

弱型 Burkholder 不等式の成り立つ関数空間

富山大学 学術研究部 理学系

菊池 万里

1 導入

本稿を通して (Ω, Σ, P) を非原子的確率空間とする. Σ の部分 σ -代数の広義増大列 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を Ω のフィルトレーションと呼び, フィルトレーションの全体を $\mathbb{F}$ で表す. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ に対し, $\mathcal{F}$ と P に関するマルチンゲールの全体を $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ で表し, 一様可積分な $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \mathcal{M}$ の全体を $\mathcal{M}_u(\mathcal{F})$ で表す. 更に $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $\mathcal{M}_u = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{M}_u(\mathcal{F})$ と置く. すなわち, $\mathcal{M}$ 及び $\mathcal{M}_u$ は, それぞれ何らかのフィルトレーションに関するマルチンゲール及び一様可積分なマルチンゲールの全体を表す.

よく知られているように, L_1 でノルム有界なマルチンゲールは概収束する. 特に $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ であれば, $f = (f_n)$ は概収束する. 本稿ではその概収束極限を f_∞ で表す.

$f = (f_n) \in \mathcal{M}$ に対し, その極大関数 Mf 及び二次変分 Sf をそれぞれ

$$Mf = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |f_n|, \quad Sf = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})^2 + f_0^2 \right]^{1/2}$$

のように定義する. マルチンゲールの極大関数と二次変分は, いずれもマルチンゲール理論を展開する上で欠くことのできない概念であり, 取り分け, それらに関するノルム不等式は, マルチンゲール理論を支える骨格になっている. 極大関数に関する不等式で最もよく知られたものは, Doob の不等式であろう. $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ に対する (2 つの) Doob の不等式は,

$$\|Mf\|_{w-L_p} \leq \|f_\infty\|_{L_p}, \quad (1.1)$$

$$\|Mf\|_{L_p} \leq \frac{p}{p-1} \|f_\infty\|_{L_p} \quad (1.2)$$

のように記述される. 但し, $w-L_p$ は $\|x\|_{w-L_p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda P\{|x| > \lambda\}^{1/p} < \infty$ であるような確率変数 x の全体を表す. よく知られているように $w-L_p$ は Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ と一致する. (1.1) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in [1, \infty]$ に対して成立し, (1.2) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in (1, \infty]$ に対して成立する. これらの不等式は, Doob がマルチンゲールの概念を導入した直後から知られていたのではないと思われる. 実際, Doob の 1953 年の著作 [4] にこれらの不等式が記載されている. 他方, 二次変分に関する Burkholder の不等式は

$$\|Sf\|_{w-L_p} \leq C_p \|f_\infty\|_{L_p}, \quad (1.3)$$

$$C_p^{-1} \|Sf\|_{L_p} \leq \|f_\infty\|_{L_p} \leq C_p \|Sf\|_{L_p} \quad (1.4)$$

のように記述される. (1.3) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in [1, \infty)$ に対して成立し, (1.4) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in (1, \infty)$ に対して成立する. ここに C_p は p のみに依存する (不等式ごとに値の異なり得る) 定数である. これらの不等式は Burkholder のよく知られた論文 [2] の中に述べられている.

上記の不等式が L_p 以外の空間でも成立するか否かを調べることは極めて自然である. 実際, (1.1) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間 (定義 2.1 参照) の特徴付けは [7] で確立され, (1.2) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは [5] で確立されている. 更に, (1.4) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは [6] で確立されている. しかしながら (1.3) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは, 他の 3 つの不等式と比較して難しく, 長らく解決の糸口が見えない状況が続いた. 尚, この問題と関連する研究結果として [9], [10] などがある.

本稿では, 最近得られた (1.3) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けについて議論する.

2 定義と表記法

Ω 上の殆ど至るところ有限な値を取る確率変数 (可測関数) の全体を L_0 で表す. $x \in L_0$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し, 例えば集合 $\{\omega \in \Omega: x(\omega) > \lambda\}$ を $\{x > \lambda\}$ のように略記する. また, 集合 $A \in \Sigma$ に対し, A の指示関数を $\mathbf{1}_A$ で表す.

