

Configuration について

東大 敬養 中村 得之

0. F を体とし, $M = \{M_i \mid i \in I\}$ を F^n の超平面の集まりとする. $M = \bigcup \{M_i \mid i \in I\}$ とかくとき, $K^n \setminus M$ の位相は色々な問題に関連して知られているが, 特に $K = \mathbb{C}$ の場合は重要であり Serre, Brieskorn, Saito, Deligne, Hattori 等により多くの結果が得られている. ここではそれらのうちのいくつかを一般化することを試みる.

1. F を実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$, 四元数体 $\mathbb{H}$ のいずれかとする. I を有限集合とし, $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ を F^n における原点を通る affine 部分空間の集まりとする. いま I の部分集合を単体として定義される単体的複体を $\Delta(I)$ で表わそう. このとき, 任意の単体 $p \in \Delta(I)$ に対して, その幾何学的実現を $|p|$ で, 部分複体 $K \subset \Delta(I)$ の幾何学的実現を $|K|$ で表わすことにする. 単体 $p \in \Delta(I)$ が与えられたとき, $V_p \subset F^n$ を $V_p = \bigcap \{V_i \mid i \in p\}$ で定義し, $K(p) = \dim_F V_p$ とおくことにする.

さて V_i^*, SV_i, PV_i をそれぞれ $V_i^* = V_i \setminus \{0\}$, $SV_i = \{x \in V_i^* \mid |x|=1\}$, $PV_i = V_i^*/F^*$ で定義し, V^*, SV, PV をそれぞれ自然な合併 $V^* = \bigcup \{V_i^* \mid i \in I\}$, $SV = \bigcup \{SV_i \mid i \in I\}$, $PV = \bigcup \{PV_i \mid i \in I\}$ を表わすことにする. 次に空間 $E(V^*), E(SV), E(PV)$ をそれぞれ

$$E(V^*) = \bigcup \{|P| \times (F^{K(P)})^* \mid P \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times (F^n)^*$$

$$E(SV) = \bigcup \{|P| \times SF^{K(P)} \mid P \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times SF^n$$

$$E(PV) = \bigcup \{|P| \times PF^{K(P)} \mid P \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times PF^n$$

(定義しよう. このとき次のことがいえる

定理 1 $V^* \simeq E(V^*), SV \simeq E(SV), PV \simeq E(PV)$.

証明 $P' \subset P$ をみたす $\Delta(I)$ の任意の単体に対して, $K(P') - K(P) \geq \dim P - \dim P'$ が成り立つとき V は退化しないといふことにする. 簡単のため V が退化しない場合の証明のあたりをしることにする. $\pi: E(V^*) \rightarrow |\Delta(I)|$ を自然な射影とする. $P \in \Delta(I)$ に対し, $\hat{P}$ で $|P|$ の重心を表わす. いま各 P に対し, F 上の線型な写像 $f_P: \hat{P} \times F^{K(P)} \rightarrow V_P$ を任意に一つ定める. 次に $\Delta(I)$ の重心細分 $\Delta(I)$ の一つの単体 $\sigma = \{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_p\}$ ($P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_p$) をとるとき F 上の線型な写像 $f_\sigma: |\sigma| \times F^{K(P_p)} \rightarrow V_{P_0}$ を次のように定義する. $\dim \sigma = 0$ のときには, $\sigma = \hat{P}$ とかけるから $f_\sigma = f_P$ で定義する. $\dim \sigma = p > 0$ とし p より小さい

次の単体に対しては写像が定義されているものとする。このとき $f_{\partial\sigma}: \partial|\sigma| \times F^{K(p_p)} \rightarrow V_{K(p_p)}$ が自然に定まる。

