

An algorithm which generates standard tableaux for a shifted Young diagram with uniform probability

KENTO NAKADA

1. この研究の背景と目的

B. E. Sagan は論文 [10] において, shifted shape のフック公式の証明として, ある確率的なアルゴリズム (2.1 節を参照) を用いたものを提示した. このアルゴリズムは, shifted shape S の標準盤 T を確率

$$\text{Prob}_S(T) = \frac{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}{\#S!}$$

で生成する. ここで, $H_S(v)$ は S における v のフックである (2.1 節参照). 右辺は T に依存していないことから, 標準盤の総数がその逆数で与えられる:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}.$$

岡村 [9], 仲田-岡村 [8] は, この結果を, simply-laced な Kac-Moody Lie 代数上の一般化されたヤング図形に対して拡張した. 一般化されたヤング図形としての shifted shape は D 型の Lie 代数上で実現される. Sagan による shifted shape の場合の証明は組み合わせ論的なものであったが, [9] は Sagan の手法を踏襲する場合分け, [8] は colored hook formula [5] を用いることでなされる.

この研究の目的は, この結果を simply-laced でない場合に考察することである. simply-laced でない場合の一般化されたヤング図形は, J. R. Stembridge によって分類されており [12], 本稿の主結果は, B 型の場合である. B 型の一般化されたヤング図形は, 図形としては shifted shape になる. しかし, D 型 Lie 代数上の shifted shape と B 型 Lie 代数上の shifted shape では, フックの形状が異なる. 上で述べたアルゴリズムはフックの形状に依存するので, 本稿で考えるアルゴリズム (2.2 節を参照) は Sagan のそれとは異なる.

2. SHIFTED SHAPE と結果の比較

Definition 2.1. 集合 $S := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq j\}$ に 次の順序を入れたものを考える:

$$(i, j) \leq (i', j') \iff i \geq i' \text{ and } j \geq j'.$$

S の finite order filter S を shifted shape と呼ぶ.

本稿では, shifted shape を描くとき, 箱ではなく node を用いることにする (FIGURE 2.1):

Definition 2.2. S を shifted shape とする ($\#S = d$). 全単射 $L: \{1, \dots, d\} \rightarrow S$ は

$$L(k) \leq L(l) \Rightarrow k \leq l, \quad (1 \leq k, l \leq d)$$

を満たすとき, S の標準盤と呼ばれる. S の標準盤の全体を $\text{STab}(S)$ と書く.

Remark 2.3. 上の標準盤の定義では, label の入れ方が通常と逆になっているが, ここでは便宜上このように定義する.

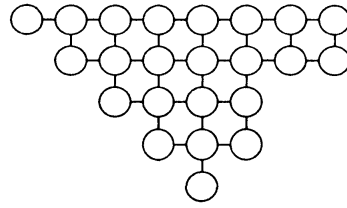


FIGURE 2.1. a shifted shape

2.1. Sagan の結果 (standard hooks の場合).

Definition 2.4. S を *shifted shape*, $v = (i, j) \in S$ とする. このとき, S の部分集合 $H_S(v)$ を次で定義する:

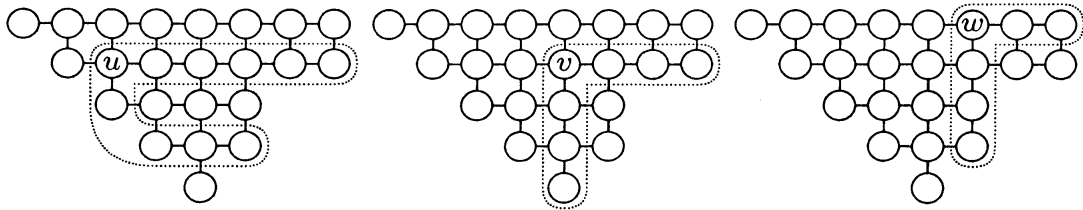
$$\text{Arm}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$\text{Leg}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i < i' \text{ and } j = j' \}.$$

$$\text{Tail}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid j + 1 = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$H_S(v) := \{v\} \sqcup \text{Arm}_S(v) \sqcup \text{Leg}_S(v) \sqcup \text{Tail}_S(v).$$

集合 $H_S(v)$ を S における v の hook と呼ぶ (FIGURE 2.2). $H_S(v)^+ := H_S(v) \setminus \{v\}$ とおく.