確率変数から成る線形位相空間 X, Y に対し, $X \hookrightarrow Y$ と書いて, X が Y に連続的に埋め込まれていることを表す. X, Y が (準) ノルム空間であれば, $X \hookrightarrow Y$ であることと, $X \subset Y$ かつ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ ($x \in X$) であるような定数 $C > 0$ が存在することは同値である.

定義 2.1. Ω 上の確率変数 (の同値類) から成る Banach 空間 X は, 次の条件を満たすとき, **Banach 関数空間** と呼ばれる:

$$(B1) \quad L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_1.$$

$$(B2) \quad |x| \leq |y| \text{ a.s. かつ } y \in X \text{ であれば, } x \in X \text{ であり } \|x\|_X \leq \|y\|_X.$$

$$(B3) \quad x_n \in X \ (n \in \mathbb{N}), \ 0 \leq x_n \uparrow x \text{ a.s. かつ } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty \text{ であれば, } x \in X \text{ であり } \|x\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_X.$$

但し, $x \in L_0 \setminus X$ であれば $\|x\|_X = \infty$ と約束する.

勿論 Lebesgue 空間 L_p ($1 \leq p \leq \infty$) は Banach 関数空間であり, Orlicz 空間, Lorentz 空間なども Banach 関数空間である. その他, (適当な可積分性を持つ荷重をもつ) 荷重 Lebesgue 空間や荷重 Orlicz 空間なども Banach 関数空間である. 更に, 変動指数を持つ Lebesgue 空間も Banach 関数空間となる.

定義 2.2. X を Banach 関数空間とする. 各 $x \in L_0$ に対して

$$\|x\|_{X'} = \sup_{y \in B(X)} E[|xy|]$$

と置き, $\|x\|_{X'} < \infty$ であるような $x \in L_0$ の全体を X' で表す. 但し, $B(X)$ は X の閉単位球を表す.

Banach 関数空間 X に対して, 上記のように定義される空間 X' も Banach 関数空間になる ([1, Chap. 1]). 例えば, 各 $p \in [1, \infty]$ に対し p' を p の共役指数とすれば, $(L_p)' = L_{p'}$ となる. 特に $(L_\infty)' = L_1$ である. このことから分かる通り, X' は必ずしも X の双対空間と一致しない.

定義 2.3. X を Banach 関数空間とする. 各 $x \in X$ に対し

$$\|x\|_{w-X} = \sup_{\lambda > 0} \|\mathbb{1}_{\{|x| > \lambda\}}\|_X$$

と置き, $\|x\|_{w-X} < \infty$ であるような $x \in L_0$ の全体を $w-X$ で表す. 本稿では $w-X$ を X の弱空間と呼ぶ.

前述のように $w-L_p = L_{p,\infty}$ となる. 定義から明らかなように $\|\cdot\|_{w-L_p}$ はノルムにはならない(が, $1 < p \leq \infty$ のとき, $L_{p,\infty}$ には $\|\cdot\|_{w-L_p}$ と同値なノルムが定義される). 一般に $\|\cdot\|_{w-X}$ はノルムではなく, 準ノルムである. 実際, $\|\cdot\|_{w-X}$ は三角不等式を満たさないが, 準三角不等式

$$\|x + y\|_{w-X} \leq 2(\|x\|_{w-X} + \|y\|_{w-X})$$

を満たす. このとき,

$$\|x\|_{w-X}^* = \inf \left\{ \sum_{n=1}^m \|x\|_{w-X}^{1/2} : m \in \mathbb{N}, x_n \in w-X, \sum_{n=1}^m x_n = x \text{ a.s.} \right\}^2$$

と置けば, $\|\cdot\|_{w-X}^*$ は $\|\cdot\|_{w-X}$ と同値な $w-X$ 上の準ノルムになり, $\|\cdot\|_{w-X}^{*1/2}$ は三角不等式を満たす ([11, p. 47]). これにより $w-X$ 上の距離関数 $d(x, y) = \|x - y\|_{w-X}^{*1/2}$ が定義できる. $w-X$ はこの距離に関して完備であり, その意味で準 Banach 空間になる.

