

p -absolutely summing operator の

補間法による一般化

九州工大 宮崎虔一

§ 1. 序

近年、東欧を中心とした多くの人々によって Hilbert-Schmidt 作用素を一般化した Banach 空間の間作用素の議論がなされている ([2], [6], [8], [13], [14], [15], [16], [18], [19], [21], [22])。

就中、Mitjagin と Petczyński [9] により定義された (p, q) -absolutely summing operator の議論は、

Grothendieck の left semi-integral operator [3] は、 $(1, 1)$ -absolutely summing operator であり、

Saphar の left Hilbert-Schmidt operator [22] は、 $(2, 2)$ -absolutely summing operator であり、

Pietsch の p -absolutely summing operator [18] は、 (p, p) -absolutely summing operator である、

という意味で興味深い。

我々は、この作用素を一般化して $(p, q; r)$ -absolutely summing operator を定義し、その固定の作用素の性質、その作用素全体の作る normed ideal の性質、互にはそれら normed ideals の相間等について論ずる。

§2. $(p, q; r)$ -absolutely summing operator

X, Y を Banach 空間とし、 $B(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素の全体とする。

定義 1. $1 \leq p, q, r \leq \infty$ とする。 $T \in B(X, Y)$ かつ、 X の任意の有限点列 $\{x_i\}$ に対し数列 $\{\|Tx_i\|\}$ の非減少列への無限積を $\{\|Tx_i\|_*\}$ と表わすとき

$$(1) \left\{ \sum_i \left(i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|Tx_i\|_* \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq p \sup_{\|a\| \leq 1} \left(\sum_i |\langle x_i, a \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

を満たすなら、 $(p, q; r)$ -absolutely summing operator であるという。ここで a は X の dual space X^* の弱 compact 単位球の要素、 p は定数。また (1) の左、右辺でそれぞれ $q = \infty, r = \infty$ のときは、普通のように $\sup_i$ を表わすものとする。

(1) をみたす定数 ρ の下限を $\pi_{p,q;r}(T)$ で表わし、これをノルムとする $(p, q; r)$ -absolutely summing operators の全体を $\Pi_{p,q;r}(X, Y)$ と表わす。

注意、上の定義で、特に $p = q$ のときは、

Mityagin and Petczyński [9], [6] の (p, r) -absolutely summing operator (以後、このとき (p, r) の代りに $(p; r)$ とかく)。 $\Pi_{p,p;r}(X, Y)$ を $\Pi_{p;r}(X, Y)$, $\pi_{p,p;r}(T)$ を $\pi_{p;r}(T)$ とかく。また、 $p = q = r$ のときは、Pietsch の p -absolutely summing operator [18] で、 $\Pi_{p,p;p}(X, Y)$ を $\Pi_p(X, Y)$, $\pi_{p,p;p}(T)$ を $\pi_p(T)$ とかく。

定義からただちに次のことが成立する。

命題 1. $B(X, Y)$ の要素 T の作用量ノルムを $\|T\|$ とかくとき、(任意の $T \in \Pi_{p,q;r}(X, Y)$ に対して

$$\|T\| \leq \pi_{p,q;r}(T)$$

が成立する。

これを用いて

命題 2. $\Pi_{p,q;r}(X, Y)$ はノルム $\pi_{p,q;r}(T)$ に関して Banach 空間になる。

また、定義から次のことが容易に云える。

命題 3. 1) $1 \leq r \leq \infty$ のとき

$$\Pi_{\infty, \infty; r}(X, Y) = B(X, Y) \quad \text{となり,}$$

各 $T \in \Pi_{\infty, \infty; r}(X, Y)$ に対し

$$\pi_{\infty; r}(T) = \|T\| \quad \text{が成立する。}$$

2) $1 \leq p \leq q < r \leq \infty$ のとき,

$$\Pi_{p, q; r}(X, Y) = \{0\} \quad \text{となる。}$$

各 Banach 空間の組 X, Y に対して $\Pi_{p, q; r}(X, Y)$ に属する作用素の全体を $\Pi_{p, q; r}$ と表わすと, これは次の意味で B の両側イデアルになる。

