

Iterated loop space 理論の一応用

阪市大 理 渡辺 孝

Cohen[1] は May[2] を基礎に n -fold loop spaces 上の homology operations の完全な理論をつくった。これを背景にして Milgram [3] の仕事の見直しをすることが本稿の目的である。

[2] には、連結な空間 X に対し、空間 $C_n X$ と弱 homotopy 同値 $\alpha_n: C_n X \rightarrow \Omega \Sigma^n X$ が定義されている。 $C_n X$ は自然な filtration $\{F_k C_n X \mid k \geq 0\}$ をもち、その商空間 $e_n^k X = F_k C_n X / F_{k-1} C_n X$ は同変半 smash 積 $E_n(k) \underset{\Sigma_k}{\times} X^{(k)}$ と同相である。

補題 1 X を $m-1$ 連結 ($m > 1$) とする。このとき

(i) $e_n^k X$ は $km-1$ 連結である。

(ii) 包含写像 $j_k: F_k C_n X \rightarrow C_n X$ は $(k+1)m-1$ 同値である。

$E_n(2) \underset{\Sigma_2}{\cong} S^{n-1}$ だから、 $e_n^2 X \simeq S^{n-1} \underset{\Sigma_2}{\times} (X \wedge X)$ (以後同一視する)。

写像

$$J: e_{n-1}^2 X \rightarrow e_n^2 X, \quad L: e_n^2 X \rightarrow \Omega(e_{n-1}^2(\Sigma X))$$

を、 $v \in S^{n-2}$, $x, y \in X$, $s, t \in [0, 1]$ に対し

$$J(v, x, y) = ([v, \frac{1}{2}], x, y)$$

$$L([v, s], x, y)(t) = (v, [x, 2t+s-1], [y, 2t-s]) \quad (s \leq \frac{1}{2} \text{ で } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \text{ 又は } s \geq \frac{1}{2} \text{ で } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2})$$

$$L([v, s], x, y)(t) = * \quad (\text{その他})$$

で定義する. 一方 $\eta_n: X \rightarrow \Omega^n \Sigma^n X$ を自然な包含写像とすると, 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(\Omega^{n-1} \Sigma^{n-1} X, X) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_{n-1}} & \Omega^{n-1} \Sigma^{n-1} X \\ \downarrow \tilde{J} & & \downarrow = & & \downarrow \\ \Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_n} & \Omega^n \Sigma^n X \\ \Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_n} & \Omega^n \Sigma^n X \\ \downarrow \tilde{L} & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow = \\ \Omega^2(\Omega^{n-1} \Sigma^n X, \Sigma X) & \longrightarrow & \Omega \Sigma X & \longrightarrow & \Omega^n \Sigma^n X \end{array}$$

補題 2 $m-1$ 連結 ($m > 1$) な CW 複体 X に対し, 次の (i) - (iii) が成り立つ.

(i) 図式

$$\Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X) \xrightarrow{f_n} \Omega(\Omega^n \Sigma^n X / X) \xleftarrow{\Omega \bar{\alpha}_n} \Omega(C_n X / X) \xleftarrow{\Omega \bar{j}_2} \Omega(e_n^2 X)$$

において, f_n は $3m-1$ 同値, $\Omega \bar{\alpha}_n$ は homotopy 同値, $\Omega \bar{j}_2$ は $3m$ 同値である.

(ii) 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega(\Omega^{n-1} \Sigma^{n-1} X, X) & \longrightarrow & \Omega(\Omega^{n-1} \Sigma^{n-1} X / X) & \longleftarrow & \Omega(C_{n-1} X / X) & \longleftarrow & \Omega(e_{n-1}^2 X) \\ \downarrow \tilde{J} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Omega J \end{array}$$

$$\Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X) \longrightarrow \Omega(\Omega^n \Sigma^n X / X) \longleftarrow \Omega(C_n X / X) \longleftarrow \Omega(e_n^2 X)$$