一方 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に応じて, $U_K = O(K), U(K), Sp(K)$ とするとき, $\pi_{p-1}(V_{K(p_p), K(p_p)}) = \pi_{p-1}(U_{K(p_p)} / U_{K(p_p) - K(p_p)})$ は $K(p_p) - K(p_p) \geq \dim p_p - \dim p_0 \geq p$ となることから常に 0 となる。したがって $f_{\partial\sigma}$ は $f_\sigma: |\sigma| \times F^{K(p_p)} \rightarrow V_{K(p_p)}$ に拡張される。これから求める写像 $f: E(U^*) \rightarrow V^*$ の存在がいえることは容易にわかる。 f が U_i の作用と可換であることも明らかである。

次に f がホモトピー同値を与えることを示すために、いくつかの準備をしよう。

まず, $p \in \Delta(I)$ に対して, $\lambda(p) \in \Delta(I)$ を $\lambda(p) = I \setminus p$ で定め, $U \circ p, U * p$ をそれぞれ $U \circ p = \{V_i \mid i \in p\}$, $U * p = \{V_i \cap V_p \mid i \in \lambda(p)\}$ で定義する。ここで, $p \in \Delta(I)$ に対して $\Delta(p)$ を p の単体的閉包, $\iota_p: \Delta(p) \rightarrow \Delta(I)$ を $\iota_p(\hat{p}') = \hat{p}'$ ($p' \subset p$) でひきおこされる自然な移入とし, $\hat{*}_p: \Delta(\lambda(p)) \rightarrow \Delta(I)$ を $\hat{*}_p(\hat{p}') = p' \hat{*} p$ ($p' \subset \lambda(p)$) で定義される写像とする。このとき $\iota_p, \hat{*}_p$ はそれぞれ同型 $E(U \circ p) \cong E(U) \mid |\iota_p \Delta(p)|$, $E(U * p) \cong E(U) \mid |\hat{*}_p \Delta(\lambda(p))|$ をひきおこすことは容易にたしかめられる。ここで $K \subset \Delta(I)$ に対し, $\pi: E(U) \rightarrow |\Delta(I)|$ による $|K|$ の逆像を $E(U) \mid |K|$

で表わすものとする

ところで, $\Delta(I)$ における $\Delta(p)$, $\Delta(\lambda(p))$ の正則近傍をそれぞれ N_0, N_1 で表わすとき; $N_0 \cup N_1 = \Delta(I)$,

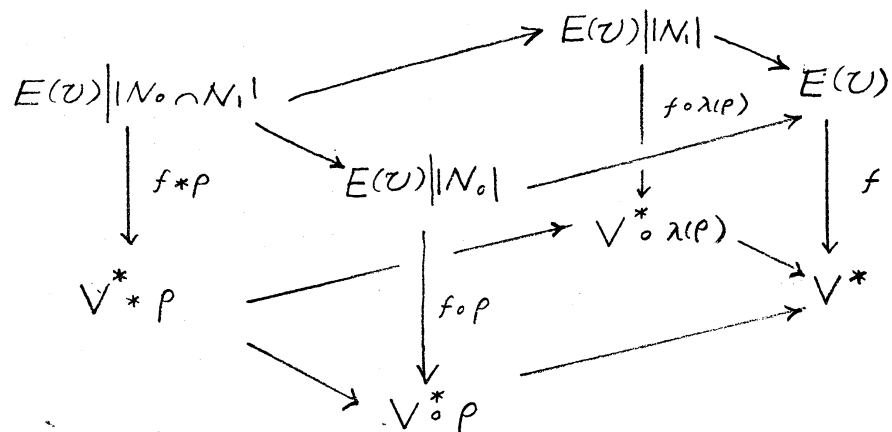
$$N_0 \cap N_1 = \hat{*}_p \Delta(\lambda(p)), \quad N_0 \searrow \subset_p \Delta(p), \quad N_1 \searrow \subset_{\lambda(p)} \Delta(\lambda(p))$$