命題 4. X, Y, Z を Banach 空間とする。

1) $S \in B(X, Y), T \in \Pi_{p, q; r}(Y, Z)$ なるとき,

$$T \circ S \in \Pi_{p, q; r}(X, Z) \quad \text{となり,}$$

$$\pi_{p, q; r}(T \circ S) \leq \pi_{p, q; r}(T) \|S\|$$

が成立する。

2) $S \in \Pi_{p, q; r}(X, Y), T \in B(Y, Z)$ なるとき

$$T \circ S \in \Pi_{p, q; r}(X, Z) \quad \text{となり,}$$

$$\pi_{p, q; r}(T \circ S) \leq \|T\| \cdot \pi_{p, q; r}(S)$$

が成立する。

normed ideal $\Pi_{p, q; r}$ の parameter p, q, r に関する包含関係については、定義と、数列-Lorentz 空間 $\ell_{p, q}$ のノルム関係から、次のことが得られる。

命題 5. 1) $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1, q_2, r \leq \infty$

なるとき, $\Pi_{p_1, q_1; r}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r}(X, Y)$

となり, 各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p_2, q_2; r}(T) \leq c \pi_{p_1, q_1; r}(T)$$

が成り立つ。

2) $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, $1 \leq p, r \leq \infty$ なるとき,

$\Pi_{p, q_1; r}(X, Y) \subset \Pi_{p, q_2; r}(X, Y)$ となり,

各 $T \in \Pi_{p, q_1; r}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p, q_2; r}(T) \leq c \pi_{p, q_1; r}(T)$$

が成り立つ。

3) $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ なるとき

$\Pi_{p, q; r_2}(X, Y) \subset \Pi_{p, q; r_1}(X, Y)$ となり

、各 $T \in \Pi_{p, q; r_2}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p, q; r_1}(T) \leq c \pi_{p, q; r_2}(T)$$

が成り立つ。ここで、 c は全部ある定数を表わす。

更に、Kwapień の結果 [5] と $\Pi_{p, q; r}$ の場合
に一般化して、次の命題が成立する。

命題 6. $p_1 \geq q_1$ または $p_1 < q_1 < r_1$ をみたす実

数 p_i, q_i, r_i , $i=1, 2$, $1 \leq p_i, q_i, r_i \leq \infty$,

が $1/p_1 - 1/p_2 = 1/q_1 - 1/q_2 = 1/r_1 - 1/r_2 \geq 0$ なる

とき $\Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r_2}(X, Y)$ 。

また、各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p_2, q_2; r_2}(T) \leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(T)$$

が成立する。

この命題 5, 6 を用いて

系 $p_2 \geq q_2$ または $p_2 < q_2 < r_2$ をみたす実数

$1 \leq p_i, q_i, r_i \leq \infty$, $i=1, 2$, に対して,

$$1/p_1 - 1/p_2 \geq 1/r_1 - 1/r_2 \geq 0, \quad 1/q_1 - 1/q_2 \geq 1/r_1 - 1/r_2$$

が成り立つとき、 $\Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r_2}(X, Y)$

が成立し、各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y)$ は

$$\pi_{p_2, q_2; r_2}(T) \leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(T)$$

を満足する。

§ 3. $(p, q; r)$ -absolutely summing operators の積.

Hilbert 空間の上の Hilbert-Schmidt 作用素 S, T の積 $T \circ S$ は nuclear 作用素になる、という古典的定理は、Pietsch [18] により、次のように拡張された:

X, Y, Z を Banach 空間とするとき,

$$1) \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty \quad \text{が} \quad 1/r = 1/p + 1/q \leq 1$$

をみたすなら、任意の $S \in \Pi_p(X, Y)$, $T \in \Pi_q(Y, Z)$

に対して $T \circ S \in \Pi_r(X, Z)$ となり,

$$\pi_r(T \circ S) \leq \pi_q(T) \cdot \pi_p(S)$$

が成り立つ。

2) $1/p + 1/q \geq 1$ のときは、任意の $S \in \Pi_p(X, Y)$
 $T \in \Pi_q(Y, Z)$ に対して, $T \circ S \in \Pi_1(X, Z)$ となり

$$\pi_1(T \circ S) \leq \pi_q(T) \cdot \pi_p(S)$$

が成り立つ。

この結果と、数値の Tomczak の結果 [26] を $\Pi_{p,q;r}$ に拡張して、次の定理 1, 2 を得る。

定理 1. X, Y, Z を Banach 空間とする。

$1 \leq p, p_i, q_i, r_i \leq \infty, i = 1, 2$, かつ

$$1/p_2 \leq 1/p + 1/p_1 \leq 1, \quad 1/q_2 \leq 1/p + 1/q_1 \leq 1,$$

$1/p + 1/r_2 \leq 1/r_2$ をみたすとき、任意の $T \in \Pi_p(X, Y)$, $S \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(Y, Z)$ に対して, $S \circ T \in \Pi_{p_2, q_2; r_2}(X, Z)$ となり

$$\pi_{p_2, q_2; r_2}(S \circ T) \leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(S) \pi_p(T)$$