(ii) 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X) & \longrightarrow & \Omega(\Omega^n \Sigma^n X / X) & \longleftarrow & \Omega(C_n X / X) & \longleftarrow & \Omega(e_n^2 X) \\ \downarrow \tilde{L} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Omega L \\ \Omega^2(\Omega^{n-1} \Sigma^n X, \Sigma X) & \longrightarrow & \Omega^2(\Omega^{n-1} \Sigma^n X / \Sigma X) & \longleftarrow & \Omega^2(C_{n-1} \Sigma X / \Sigma X) & \longleftarrow & \Omega^2(e_{n-1}^2 \Sigma X) \end{array}$$

次の図式を考える.

$$\begin{array}{c} e_1^2 X = X \wedge X \\ \downarrow J^{n-1} \\ e_{n-1}^2 X \xrightarrow{J} e_n^2 X \xrightarrow{K} e_n^2 X / e_{n-1}^2 X = S^{n-1} \wedge X \wedge X \end{array}$$

補題 3 $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p\{a, b, \dots\}$ とする. このとき $\tilde{H}^*(e_n^2 X; \mathbb{Z}_p)$ の $\mathbb{Z}_p$ -basis は次のような元で与えられる.

	$p=2$	$p>2$
$\langle a, b \rangle$	$a \neq b$	$a \neq b$, 又は $a=b$ で $ a $ は偶数
$e^i \cup a \otimes a$	$0 \leq i \leq n-1$	存在しない
$e^{n-1} \cup \langle a, b \rangle$	$a \neq b$	$a \neq b$, 又は $a=b$ で $n+ a $ は偶数

ここに $\langle a, b \rangle$, $e^{n-1} \cup \langle a, b \rangle$ はそれぞれ

$$(J^{n-1})^*(\langle a, b \rangle) = a \otimes b + (-1)^{|a||b|} b \otimes a,$$

$$K^*(\sigma^{n-1}(a \otimes b)) = K^*((-1)^{n+|a||b|} \sigma^{n-1}(b \otimes a)) = e^{n-1} \cup \langle a, b \rangle$$

を満たす. また

$$J^*(e^i \cup a \otimes a) = e^i \cup a \otimes a \quad (0 \leq i \leq n-2).$$

補題 4 L の adjoint より誘導される準同型写像

$$\phi(L)^*: H^*(e_{n-1}^2(\Sigma X)) \longrightarrow H^*(\Sigma(e_n^2 X))$$

に対し

$$\phi(L)^*(\langle \sigma(a), \sigma(b) \rangle) = 0,$$

$$\phi(L)^*(e^i \cup \sigma(a) \otimes \sigma(a)) = \sigma(e^{i+1} \cup a \otimes a),$$

$$\phi(L)^*(e^{n-2} \cup \langle \sigma(a), \sigma(b) \rangle) = \sigma(e^{n-1} \cup \langle a, b \rangle)$$

が成り立つ.

定理 5 $X = \Omega^n Y$ を $m-1$ 連結 ($m > 1$) な CW 複体とする. このとき $H^i(X; Z_p)$ ($i < 3m-1$) の Z_p -module 構造は, $p > 2$ のときは $H^*(Y; Z_p)$ の Z_p -algebra 構造に, 又 $p = 2$ のときは $H^*(Y; Z_2)$ の $\mathcal{A}_2$ -algebra 構造によって決定される.

証明の概略を述べよう. 写像 $\xi_n: \Sigma^n X \longrightarrow Y$ を $\xi_n = \phi^n(1_X)$ で定義し, $\zeta_n = \Omega^n \xi_n: \Omega^n \Sigma^n X \longrightarrow X$ とおく. ζ_n の fibre を $F_n X$ で表わすと, $\zeta_n \eta_n = 1_X$ だから, $\Omega^n \Sigma^n X \simeq F_n X * X$. 従って fibration

$$X \xrightarrow{\eta_n} \Omega^n \Sigma^n X \longrightarrow F_n X$$

が存在する (即ち, $\Omega(F_n X) \simeq \Omega(\Omega^n \Sigma^n X, X)$). これより自然な $3m-1$ 同値

$$g_n: e_n^2 X \longrightarrow F_n X$$

が得られる. また ξ_n の fibre を $G_n X$ で表わすと, $\Omega^n(G_n X) \simeq F_n X$. このとき $\phi^n(g_n): \Sigma^n(e_n^2 X) \longrightarrow G_n X$ は $n+3m-1$ 同値だから,

$$\phi^n(g_n)^*: H^i(G_n X) \longrightarrow H^i(\Sigma^n e_n^2 X)$$

は $i < n+3m-1$ のとき同型である. ここで fibration

$$G_n X \xrightarrow{\nu} \Sigma^n X \xrightarrow{\xi_n} Y$$

の Serre exact sequence

$$\cdots \rightarrow H^{i-1}(G_n X) \xrightarrow{\tau} H^i(Y) \xrightarrow{\xi_n^*} H^i(\Sigma^n X) \xrightarrow{\nu^*} H^i(G_n X) \rightarrow \cdots$$