Banach 関数空間 X が与えられたとき, その上基本関数 $\overline{\varphi}_X(t)$, 下基本関数 $\underline{\varphi}_X(t)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_X(t) &= \sup \{ \|\mathbb{1}_A\|_X : A \in \Sigma, P(A) = t \}, \\ \underline{\varphi}_X(t) &= \sup \{ \|\mathbb{1}_A\|_X : A \in \Sigma, P(A) = t \}, \end{aligned} \quad (t \in [0, 1]),$$

のように定義する. 例えば,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{L_p}(t) &= \underline{\varphi}_{L_p}(t) = t^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ \overline{\varphi}_{L_\infty}(t) &= \underline{\varphi}_{L_\infty}(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. $\overline{\varphi}_X$ は $[0, 1]$ 上の準凹関数である ([7, Lemma 1]). 但し, 関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が準凹関数であるとは, 次の 3 条件を満たすことである:

- (1) $\varphi(t) = 0$ となるのは $t = 0$ のときのみである.
- (2) $\varphi(t)$ は $[0, 1]$ 上で非減少である.
- (3) $\varphi(t)/t$ は $(0, 1]$ 上で非増加である.

$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を準凹関数とすると、 $M(\varphi; \Omega)$ を

$$\|x\|_{M(\varphi; \Omega)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t x^*(s) dx < \infty$$

であるような $x \in L_0$ の全体と定義すれば、 $M(\varphi; \Omega)$ は Banach 関数空間になる^{*1}. これを φ によって生成される **Marcinkiewicz 空間**と呼ぶ. ここに x^* は x の**非増加再配列**を表す. すなわち x^* は

$$x^*(t) = \inf \{ \lambda > 0 : P\{|x| > \lambda\} \leq t \} \quad (0 < t \leq 1)$$

のように定義される $(0, 1]$ 上の関数である. $M(\varphi; \Omega)$ は Banach 関数空間であるから、 $w-M(\varphi; \Omega)$ を考えることができる. この空間を $M^*(\varphi; \Omega)$ で表すことにする. このとき、 $M^*(\varphi; \Omega) = w-M(\varphi; \Omega)$ の準ノルムは

$$\|x\|_{M^*(\varphi; \Omega)} = \sup_{0 < t \leq 1} [\varphi(t) x^*(t)]$$

で与えられる. X が Banach 関数空間であれば $\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから、 X に付随して $M(\overline{\varphi}_X; \Omega)$ 及び $M^*(\overline{\varphi}_X; \Omega)$ が定義できる.

Banach 関数空間 X は、 $x \in X$ のノルムの値が x の分布のみに依存して定まるとき、**再配列不変**^{*2}であるといわれる. より正確には、 X が再配列不変であるとは、 $x, y \in L_0$ が同分布かつ $y \in X$ のとき、 $x \in X$ かつ $\|x\|_X = \|y\|_X$ となることである.

再配列不変空間には Boyd 指標が定義されていて、殊に補間定理の考察において重要な役割を演ずる. しかしながら、Boyd 指標は本稿の課題である不等式の考察には十分ではない. 本稿では、Boyd 指標の代わりになる別の指標を導入して、目的の不等式の考察に利用する.

