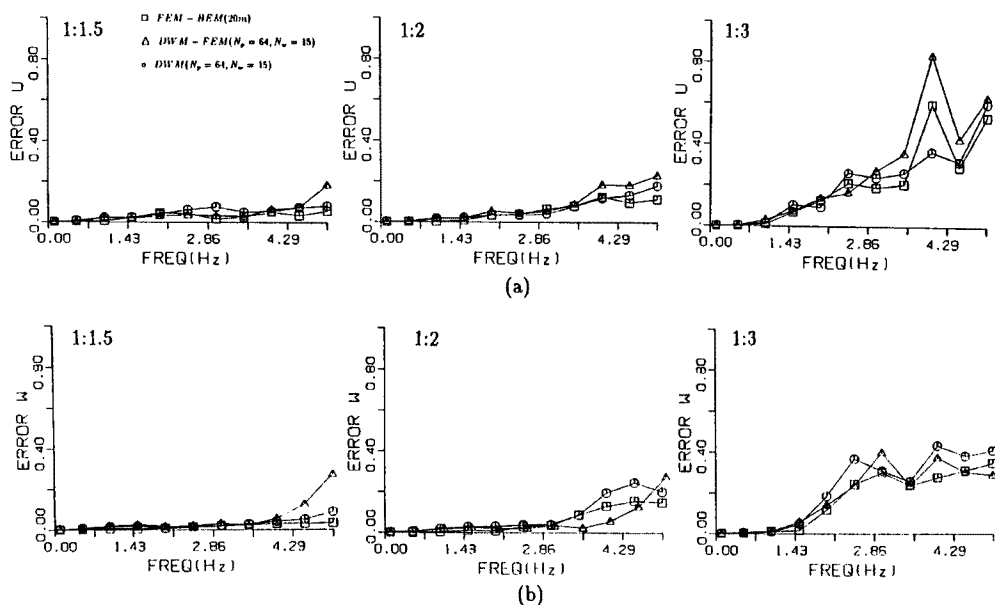


Fig. 18. Calculation errors of FEM-BEM, DWM-FEM and DWM for three different impedance ratios (SV-wave input).

(a) horizontal displacement

(b) vertical displacement

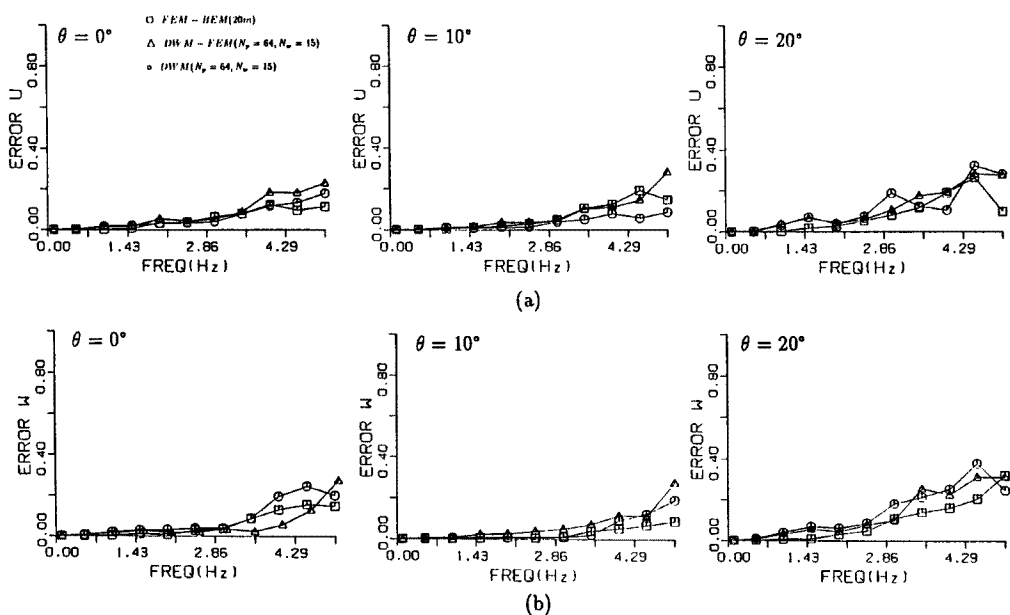


Fig. 19. Calculation errors of FEM-BEM, DWM-FEM and DWM for three different incident angles (SV-wave input).

(a) horizontal displacement

(b) vertical displacement

条件が最も安定性が良かったためである。インピーダンス比が大きいほど精度が悪くなり、また、SH 波と同様、入射角の違いが誤差に与える影響は小さい。SH 波と異なり、FE-BE ハイブリッド法が最も精度がよいが、DW-FE ハイブリッド法に関しても十分な精度が得られていることがわかる。

計算時間の比較を Table. 1, 2 に示す。Table. 1 は SH 波動場についてのものであり、Table. 2 は P-SV 波動場についてのものである。この表からどちらの波動場においても、DW-FE ハイブリッド法では計算時間が FE-BE ハイブリッド法に比べて飛躍的に短くなることがわかる。特に P-SV 波動場については顕著である。これは P-SV 波動場においては、変位、応力成分が 2 方向あり、FE-BE ハイブリッド法ではマトリクスが非常に大きくなるためである。

Table 1. Comparison of calculation time
(SH-wave input)