が成り立つ。

証明. 命題 5 から, $1/p_2 = 1/p + 1/p_1 \leq 1$,

$$1/q_2 = 1/p + 1/q_1 \leq 1, \quad 1/r_2 = 1/p + 1/r_1 \quad \text{のとき}$$

きまえば十分。

先づ, Pietsch [18] にある p -absolutely summing operator の特徴付け:

$T \in B(X, Y)$ が p -absolutely summing なるための必要十分条件は, X の dual space X^* の弱単位環 K^* 上の regular positive Radon measure μ が存在して, $\forall x \in X$ に対して

$$\|Tx\| \leq \pi_p(T) \left\{ \int_{K^*} |\langle x, a \rangle|^p d\mu(a) \right\}^{1/p}$$

が成立する. ことである。

が仮定の T に対して成立 (このことには注意する)。

今, X の任意の有限点列 $\{x_i\}$ に対し,

$$x_i = x_i^0 \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \left(\int_{K^*} |\langle x_i, a \rangle|^2 d\mu(a) \right)^{1/2}$$

と置く。このとき, Hölder の不等式と定義とから

$$\begin{aligned} & \left(\sum_i i^{\frac{q_2}{p_2}-1} \|STx_i\|_*^{q_2} \right)^{1/q_2} \\ (2) \quad & \leq \left(\sum_i i^{\frac{q_1}{p_1}-1} \|STx_i^0\|_*^{q_1} \right)^{1/q_1} \left(\sum_i |\varepsilon_i|^p \right)^{1/p} \\ & \leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(S) \sup_{\|u\| \leq 1} \left(\sum_i |\langle Tx_i^0, u \rangle|^{r_1} \right)^{1/r_1} \left(\sum_i \int_{K^*} |\langle x_i, a \rangle|^2 d\mu \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

ここで, p -absolutely summing operator T の factorization theorem [18] を用い, 更に Hahn-Banach の定理を用いて, 次のことが言える:

(2) の $\langle Tx_i^0, u \rangle$ に対して, $f(a) \in L_{p'}(K^*, \mu)$ に存在して $(1/p + 1/p' = 1)$,

$$\langle Tx_i^0, u \rangle = \int_{K^*} \langle x_i^0, a \rangle f(a) d\mu(a), \quad x_i^0 \in X$$

と,

$$(3) \quad \left(\int_{K^*} |f(a)|^{p'} d\mu(a) \right)^{1/p'} \leq \pi_p(T) \|a\|$$

が成立する。

これより, (2) の右辺の $(\sum |\langle Tx_i^0, a \rangle|^{r_1})^{1/r_1}$ に適用する。

$$(4) \quad \left(\sum |\langle Tx_i^0, a \rangle|^{r_1} \right)^{1/r_1} \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \left(\sum |\langle x_i, a \rangle|^{r_2} \right)^{1/r_2} \left(\int_{K^*} |f(a)|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$$

とより, (2), (3), (4) から

$$\left(\sum i^{\frac{r_2}{p_2} - 1} \|S T x_i\|_*^{r_2} \right)^{1/r_2}$$

$$\leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(S) \cdot \pi_p(T) \sup_{\|a\| \leq 1} \left(\sum |\langle x_i, a \rangle|^{r_2} \right)^{1/r_2}$$

と得る。証明終。

定理 2. $1 \leq p, p_1, q_1, r_1 \leq \infty$ 且

$$1/p + 1/p_1 \geq 1, \quad 1/p + 1/q_1 \geq 1, \quad 1/p + 1/r_1 \leq 1$$

をみたすとき, 任意の $T \in \Pi_p(X, Y)$, $S \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(Y, Z)$ に対し $S \circ T \in \Pi_1(X, Z)$ となり,

$$\pi_1(S \circ T) \leq \pi_{p_1, q_1; r_1}(S) \cdot \pi_p(T)$$

が成立する。

この定理は $p = 1$ のときは, 命題 4 から明らかだし、 $p > 1$ のときは, 命題 5 と定理 1 を用いて証明される。

§ 4. $\mathcal{L}_p$ -空間の上の $(p, q; r)$ -absolutely summing operators.