準凹関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、関数 $m_\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を

$$m_\varphi(s) = \sup_{0 < t \leq (1/s) \wedge 1} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \equiv \sup_{0 < t \leq s \wedge 1} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t/s)} \quad (0 < s < \infty)$$

で定義し、指標 p_φ, q_φ をそれぞれ

$$p_\varphi = \sup_{0 < s < 1} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s} \equiv \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s},$$

$$q_\varphi = \inf_{1 < s < \infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s} \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}$$

^{*1} 本稿の主定理(定理 3.1)を記述するためには、 $M(\varphi; \Omega)$ における「 Ω 」の記述は不要であり、単に $M(\varphi)$ と記述すればそれで十分であるが、関連する結果を述べるにあたり、 Ω への言及が必要になるため、敢えて $M(\varphi; \Omega)$ と記述する.

^{*2} 岩波の数学辞典では再配分不変と表現されている.

のように定める． X が Banach 関数空間であれば， $\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから， $p_{\overline{\varphi}_X}, q_{\overline{\varphi}_X}$ を定義することができる．本稿ではこれらを単に p_X, q_X と記すことにする（但し本稿の結果を記述する上では， q_X は不要である）．通常，Boyd 指標が再配列不変な Banach 関数空間のみに対して定義されるのに対し， p_X, q_X は任意の Banach 関数空間に対して定義される． X が如何なる Banach 関数空間であっても

$$0 \leq p_X \leq q_X \leq 1$$

となる．例えば， $p_{L_p} = q_{L_p} = 1/p$ ($1 \leq p \leq \infty$) となる．その意味で p_X, q_X は L_p の指数 p の役割を拡張するものである．

因みに X が再配列不変な Banach 関数空間のとき，その上 Boyd 指標，下 Boyd 指標をそれぞれ β_X, α_X とすれば， $\alpha_X \leq p_X \leq q_X \leq \beta_X$ となる．更に [9, Propositions 3.2, 3.5] によれば， p_X, q_X について次の事実が知られている：

(i) $p_X > 0$ であるための必要十分条件は

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} > 1 \quad (2.1)$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することである．

(ii) $q_X < 1$ であるための必要十分条件は

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することである．

本稿の結果を記述するためには， p_X に加え次のように定義される X の指標 k_X, ℓ_X が必要である：

$$k_X = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)}{\underline{\varphi}_X(t)}, \quad \ell_X = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t)}{t}.$$

勿論 $k_X < \infty$ であるということは，

$$\overline{\varphi}_X(t) \leq k \underline{\varphi}_X(t) \quad (0 < t \leq 1) \quad (2.2)$$

となる有限な定数 k が存在することを意味し， $\ell_X < \infty$ ということは，

$$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \leq \ell t \quad (0 < t \leq 1) \quad (2.3)$$

となる有限な定数 ℓ が存在することを意味する． X が再配列不変であれば明らかに $k_X = 1$ であり，更に $\ell_X = 1$ でもある ([1, Theorem 5.2, p. 66]).

3 結果

本稿で解決を図りたい問題は、(1.3) と同様の不等式が成り立つような Banach 関数空間 X の特徴付け (L_p を Banach 関数空間 X に置き換えたとき、(1.3) と同様の不等式が成り立つために X が満たすべき必要十分条件) の導出にある。この問題に対する完全な解答は得られていないが、(1.3) の不等式と Sf と f_∞ を入れ替えた不等式が共に成り立つ Banach 関数空間の特徴付けが得られた。

定理 3.1. Banach 関数空間 X に対し、次の (i)–(iii) は互いに同値である：

(i) 任意の $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ に対して

$$\|Sf\|_{w-X} \leq C_X \|f_\infty\|_X \quad \text{かつ} \quad \|f_\infty\|_{w-X} \leq C_X \|Sf\|_X \quad (3.1)$$

であるような X のみに依存する定数 $C_X > 0$ が存在する。

(ii) $p_X > 0$ かつ $k_X < \infty$.

(iii) $p_X > 0$ かつ $\ell_X < \infty$.