となることはよく知られている. これから $E(U)|N_0| \cup E(U)|N_1|$

$$= E(U), \quad E(U)|N_0| \cap E(U)|N_1| = E(U)|\hat{*}_p \Delta(\lambda(p))|, \quad E(U)|N_0| \searrow$$

$$E(U)|\subset_p \Delta(p)|, \quad E(U)|N_1| \searrow E(U)|\subset_{\lambda(p)} \Delta(\lambda(p))| \text{ が得られる.}$$

一方, $V^*_p \cup V^*_{\lambda(p)} = V^*$, $V^*_p \cap V^*_{\lambda(p)} = V^*_{\hat{*}_p}$ は明らかであるから, 次のホモトピー可換な図式が得られる



この図式を用いて, $f: E(U) \rightarrow V^*$ がホモトピー同値であることを示そう. $\dim \Delta(I) = 0$ のときには $f_0 = f_{\hat{p}}$ の定義から自明である. $\dim \Delta(I) > 0$ とし, これ以下の次元で写像はホモトピー同値を与えているものとする. このとき $p = \{i\}$ ($i \in I$), $\lambda(p) = I \setminus \{i\}$ とすれば, $f \circ p$, $f \circ \lambda(p)$, $f * p$ は帰納法の假定からホモトピー同値がいえ, したがって van Kampen の定理, Mayer-Vietoris の定理により

f がホモトピー同値であることを示される. 証明終

この定理により $PF^n \setminus PV$ のホモロジーが多くの場合容易に計算される. それを用いて例としては次のことが示される.

系 任意の $p \in \Delta(I)$ に対して $\dim_F V_p = n - \dim p - 1$ となるとき, $\mathcal{U}$ は一般的である. $\mathcal{U}$ が一般的であり, かつ $F = \mathbb{C}$ ならば $n \geq 3$ の条件下に次のことが成り立つ.

$$PF^n \setminus PV \simeq (\prod_{i=1}^m S^{d-1})^{(d-1)n}$$

ただし $m = \#I - 1$, $d = \dim_{\mathbb{R}} F$ とし, $(\prod_{i=1}^m S^{d-1})^p$ は

$\prod_{i=1}^m S^{d-1}$ の最も経済的な胞体分割の p 骨格を表わす

$F = \mathbb{R}$ の場合は上の事実を示すことは容易である. $F = \mathbb{C}$ の場合はこの結果は服部品夫氏によって得られたものである.

2. $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$ を $\mathbb{R}^n$ の超平面の集まりで次の条件 (C_0) , (C_1) のいずれかを満たすものとする.

(C_0) I は有限集合で, M_i はすべて原点を通る.

(C_1) $\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな凸多面体による $\mathbb{R}^n$ の胞体分割を与える.

いま, 各 $i \in I$ に対し $\mathbb{R}^n$ 上の一次式 l_i で $l_i^{-1}(0) = M_i$ となるものを定めておく. $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$ と考え, $e \in \mathbb{Z}_3$ に対し $M_i^e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{sgn} l_i(x) = e\}$ と定める. このとき, $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し, $C_0(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{sgn} l_i(x) = \varepsilon(i), i \in I\}$

とおく. $C_0(\varepsilon) = \bigcap \{M_i^{\varepsilon(i)} \mid i \in I\}$ とする. ここで, (C_0) の場合には, $C(\varepsilon) = C_0(\varepsilon) \cap D^n$ ($D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$), (C_1) の場合には $C(\varepsilon) = C_0(\varepsilon)$ とおき, 凸胞複体 $P(M)$ を $P(M) = \{C(\varepsilon) \mid \varepsilon: I \rightarrow \mathbb{Z}_3\}$ で定義する. 明らかに $P(M)$ は PL 多様体の凸胞体分割を与えるから, $C(\varepsilon)$ の双対胞体 $D(\varepsilon)$ を $D(\varepsilon) = \bigcup \{\hat{C}_0, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_p \mid C(\varepsilon) = C_0 < C_1 < \dots < C_p\}$ で定義し (差支えない. ここで $\hat{C}_i$ は C_i の重心を表わすものとする. これを用いて, CW 複体 $R(M)$ を次のように定義しよう.