空間 X が $\mathcal{L}_p$ -空間 [6] の特別な場合なるときには、Tomczak [26], Kwapien [5] と同様な結果が、 $(p, q; r)$ -absolutely summing operator に対しても得られる。

これをみるために、次のことに注意する：

課題 1. X が、ある measure space (K, Σ, μ) に対する空間 $L_1(\mu)$ のある部分空間と isomorphic な空間、 Y は任意の Banach 空間とする。このとき、 $T \in B(X, Y)$ が $(p, q; 1)$ -absolutely summing であるための必要十分条件は、任意の $S \in B(\mathcal{L}_\infty, X)$ に対して、 $T \circ S \in \Pi_{p, q; 1}(\mathcal{L}_\infty, Y)$ となることである。

一方、 Lindenstrauss and Pełczyński [6] の結果によれば、課題中の S は 2-absolutely summing である、ということも知られている。

このことと、定理 1 を利用すれば、任意の $T \in$

$\Pi_{p_2, q_2; 2}(X, Y)$ に対して、つねに $T \circ S \in \Pi_{p_1, q_1; 1}(\mathcal{L}_\infty, Y)$ となり、従って課題 1 から $T \in \Pi_{p_1, q_1; 1}(X, Y)$ となる。

以上から

定理 3. X, Y は問題 1 にあけると同じ空間とする

。 $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$, かつ $1 \leq p_1 \leq 2$,
 $1 \leq q_1 \leq 2$, $p_1 \geq q_1$, $1/p_2 = 1/p_1 - 1/2$, $1/q_2 = 1/q_1$
 $- 1/2$ をみたすとき,

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(X, Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(X, Y)$$

が成立する。

この例として,

系. $p_i, q_i, i = 1, 2$, は定理 3 と同じ条件を
 みたすものとする。 $1 \leq r \leq 2$ とし, Y は任意
 の Banach 空間とすると

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(\ell_r, Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(\ell_r, Y),$$

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(L_r(0, 1), Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(L_r(0, 1), Y)$$

が成立する。

これは, [6] の結果:

$1 \leq r \leq 2$ のときは, $\ell_r, L_r(0, 1)$ は $L_1(\mu)$
 の部分空間と isomorphic になる。

に基づく。

§ 5. Hilbert 空間上の $(p, q; r)$ -absolutely

summing operator.

この § 2 では, H を separable Hilbert space とする。

$\Pi_{2,1}(H, H) = B(H, H)$ なること, 命題 6 の系を用いれば次の定理が成立する。

定理 4. $1 \leq p, q, r < \infty$ かつ $p \geq q$ なるとき、更に $1/2 + 1/p \leq 1/r$, $1/2 + 1/q \leq 1/r$ を満たしているならば

$$\Pi_{p,q;r}(H, H) = B(H, H)$$

が成立する。

次に, Hilbert-Schmidt 作用素の一般化としてあり, nuclear 作用素の一般化としてある Pietsch [16] の type ℓ_p の作用素を一般化する。

Banach 空間 X, Y に対して, $\mathcal{A}_i(X, Y)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, をその値域が至多 i 次元である作用素の全体とするとき, $T \in B(X, Y)$ に対して

$$\alpha_i(T) = \inf \{ \|T - A\| : A \in \mathcal{A}_i(X, Y) \}$$

は T の i 次の近似度 (approximation number) と云われる [2], [23]。

定義 2. $\{ T \in B(X, Y) : \{\alpha_i(T)\} \in \ell_{p,q} \}$ を $\ell_{p,q}(X, Y)$ ($p = q$ のとき $\ell_p(X, Y)$) とおき, その要素を type $\ell_{p,q}$ の作用素 ($p = q$ のとき