FIGURE 2.2. Hooks of u , v , and w .

Sagan が提示したアルゴリズムは以下である. 以下, S を *shifted shape* とする ($\#S = d$).

GNW1. Set $i := 0$ and set $S_0 := S$.

GNW2. (いま, S_i は $d - i$ 個の nodes を持っている.) Set $j := 1$ and pick a node $v_1 \in S_i$ with the probability $1/(d - i)$.

GNW3. If $\#H_{S_i}(v_j)^+ \neq 0$, pick a node $v_{j+1} \in H_{S_i}(v_j)^+$ with the probability $1/\#H_{S_i}(v_j)^+$. If not, go to GNW5.

GNW4. Set $j := j + 1$ and return to GNW3.

GNW5. (いま, $\#H_{S_i}(v_j)^+ = 0$ である.) Set $L(i + 1) := v_j$ and set $S_{i+1} := S_i \setminus v_j$ (S から node v_j を取り除いた shape).

GNW6. Set $i := i + 1$. If $i < d$, return to GNW2; if $i = d$, terminate.

このアルゴリズムが終了するとき, S の nodes の列 $(L(1), L(2), \dots, L(d))$ が得られる. 列 $L = (L(1), L(2), \dots, L(d))$ が得られる確率を $\text{Prob}_S(L)$ と書く. L は, アルゴリズムの定義から S の標準盤になっている. このとき, Sagan は次の定理を示した:

Theorem 2.5 (Sagan [10]). S を *shifted shape*, $L \in \text{STab}(S)$ とする. このとき,

$$\text{Prob}_S(L) = \frac{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}{\#S!}.$$

ここで、右辺は L に依存していないことから、標準盤の総数はその逆数で与えられる:

Corollary 2.6. S を *shifted shape* とすると、次が成り立つ:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}.$$

Remark 2.7. これは *shifted shape* の *hook formula* として知られている公式である [13].

2.2. 本稿の結果 (**non-standard hooks** の場合). この小節では, *shifted shape* に対して, 前小節とは異なる *hook* を定義する.

Definition 2.8. S を *shifted shape*, $v = (i, j) \in S$ とする. このとき, S の (多重) 部分集合 $H'_S(v)$ を次で定義する:

$$\text{Arm}'_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$\text{Leg}'_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i < i' \text{ and } j = j' \}.$$

$$\text{Tail}'_S(v) := \begin{cases} \{ (i', j') \in S \mid j = i' \text{ and } j < j' \} & \text{if } i < j \text{ and } (j, j) \in S, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H'_S(v) := \{v\} \sqcup \text{Arm}'_S(v) \sqcup \text{Leg}'_S(v) \sqcup \text{Tail}'_S(v).$$

ただし, $i < j$ and $(j, j) \in S$ の場合, $\text{Leg}'_S(v)$ と $\text{Tail}'_S(v)$ はともに (j, j) を元に持つが, このときは多重集合としての和集合として考える ((j, j) を多重度 2 で持つ). 多重集合 $H'_S(v)$ を S における v の *non-standard hook* と呼ぶ (FIGURE 2.3). $H'_S(v)^+ := H'_S(v) \setminus \{v\}$ とおく.

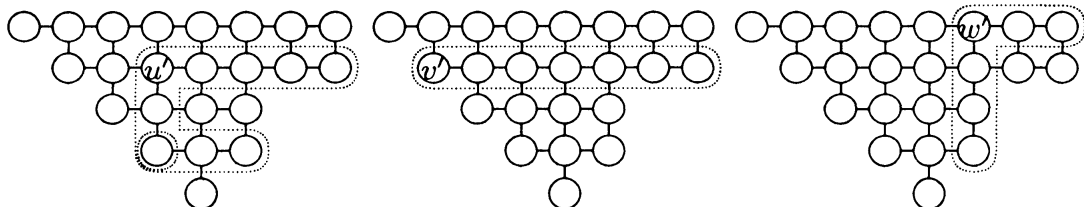


FIGURE 2.3. Hooks of u' , v' , and w' .

本稿で提示するアルゴリズムは以下である. 以下, S を *shifted shape* とする ($\#S = d$).