$$R(M) = \bigcup \{D(\varepsilon) \times D(\theta) \mid \varepsilon, \theta: I \rightarrow \mathbb{Z}_3, D(\theta) < D(\varepsilon), \dim D(\theta) = 0\} / \sim$$

ここで $\bigcup$ は互に素な和集合を表わし, $\sim$ は次の関係で生成される同値関係を表わすものとする. $(x, y) \in D(\varepsilon) \times D(\theta)$, $(x', y') \in D(\varepsilon') \times D(\theta')$ は $D(\varepsilon') < D(\varepsilon)$ かつ $\theta'(i) = \theta(i)$ ($i \in \varepsilon'(\theta)$) が成り立つとき $(l_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x'), y) \sim (x', y')$ とする. ここで $l_{\varepsilon'}^{\varepsilon}: D(\varepsilon') \subset D(\varepsilon)$ は自然な移入, かつ $y \in D(\theta)$, $y' \in D(\theta')$ とする. 以下 $D(\varepsilon) \times D(\theta)$ の $R(M)$ への像を $\chi(D(\varepsilon) \times D(\theta))$ とかく.

いま $\mathbb{R}^n$ の超平面 M の複素化を $M^{\mathbb{C}}$ と表わし, 上記の M に対して $M^{\mathbb{C}}$ を $M^{\mathbb{C}} = \{M_i^{\mathbb{C}} \mid i \in I\}$ で定義する. また $M^{\mathbb{C}} = \bigcup \{M_i^{\mathbb{C}} \mid i \in I\}$ と表わすとき, 次のことが成り立つ.

定理2 $\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}} \cong R(M)$

証明 $\mathbb{C}^n$ の実部全体を $R\mathbb{C}^n$, 虚部全体を $g\mathbb{C}^n$ と書き, それぞれを R^n と同一視する. このとき, Deligne の手法を拡張して, 一般の M に対して $\mathbb{C}^n \setminus M^c$ の次のような開被覆を考えることにする. $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し $O(\varepsilon) \subset R\mathbb{C}^n$ を $\hat{C}(\varepsilon)$ の $P(M)$ における開星状体 $\text{St}(\hat{C}(\varepsilon), P(M))$ とする. ただし, $P(M)$ は $P(M)$ の重心細分とする. また $\delta: I \rightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し $Y(\delta) \subset g\mathbb{C}^n$ を $Y(\delta) = \bigcap \{M_i^{\delta(i)} \mid \delta(i) \neq 0\}$ とする. ここで $\mathbb{C}^n \setminus M^c \cong R\mathbb{C}^n \times g\mathbb{C}^n$ の開被覆 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(M)$ を次のようにして定義する.

$$\mathcal{U} = \{O(\varepsilon) \times Y(\delta) \mid \varepsilon, \delta: I \rightarrow \mathbb{Z}_3, \varepsilon(i_0) \cup \delta(i_0) = I, \varepsilon(i_0) \cap \delta(i_0) = \emptyset\}$$

$U(\varepsilon, \delta) = O(\varepsilon) \times Y(\delta)$ とおく. $U(\varepsilon_0, \delta_0) \cap U(\varepsilon_1, \delta_1) \cap \cdots \cap U(\varepsilon_p, \delta_p) \neq \emptyset$ となるための必要十分条件は, 適当な置換 ω と

$$C(\varepsilon_{\omega(i_0)}) \supset C(\varepsilon_{\omega(i_1)}) \supset \cdots \supset C(\varepsilon_{\omega(i_p)}) \quad \text{および}$$

$$Y(\delta_{\omega(i_0)}) \supset Y(\delta_{\omega(i_1)}) \supset \cdots \supset Y(\delta_{\omega(i_p)}) \quad \text{が同時に成り立}$$