さ type ℓ_p の作用素) という。この集合にノルム

$\ell_{p,q}(T) := \|\{a_n(T)\}\|_{\ell_{p,q}}$ を入れると Banach 空間になる。

特に、 X, Y が共に Hilbert 空間 H であるときは、Triebel [23] による $G_{p,q}(H, H)$ の作用素 (更に $p=q$ のときは Gohberg and Krein [2] の $G_p(H, H)$ の作用素, Dunford and Schwartz [1] の class C_p の作用素) と一致する。Gohberg and Krein [2] によると, $\ell_{p,q}(H, H)$ の要素は compact 作用素で, 従って次のように表現される: T は, H の二組の正規直交系 $\{e_n\}, \{f_n\}$ と数列 $\{\lambda_n\} \in \ell_{p,q}$ を用いて $Tx = \sum_1^\infty \lambda_n(x, e_n) f_n, x \in X$ の形にかけられる作用素と同じで, $\|\{\lambda_n\}\|_{\ell_{p,q}} = \ell_{p,q}(T)$ となる。

また, H から H への nuclear 作用素の全体を $\mathcal{N}(H, H)$, そのノルムを $\nu(T)$, Hilbert-Schmidt 作用素の全体を $G_2(H, H)$, ノルムを $\sigma(T)$ とすると

$$\ell_1(H, H) = \mathcal{N}(H, H), \quad \ell_1(T) = \nu(T) \quad [16],$$

$$\ell_2(H, H) = G_2(H, H) = \Pi_p(H, H), \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\ell_2(T) = \sigma(T) = \pi_2(T) \quad [16], [18], [13]$$

であることが知られている。

我々は, $\ell_{p,q}$ -type の作用素 γ ($p, q; r$)-absolutely summing operator の関係を調べるため, これら作用素の作る空間の補間空間を考える。

以下で用いる γ の Banach 空間 E, F の平均補間空間 $(E, F)_{\theta, q}$, $0 \leq \theta \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, の基本的性質はよく知られている [7], [4], [10]。

先づ, Triebel [23] の補題は, 次の形になる:

命題 7. $0 < \theta < 1$, $1/p = 1 - \theta$, $1 \leq q \leq \infty$ とするとき,

$$(\mathcal{N}(H, H), \ell_{\infty}(H, H))_{\theta, q} = \ell_{p, q}(H, H)$$

が成立する。

また, 補間空間の reiteration theorem を用いて,

$$\sum_{i=1}^2 1 < p_i, p < \infty, 1 \leq q_i, q < \infty, i = 1, 2, \\ 1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{なるとき}$$

$$(\ell_{p_1, q_1}(H, H), \ell_{p_2, q_2}(H, H))_{\theta, q} = \ell_{p, q}(H, H)$$

が成立する。

$\Pi_{p, q; r}$ に属する線形空間に対しては

定理 5. $1 \leq p_i < \infty$, $1 \leq q_i, q, r \leq \infty$, $i = 1, 2$, $p_1 \neq p_2$, $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$, $0 < \theta < 1$ とするとき

$$(\Pi_{p_1, q_1; r}(X, Y), \Pi_{p_2, q_2; r}(X, Y))_{\theta, r} \subset \Pi_{p, q; r}(X, Y)$$

が成立する。ここで X, Y は Banach 空間。

これは、補関空間の定義と、

$$(\ell_{p_1, q_1}, \ell_{p_2, q_2})_{\theta, q} = \ell_{p, q}$$

なる関係を用いて証明出来る。

以上の結果を用いると、

定理 6、 $2 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 < r < 2$

に対し、 $1/p_1 = 1/p + 1/r - 1/2$ とおくと

$$\ell_{p, q}(H, H) \subset \Pi_{p_1, q; r}(H, H)$$

が成立する。

証明は、

$$(\mathcal{N}(H, H), \ell_{\infty}(H, H))_{1/2, 2} = \ell_2(H, H) = \Pi_r(H, H),$$

$1 \leq r < \infty$, なること [13], および、定理 4 から

$$\ell_{\infty}(H, H) = \Pi_{r_1, r}(H, H), \quad 1/r = 1/2 + 1/r_1$$

なることに注意して、命題 7, その意、定理 5 を順次用いて示せる。

一方、Gomberg and Krein [2] の結果によると、 $\Pi_{p, q; r}$ は π -ideal なることから

命題 2. $1 \leq p, q, r < \infty$ に対し、任意の $(p, q; r)$ -absolutely summing operator は compact operator。

が成立するから、 $T \in \Pi_{p, q; r}(H, H)$ を標準分解して、定義を用いて検討すると、

次の定理が得られる:

定理 7. $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq r < 2$ に対して

$$1/p_1 = 1/p + 1/2 - 1/r \geq 0, \quad 1/q_1 = 1/q + 1/2 - 1/r \geq 0 \text{ とすると}$$

$$\Pi_{p, q, r}(H, H) \subset \mathcal{L}_{p_1, q_1}(H, H)$$

が成り立つ。

§ 6. あとがき.