- GNW1. Set $i := 0$ and set $S_0 := S$.
- GNW2. (いま, S_i は $d - i$ 個の nodes を持っている.) Set $j := 1$ and pick a node $v_1 \in S_i$ with the probability $1/(d - i)$.
- GNW3. If $\#H'_{S_i}(v_j)^+ \neq 0$, pick a node $v_{j+1} \in H'_{S_i}(v_j)^+$ with the probability $(\text{multiplicity of } v_j) / \#H'_{S_i}(v_j)^+$. If not, go to GNW5.
- GNW4. Set $j := j + 1$ and return to GNW3.
- GNW5. (いま, $\#H'_{S_i}(v_j)^+ = 0$ である.) Set $L(i + 1) := v_j$ and set $S_{i+1} := S_i \setminus v_j$ (S から node v_j を取り除いた shape).
- GNW6. Set $i := i + 1$. If $i < d$, return to GNW2; if $i = d$, terminate.

このアルゴリズムが終了するとき, S の nodes の列 $(L(1), L(2), \dots, L(d))$ が得られる. 列 $L = (L(1), L(2), \dots, L(d))$ が得られる確率を $\text{Prob}'_S(L)$ と書く. L は, アルゴリズムの定義から S の標準盤になっている. このとき, 次が本稿の主定理である:

Theorem 2.9 ([7]). S を *shifted shape*, $L \in \text{STab}(S)$ とする. このとき,

$$\text{Prob}'_S(L) = \frac{\prod_{v \in S} \#H'_S(v)}{\#S!}.$$

ここで, 右辺は L に依存していないことから, 標準盤の総数とその逆数で与えられることが従う:

Corollary 2.10. S を *shifted shape* とすると, 次が成り立つ:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#H'_S(v)}.$$

Remark 2.11. これは, 通常よく知られる *shifted shape* の *hook formula* (Corollary 2.6) とは表面上異なるが, 本質的には同じものである. それは, S から S 自身への全単射 $\varphi: S \rightarrow S$ で, $\#H_S(v) = \#H'_S(\varphi(v))$ が存在することから分かる. ここでは詳細は省略するが, 具体的には, FIGURE 2.2 における u, v, w と FIGURE 2.3 における u', v', w' は $\varphi(u) = u'$, $\varphi(v) = v'$, $\varphi(w) = w'$ という関係で結ばれている.

3. SHIFTED SHAPE の B 型 COROOT SYSTEM による実現

この節では, 定理 2.9 を証明する際に用いるいくつかの命題を紹介する. 定義していない用語に関しては [3][4] を参照のこと.

$W = \langle s_0, s_1, \dots, s_{l-1} \rangle$ を B_l 型 Weyl 群とする. ここで, index は次の Dynkin diagram で入れる:

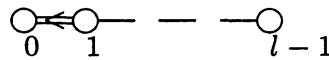


FIGURE 3.1. Dynkin diagram of type B_l

$\mathfrak{h}$ を B_l 型 Lie 代数の Cartan subalgebra とすると, W は $\mathfrak{h}^*$ に,

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

で作用している. ただし, α_i は simple root, $\alpha_i^\vee$ は simple coroot ($i = 0, 1, \dots, l-1$).

Λ_0 を index 0 に対応する fundamental weight とする. このとき,

Proposition 3.1. $\lambda \in W\Lambda_0$ とすると,

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta^\vee \in \Phi_+^\vee$$

が成り立つ. ここで, $\Phi_+^\vee$ は *positive coroot* の集合である.

Definition 3.2. $\lambda \in W\Lambda_0$ とする. $\Phi_+^\vee$ の部分集合 $D(\lambda)^\vee$ を次で定義する:

$$D(\lambda)^\vee := \{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \}.$$

Proposition 3.3. $\lambda \in W\Lambda_0$ とする. このとき, $D(\lambda)^\vee$ は *coroot* の *ordinary order* で, ある *shifted shape* と順序同型である. また, 任意の *shifted shape* は十分大きい l に対して $D(\lambda)^\vee$ として実現する.

Remark 3.4. *infinite rank* になってしまうが, B_∞ 型 Dynkin diagram を用いれば, $W\Lambda_0 \ni \lambda \mapsto D(\lambda)^\vee \in \{\text{shifted shapes}\}$ は全単射である.