<i>FEM-BEM</i>	10 m mesh	192.5
	20 m mesh	32.8
<i>DWM</i>	$N_p=64$ $N=15$	4.4
	$N_p=64$ $N=31$	6.4
	$N_p=128$ $N=15$	67.8
	$N_p=128$ $N=31$	71.6
	$N_p=128$ $N=45$	76.0
<i>DWM-FEM</i>	$N_p=64$ $N=15$	5.6
	$N_p=64$ $N=31$	18.5
	$N_p=128$ $N=15$	9.0
	$N_p=128$ $N=31$	34.0
	$N_p=128$ $N=45$	85.4

Table 2. Comparison of calculation time
(SV-wave input)

<i>FEM-BEM</i>	10 m mesh	1152.4
	20 m mesh	177.7
<i>DWM</i>	$N_p=64$ $N=15$	38.7
	$N_p=64$ $N=31$	175.3
	$N_p=128$ $N=15$	63.1
	$N_p=128$ $N=31$	229.0
	$N_p=128$ $N=45$	539.7
<i>DWM-FEM</i>	$N_p=64$ $N=15$	26.5
	$N_p=64$ $N=31$	40.3
	$N_p=128$ $N=15$	437.6
	$N_p=128$ $N=31$	462.5
	$N_p=128$ $N=45$	492.2

5. 結 論

以下に、本研究で行ったことおよび得られた成果を示す。

- 1) 離散化波数法 (DWM) による地盤震動解析手法を、SH 波動場、P-SV 波動場における各種の地盤モデルに適用し、離散地点数、打ち切り波数の解析条件に関してパラメトリックな解析を行った。そして、それら解析条件の変化に対する解の安定性について検討した。その結果、SH 波動場に関してはあらゆるパラメータで安定した解を得た。P-SV 波動場に対しては、モデルパラメータのとりかたによって、安定した解が得られる場合と、解が発散傾向を示す場合があり、解の安定性が打ち切り波数に大きく影響される結果を得た。したがって、解析を行う際には x 軸方向の離散点数と打ち切り波数の関係に十分に注意を払う必要があろう。
- 2) 不整形地盤を有限要素法 (FEM) を用いてモデルし、DWM および DW-FE ハイブリッド法との比較のために、境界要素法 (BEM) と結合させた。FE-BE ハイブリッド法においては、非適合要素を用

いる角点の処理法を用いることにより、5 Hz までの周波数領域帯で安定した解を得た。また、メッシュサイズの違いによる検討を行い、メッシュサイズが小さくなるにつれ解が収束していく傾向を確かめた。

- 3) SH 波動場、P-SV 波動場での DWM および FEM の定式化を基に、これらの波動場で両手法を結合させ、他手法との比較から本手法の妥当性を比較した。まず、DWM と FEM の結合手法に関して SH 波動場と P-SV 波動場のいずれに対しても定式化を行い、各種地盤モデルに適用した。3 Hz 程度以上の高周波数側では発散傾向が見られるものの、これ以下の周波数帯域においては安定した解を得た。次に、DWM による解析と同様、解析パラメータの変化に伴う解の安定性の変化について検討を行った。ここでも SH 波動場に関しては、安定した解が得られたが、P-SV 波動場に関しては解析パラメータの変化、特に打ち切り波数が解の安定性に大きく影響することがわかった。最後に各種法の計算時間の比較を行い、DW-FE ハイブリッド法のほうが計算時間の面で FE-BE ハイブリッド法より有利であるという結論を得た。

以上の結果より、計算時間、精度の面からも DW-FE ハイブリッド法が十分実用可能な手法であることがわかった。実用に際しては、発散傾向を示す条件を的確に判断しさえすれば、計算時間が短いことにより簡易解析手法として用いることができる。また、FE 領域の存在により、局所的な非均質性を考慮した解析が行えるので、DWM のみの場合より応用範囲が広い。さらに FE 領域に等価線形化手法を適用することにより、非線形問題にも適用可能である。

参 考 文 献

- 1) 土岐憲三：構造物の耐震解析，新体系土木工学11，技法堂出版，pp. 82-90, 1985.
- 2) 座間信作：不規則構造に対する地震波の挙動 その4，地震研究所彙報，Vol. 57, pp. 379-399, 1982.
- 3) Kawase, H.: Time-domain response of a semi-circular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wave number boundary element method, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 78, pp. 1415-1437, 1988.
- 4) Bouchon, M.: Discrete wave number representation of elastic wave fields in three-space dimensions, J. Geophys. Res., Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.
- 5) Lysmer, J. and K. L. Kuhlemeyer: Finite dynamic model for infinite media, Jour. ASCE, Vol. 95, No. EM4, pp. 859-877, 1969.
- 6) Aki, K. and Lamer, K. L.: Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, J Geophys. Res., Vol. 75, pp. 933-954, 1970.
- 7) 堀家正則：不規則境界面を有する三次元堆積盆地の地震動応答，地震学会，春期大会講演予稿集，21, 1988.
- 8) Kunar, R. R. and L. Rodriguez-Ovejero: A model with non-reflecting boundaries for use in explicit soil-structure interaction analyses, Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 8, pp. 361-374, 1980.
- 9) Lysmer, J. and L. A. Drake: A Finite element method for seismology, Methods in Computational Physics, Vol. 11, Seismology, Surface Waves and Earth Oscillations, Academic Press, New York and London, 1972.
- 10) 福和・佐藤・川瀬・中井：不整形性を有する沖積地盤の地震観測シミュレーション，構造工学論文集，Vol. 31B, pp. 1-10, 1985.
- 11) 土木学会：動的解析の方法，技法堂出版，pp. 9-12, 1989.
- 12) 源栄正人・浦尾謙二：波数離散型解法を用いた不規則不整形地盤の波動伝播解析——波数離散型解法と FEM の結合解法——，日本建築学会学術講演梗概集，1989.