つことである. これは $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ を $\theta = \varepsilon + \delta$ で定義す

$$\text{るとき, } \chi(D(\varepsilon_{\omega(i_0)}) \times D(\theta_{\omega(i_0)})) \subset \chi(D(\varepsilon_{\omega(i_1)}) \times D(\theta_{\omega(i_1)})) \subset \cdots$$

$$\subset \chi(D(\varepsilon_{\omega(i_p)}) \times D(\theta_{\omega(i_p)})) \quad \text{が成り立つことと同値である.}$$

したがって, $\mathcal{U}$ の nerve 体 $K(\mathcal{U})$ を $K(M)$ とかくことにすれば $K(M) \cong R(M)$ となる. ここで $R(M)$ は $R(M)$ の重心細分である.

一方 $\mathcal{U}$ は可縮な開集合による $\mathbb{C}^n \setminus M^c$ の被覆

であることから, $K(\mathcal{U})$ は $\mathbb{C}^n \setminus M^c$ とホモトピー同型である 証明終

この応用として, 例えは次のことが証明される 各 $i \in I$ に対し M_i に関する $\mathbb{R}^n$ の反転を σ_i で表わし, $S = \{\sigma_i | i \in I\}$ とする. S で生成される $\mathbb{R}^n$ の運動群の部分群を W で表わそう. W が $P(M)$ の n 次元胞体の集合の上に忠実かつ推移的に作用するとき, M を Weyl 群 W の Weyl 壁の集まりとよぶ.

定理 3 M が Weyl 壁の集まり, W をその Weyl 群とする. このとき

$$(\mathbb{C}^n \setminus M^c)/W \simeq R(M)/W$$

証明 定理 2 のホモトピー同値が W の作用と可換であることを用いればよい

さく M が Weyl 壁の集まりであるとしよう. $P(M)$ の胞体 $C(\theta)$ と $\dim C(\theta) = n$ となるものを任意に一つ定める. $C(E_i)$ を $C(E_i) \subset C(\theta)$ かつ $\dim C(E_i) = n-1$ となる胞体とし, これに $C(\theta)$ からひきおこされた向きをつける. また $C(\delta_{ij}) = C(E_i) \cap C(E_j)$ とし $m_{ij} = \# \delta_{ij}^{-1}(0)$, するわけ. $C(\delta_{ij})$ を通る M に属する超平面の数を m_{ij} とする. いま $D(E_i)$ に $C(E_i)$ に双対的な向きをつけ, $\alpha_i = \chi(D(E_i) \times D(\theta))$ とする. これは $R(M)/W$ の閉曲線を与

えることは明らかであろう。さらに x_i, x_j に関する ~~群~~ 要素 r_{ij} を

$$r_{ij} = (x_i, x_j; m_{ij}) \cdot (x_j, x_i; m_{ij})^{-1}$$

で定義する.

$$(x, x'; m) = \begin{cases} \overbrace{xx' \cdots xx'}^{2m \text{ 個}} & m \equiv 0 \pmod{2} \\ \overbrace{xx' \cdots xx'x}^{2m \text{ 個}} & m \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

とする.

定理 4

$$\pi_1((\mathbb{C}^n \setminus M^0)/W) \cong F(x_i)/N(r_{ij})$$

ここで $F(x_i)$ は x_i で生成される自由群, $N(r_{ij})$ はその中で r_{ij} によつて生成される最小の正規部分群とする

これは $\pi_1((\mathbb{C}^n \setminus M^0)/W)$ が W に対応する一般組み紐群となることを示している. このことは M が (C_0) をみたすとき, すなわち W が普通の Weyl 群のときには Brieskorn によつて知られている.

この外, (C_0) の場合における Deligne の条件の (C_1) の場合への類似の下に $\mathbb{C}^n \setminus M^0$ が $K(\pi, 1)$ になることが示されるが, こゝでは省略する.