Definition 3.5. $\lambda \in W\Lambda_0$, $\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee$ とする. このとき, $D(\lambda)^\vee$ の多重部分集合 $H'_\lambda(\beta^\vee)$ を次で定義する:

$$H'_\lambda(\beta^\vee) := \{ \gamma^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \gamma^\vee \leq \beta^\vee \text{ and } \langle \beta, \gamma^\vee \rangle \geq 1 \}.$$

ただし, $\beta^\vee \in H'_\lambda(\beta^\vee)$ の多重度は 1, $\gamma^\vee \in H'_\lambda(\beta^\vee) \setminus \{\beta^\vee\}$ の多重度は $\langle \beta, \gamma^\vee \rangle$ とする.

このとき, 2.2 節で定義した non-standard hook と上で定義した hook は一致する.

Lemma 3.6. $\lambda \in W\Lambda_0$, $\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee$ とする. このとき,

$$\#H'_\lambda(\beta^\vee) = \text{ht}(\beta)$$

が成り立つ. ただし, 左辺は多重度を込めて数える. 右辺は root β の height である.

Definition 3.7. $\lambda \in W\Lambda_0$ とする. $d := \#D(\lambda)^\vee$ とおく. simple coroot の列 $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$ で,

$$\alpha_{i_k}^\vee \in D(s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(\lambda))^\vee \cap \Pi^\vee, \quad k = 1, \dots, d,$$

を満たすものの全体を $\text{MPath}(\lambda)^\vee$ と書く.

Proposition 3.8 ([6]). $\lambda \in W\Lambda_0$ とし, $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \in \text{MPath}(\lambda)^\vee$ とする. このとき, $\gamma_k^\vee := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee)$ とおくと $(k = 1, \dots, d)$, $(\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_d^\vee) \in \text{STab}(D(\lambda)^\vee)$ である. また, 対応 $\text{MPath}(\lambda) \ni (\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \mapsto (\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_d^\vee) \in \text{STab}(D(\lambda)^\vee)$ は全単射である.

4. アルゴリズムと KEY LEMMA

改めて 3.2 節で考えたアルゴリズムを, 今度は 2 段階に分けて提示する:

4.1. Algorithm A1. $\lambda \in W\Lambda_0$ は $D(\lambda)^\vee \neq \emptyset$ とする. 次のアルゴリズムを考える (algorithm A1):

- A1-1. Set $j := 1$ and pick an element $\beta_j^\vee \in D(\lambda)^\vee$ with the probability $\frac{1}{\#D(\lambda)^\vee}$.
- A1-2. If $\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) > 1$, pick an element $\beta_{j+1}^\vee \in H'_\lambda(\beta_j^\vee) - \{\beta_j^\vee\}$ with the probability $\frac{\langle \beta_j, \beta_{j+1}^\vee \rangle}{\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) - 1}$. If not, then output $\beta_j^\vee$ and terminate.
- A1-3. Set $j := j + 1$ and return to A1-2.

アルゴリズム A1 が終了すると, $\beta_j^\vee \in D(\lambda)^\vee$ such that $\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) = 1$ が確率的に得られる. Lemma 3.6 より, この $\beta_j^\vee$ は simple coroot である. つまり, アルゴリズム A1 は simple coroot $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ を確率的に出力するアルゴリズムである. $\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee)$ で $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ を出力する確率を表す. また, $\beta^\vee \triangleright \gamma^\vee$ で, $\beta^\vee > \gamma^\vee$ and $\langle \beta, \gamma^\vee \rangle \geq 1$ を表すことにする.

アルゴリズム A1 の定義と Lemma 3.6 からただちに次を得る.

Lemma 4.1. $\lambda \in W\Lambda_0$, $d := \#D(\lambda)^\vee$, $D(\lambda)^\vee \neq \emptyset$, $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{\beta_l^\vee \triangleright \beta_{l-1}^\vee \triangleright \cdots \triangleright \beta_1^\vee \triangleright \alpha_i^\vee \\ \beta_k^\vee \in D(\lambda)^\vee, l \geq 0}} \frac{\langle \beta_l, \beta_{l-1}^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_l) - 1} \frac{\langle \beta_{l-1}, \beta_{l-2}^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_{l-1}) - 1} \cdots \frac{\langle \beta_1, \alpha_i^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_1) - 1}$$

4.2. Algorithm A2. Let $\lambda \in P_{\geq -1}^{\text{fin}}$. We consider the following algorithm (algorithm A2):

A2-1. Set $k := 0$ and set $\lambda_0 := \lambda$.