を考える. ここに $\xi_n^* = (\sigma^*)^n$ は n -fold cohomology suspension. これより $i < 3m-1$ の範囲で $H^i(X)$ を求めるには, transgression $\tau: H^i(G_n X) \rightarrow H^{i+1}(Y)$ のふるまいを $i < n+3m-1$ の範囲でみればよい. それは次の通りである.

$$(1) \quad \tau(\sigma^n(\langle a, b \rangle)) = 0. \quad \text{実は } \nu^*(\sigma^n(a \cup b)) = \sigma^n(\langle a, b \rangle).$$

$$(2) \quad \tau(\sigma^n(e^i \cup a \otimes a)) = Sg^{l+i+1}(\tilde{a}).$$

$$(3) \quad \tau(\sigma^n(e^{n-1} \cup \langle a, b \rangle)) = \tilde{a} \cup \tilde{b}.$$

ここに, $a \in H^*(X)$ に対し, $\tilde{a} \in H^{*+n}(Y)$ は $(\sigma^*)^n(\tilde{a}) = a$ を満たす唯一つの元である ((1)-(3) に現われる a は, $|a| \leq 2m-1$ を満たすことに注意).

(2) だけ示そう. $|a| = l$ とおき, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^n e_n^2 X & \longrightarrow & G_n X & \longrightarrow & \Sigma^n X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow \Sigma^n e_n^2(a) & & \downarrow & & \downarrow \Sigma^n a & & \downarrow \tilde{a} \\ \Sigma^n e_n^2 K_l & \longrightarrow & G_n K_l & \longrightarrow & \Sigma^n K_l & \longrightarrow & K_{l+n} \end{array}$$

($K_l = K(Z_2, l)$ は Eilenberg-MacLane 空間) を考えれば, 下方の fibration において

$$\tau(\sigma^n(e^i \cup l_l \otimes l_l)) = Sg^{l+i+1}(l_{l+n}).$$

($\iota_\ell \in H^\ell(K_\ell)$ は基本 cohomology 類) を示せばよいことがわかる.

そのためには, 可換図式 (補題 2 (ii) 参照)

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^n e_{n-1}^2 K_\ell & \longrightarrow & \Sigma G_{n-1} K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma K_{\ell+n-1} \\ \downarrow \Sigma^n J & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\ \Sigma^n e_n^2 K_\ell & \longrightarrow & G_n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & K_{\ell+n} \end{array}$$

から, $i = n-1$ の場合, 即ち

$$\tau(\sigma^n(e^{n-1} \cup \iota_\ell \otimes \iota_\ell)) = \iota_{\ell+n}^2$$

を示せばよい. 次の可換図式 (補題 2 (iii) 参照)

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^n e_n^2 K_\ell & \longrightarrow & G_n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & K_{\ell+n} \\ \downarrow \Sigma^{n-1} \phi(L) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{n-1} e_{n-1}^2 (\Sigma K_\ell) & & & & & & = \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{n-1} e_{n-1}^2 K_{\ell+1} & \longrightarrow & G_{n-1} K_{\ell+1} & \longrightarrow & \Sigma^{n-1} K_{\ell+1} & \longrightarrow & K_{\ell+n} \end{array}$$

において, 左縦から誘導される cohomology 群の準同型写像は, 補題 4 により, $\sigma^{n-1}(e^{n-2} \cup \iota_{\ell+1} \otimes \iota_{\ell+1})$ を $\sigma^n(e^{n-1} \cup \iota_\ell \otimes \iota_\ell)$ にうつす

fibration

$$\Sigma e_1^2 K_{\ell+n-1} \longrightarrow G_1 K_{\ell+n-1} \longrightarrow \Sigma K_{\ell+n-1} \longrightarrow K_{\ell+n}$$

において

$$\tau(\sigma(\iota_{\ell+n-1} \otimes \iota_{\ell+n-1})) = \iota_{\ell+n}^2$$

が成り立つから, τ の自然性より求める結果が得られる.