1) 本文の証明の詳細は [11] で発表予定。

2) 以上の議論は, absolutely summing operators と type $\mathcal{L}_{p, q}$ -operators に関するものであつたが, Persson and Prietoch [14] で展開されている p -nuclear operator $\in N_p$, p -quasi-nuclear operator $\in N_p^Q$, p -integral operator $\in I_p$, p -quasi-integral operator = p -absolutely summing operator $\in I_p^Q = \Pi_p$ ([12], [16], [17], [20], [21]) 等について, 同様の議論がなされる。

3) Kernel 定理 (X は nuclear 空間なら, 任意の局所凸ノルム空間 Y に対して $T \in B(X, Y)$ は nuclear 作用素。) に対応するような空間と作用素の間の議論が, 我々の作用素の議論からも展開されることを期待する ([6])

参照)。

4) また [21], [24], [25] 等で得られているように, Sobolev, Besov 空間等の埋藏作用素 $\mathcal{K}^{(p, q; r)}$ - absolutely summing operator, p -nuclear operator, ..., とする場合を調べる問題に興味深い。

参考文献

- [1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I, II*; New York, 1958, 1963.
- [2] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction of the theory of linear non self-adjoint operators*, Moscow, 1965.
- [3] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.
- [4] P. Grisvard, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. Pures et Appl. 45, 1966, 143 - 290.
- [5] S. Kwapien, *Some remarks on (p, q) -absolutely summing operators in l_p -spaces*, Studia Math.

29, 1968, 327-337.

- [6] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, Absolutely summing operators in L_p -spaces and their applications, *Studia Math.* 29, 1968, 215-326.
- [7] J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. de I. H. E. S., Paris*, 19, 1964, 5-68.
- [8] K. Maurin, Abbildungen von Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen, *Math. Scand.* 9, 1961, 359-371.
- [9] B. Mitjagin and A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimension, *Proc. Inter. Cong. Math.*, Moscow, 1966, 366-372.
- [10] K. Miyazaki, Some remarks on intermediate spaces, *Bull. Kyushu Inst. Tech.* 15, 1968, 1-23.
- [11] _____, $(p, q; r)$ -absolutely summing operators, to appear.
- [12] R. Oloff, Interpolation zwischen den Klassen G_p von Operatoren in Hilberträumen, *Math. Nachr.* 46, 1970, 209-218.
- [13] A. Pełczyński, A characterization of Hilbert-

- Schmidt operators, *Studia Math.* 28, 1967, 355-360.
- [14] A. Persson und A. Pietsch, p -nukleare und p -integrale Abbildungen in Banachräumen, *Studia Math.* 33, 1969, 19-62.
- [15] A. Pietsch, Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, *Revue Math. Pures Appl.* 8, 1963, 1-21.
- [16] ———, Nukleare lokal-konvexe Räume, Berlin, 1965.
- [17] ———, Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen, *Math. Ann.* 165, 1966, 76-90.
- [18] ———, Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28, 1967, 333-353.
- [19] ———, Hilbert-Schmidt Abbildungen in Banach Räumen, *Math. Nachr.* 37, 1968, 237-245.
- [20] ———, Ideale von S_p -Operatoren in Banachräumen, *Studia Math.* 38, 1970, 59-69.
- [21] ——— und H. Triebel, Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren, *Studia Math.* 29, 1968, 95-109.
- [22] P. Saphar, Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces

- de Banach, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 83, 1966, 113-151.
- [23] H. Triebel, Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen, Inventiones Math. 4, 1967, 275-293.
- [24] ———, Über die Approximationszahlen der Einbettungsoperatoren $J(B_{p,q}^r(\Omega) \rightarrow B_{p',q'}^r(S))$, Arch. Math. 19, 1968, 305-312.
- [25] ———, Über die Verteilung der Approximationszahlen von Integraloperatoren in Sobolev-Besov-Räumen, Jour. Math. Mech. 19, 1970, 783-796.
- [26] N. Tomczak, A remark on (s, t) -absolutely summing operators in L_p -spaces, Studia Math. 35, 1970, 97-100.