A2-2. If $D(\lambda_k) \neq \emptyset$, run the algorithm A1 for λ_k and set α_i be a random output. If not, terminate.

A2-3. (Now $\alpha_i \in D(\lambda_k) \cap \Pi$.) Set $\alpha_{i_{k+1}} := \alpha_i$ and set $\lambda_{k+1} := s_i(\lambda_k)$.

A2-4. Set $k := k+1$. If $k < \#D(\lambda)$, return to A2-2; if $k = \#D(\lambda)$, then terminate.

アルゴリズム A2 が終了したとき, simple coroot の列 $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$ が確率的に得られる. アルゴリズムの定義より, $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \in \text{MPath}(\lambda)^\vee$ である. アルゴリズム A2 が $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$ を出力する確率を $\text{Prob}_\lambda(\mathcal{B})$ と書く.

アルゴリズム A2 の定義より正に次を得る:

Lemma 4.2. $\lambda \in W\Lambda_0$ とする. $d := \#D(\lambda)$ とおく. $\mathcal{B} = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \in \text{MPath}(\lambda)$. Then we have:

$$\text{Prob}_\lambda(\mathcal{B}) = \prod_{k=1}^d \text{prob}_{s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1}(\lambda)}(\alpha_{i_k}).$$

4.3. Key Lemma. 主定理の証明には次の補題が本質的である.

Lemma 4.3 ([7]). $\lambda \in W\Lambda_0$ とすると, 次が成り立つ:

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{\beta_l^\vee \triangleright \beta_{l-1}^\vee \triangleright \dots \triangleright \beta_1^\vee \triangleright \alpha_i^\vee \\ \beta_k^\vee \in D(\lambda)^\vee, l \geq 0}} \frac{\langle \beta_l, \beta_{l-1}^\vee \rangle \alpha_i}{\beta_l - \alpha_i} \frac{\langle \beta_{l-1}, \beta_{l-2}^\vee \rangle \alpha_i}{\beta_{l-1} - \alpha_i} \dots \frac{\langle \beta_1, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i}{\beta_1 - \alpha_i} = \prod_{\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee \setminus \{\alpha_i^\vee\}} \frac{\beta}{s_i(\beta)}$$

ただし, ここで両辺は, 各 simple root α_i を不定元とみた有理式として考えている.

Remark 4.4. [8] では, この (4.1) を証明するために *colored hook formula* を用いる. しかし, 今回の場合は左辺分子の係数に 2 が表れるため, *colored hook formula* を用いることができない. 式 (4.1) の証明は *colored hook formula* の証明をまねて行われる [7].

Lemma 4.3 において, $\alpha_i \rightarrow 1$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$) とすると, Lemma 3.6, Lemma 4.1 より,

$$\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee) = \frac{1}{d} \prod_{\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee \setminus \{\alpha_i^\vee\}} \frac{\text{ht}(\beta)}{\text{ht}(s_i(\beta))}$$

が得られる. この式を Lemma 4.2 に代入し, あとは simply-laced の場合と同様の手法 [8][9] で主定理が得られる.

REFERENCES

- [1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties, and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.
- [3] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [4] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.
- [5] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, Osaka J. of Math. Vol. **54** No. **4** (2008), 1085-1120.
- [6] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram*, preprint.

- [7] K. Nakada, *Another proof of hook formula for a shifted Young diagram*, in preparation.
- [8] K. Nakada, and S. Okamura, *Uniform generation of standard tableaux of a generalized Young diagram*, preprint.
- [9] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.
- [10] B. E. Sagan, *On selecting a random shifted Young tableaux*, J. Algorithm **1** (1980), 213-234.
- [11] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **No. 119** (1972).
- [12] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), 722-743.
- [13] R. M. Thrall, *A combinatorial problem*, Mich.Math.J. **1** (1952), 81-88.

WAKKANAI HOKUSEI GAKUEN UNIVERSITY, FACULTY OF INTEGRATED MEDIA.

E-mail address: `nakada@wakhok.ac.jp`