例 上の定理において

$$Y = CP_8^{12}, P=2, n=11 \text{ (従って } m=5 \text{)}$$

の場合を考える.

$$\tilde{H}^*(CP_8^{12}) = Z_2\{y_{16}, y_{18}, y_{20}, y_{22}, y_{24}\}$$

において

$$S_q^{2i}(y_{2r}) = \binom{r}{i} y_{2(r+i)}, \quad y_{2r} \cup y_{2s} = 0$$

だから, (2), (3) により, $i < 14$ のとき $\tau: H^i(G_{11}(\Omega''CP_8^{12})) \longrightarrow$

$H^{i+1}(CP_8^{12})$ は零写像. 従って群としての同型

$$(4) \quad \tilde{H}^i(\Omega''CP_8^{12}) \cong \tilde{H}^{i+1}(CP_8^{12}) \oplus \tilde{H}^i(e_{11}^2(\Omega''CP_8^{12}))$$

が成り立つ. $(\sigma^*)'': H^*(CP_8^{12}) \longrightarrow H^{*-11}(\Omega''CP_8^{12})$ に対し, $(\sigma^*)''($

$y_{2r}) = z_{2r-11}$ とおくと, 補題 3 により, $* < 14$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*(e_{11}^2(\Omega''CP_8^{12})) = Z_2\{ & e^0 \cup z_5 \otimes z_5, e^1 \cup z_5 \otimes z_5, \\ & e^2 \cup z_5 \otimes z_5, \langle z_5, z_7 \rangle, e^3 \cup z_5 \otimes z_5 \} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*(\Omega''CP_8^{12}) = Z_2\{ & z_5, z_7, z_9, \overline{e^0 \cup z_5 \otimes z_5}, z_{11}, \overline{e^1 \cup z_5 \otimes z_5}, \\ & \overline{e^2 \cup z_5 \otimes z_5}, \overline{\langle z_5, z_7 \rangle}, z_{13}, \overline{e^3 \cup z_5 \otimes z_5} \}. \end{aligned}$$

しかし上の分解 (4) は A_2 -module としてのそれではない. 実際 $S_q'(\overline{\langle z_5, z_7 \rangle}) = z_{13}$ が成り立つことが次のように示される.

関係式

$$S_q' S_q^8 + (S_q^2 S_q^1 S_q^2) S_q^4 + S_q^8 S_q^1 = 0$$

に同伴した secondary operation Φ_8 に対し, $\Phi_8(y_{16}) = [y_{24}]$ が知られている. 従って, $\Phi_8(z_5) = [z_{13}]$. 一方 Φ_8 は 5 次元 cohomology 類

の上で普遍的に自明である。即ち、 z_{13} は Φ_8 の indeterminacy に含まれる。ここで

$$\begin{aligned} \text{indet } \Phi_8 &= Sq_1' H^{12}(\Omega'' CP_8^{12}) + Sq_8^2 Sq_1' Sq_8^2 H^8(\Omega'' CP_8^{12}) + Sq_8^8 H^5(\Omega'' CP_8^{12}) \\ &= Sq_1' H^{12}(\Omega'' CP_8^{12}). \end{aligned}$$

また(西田の公式により) $Sq_1'(e^2 \cup z_5 \otimes z_5) = e^3 \cup z_5 \otimes z_5$, $Sq_1'(\langle z_5, z_7 \rangle) = 0$. これらを結び合わせると求める式が得られる.

References

- [1] F. R. Cohen: The homology of L_{n+1} -spaces, $n \geq 0$, Springer Lecture Notes in Math., vol. 533, 1976, 207-351.
- [2] J. P. May: The geometry of iterated loop spaces, Springer Lecture Notes in Math., vol. 271, 1972.
- [3] R. J. Milgram: Unstable homotopy from the stable point of view, Springer Lecture Notes in Math., vol. 368, 1974.