上記の $p_X > 0$ は、「(2.1) が成り立つような定数 $A > 1$ が存在する」という条件に置き換えることができる。また、 $k_X < \infty$ 及び $\ell_X < \infty$ はそれぞれ、「(2.2) が成り立つような定数 $k > 0$ が存在する」及び「(2.3) が成り立つような定数 ℓ が存在する」という条件に置き換えることができる。

更に、上記の (同値な) 条件が成り立つとき、 $w-X$ は $M^*(\overline{\varphi}_X; \Omega)$ と一致し、双方の準ノルムは互いに同値である。

上述のように、Banach 関数空間 X が再配列不変であれば、 $k_X = \ell_X = 1$ となる。従ってこの場合、定理 3.1 の (i) が成り立つための必要十分条件は、 $p_X > 0$ という条件のみということになる。

定理 3.1 の各条件から他の条件を導くためには、いずれも少々煩雑な計算が必要になる。その詳細な記述は、他の機会に譲ることとして、本稿の以下の部分では、定理 3.1 の証明のために得られた副産物的な結果について述べる。副産物的ではあるものの、それ自体、十分意味のある結果であると思われる。この副産物的な結果は、定理 3.1 の (i) が成立するときに、 $p_X > 0$ であることを示すために利用される。

以下、 I で半開区間 $(0, 1]$ を表し、 I には確率測度として Lebesgue 測度が与えられているものとする (従って I 上の Lebesgue 可測関数は、確率変数とみなされる)。勿論 I も確率空間であるから、 I 上の可測関数 (確率変数) から成る Banach 関数空間を考えることができる。今後、 Ω 上の確率変数から成る Banach 関数空間を Ω 上の Banach 関数空間と呼び、 I 上の可測関数から成る Banach 関数空間を I 上の Banach 関数空間と呼ぶ。

$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を準凹関数するとき、 $\Lambda(\varphi; I)$ を

$$\|\eta\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X; I)} := \int_0^1 \eta^*(s) d\varphi(s) < \infty$$

であるような I 上の可測関数 η の全体と定義すれば, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: I)$ は準 Banach 空間となる. これを φ によって生成される **Lorentz 空間** と呼ぶ. 但し, η^* は可測関数 η の非増加再配列を表す. すなわち, I 上の Lebesgue 測度を μ で表せば, η^* は

$$\eta^*(t) = \inf \{ \lambda > 0: \mu\{|\eta| > \lambda\} \leq t \} \quad (0 < t \leq 1)$$

のように定義される. 更に η を Ω 上の確率変数 x に置き換えて考えることにより, Ω 上の Lorentz 空間 $\Lambda(\varphi: \Omega)$ を定義することができる. $\Lambda(\varphi: I)$ は $\|\cdot\|_{\Lambda(\varphi: I)}$ と同値的にノルム付け可能であり, そのノルムに関して再配列不変な I 上の Banach 関数空間にできる. $\Lambda(\varphi: \Omega)$ についても同様である. Lorentz 空間に加え, Marcinkiewicz 空間やその弱空間に対しても, Ω 上の空間と I 上の空間が定義される.

X を Ω 上の Banach 関数空間とすると $\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから, X に付随して $M(\overline{\varphi}_X: \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_X: I)$, $M^*(\overline{\varphi}_X: \Omega)$, $M^*(\overline{\varphi}_X: I)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: \Omega)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: I)$ などが定義される. Y が I 上の Banach 関数空間の場合もその上基本関数 $\overline{\varphi}_Y$ が Ω 上の Banach 関数空間の上基本関数と同様に定義され, 準凹関数になる. よって $M(\overline{\varphi}_Y: \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_Y: I)$ などが定義される.

X が再配列不変でない場合でも, $M(\overline{\varphi}_X: \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_X: I)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: \Omega)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: I)$ はいずれも再配列不変な Banach 関数空間になることに注意を要する.

特に Y が I 上の再配列不変な Banach 関数空間であるときには

$$\Lambda(\overline{\varphi}_Y: I) \hookrightarrow Y \hookrightarrow M(\overline{\varphi}_Y: I)$$

であり, $\overline{\varphi}_{\Lambda(\overline{\varphi}_X: I)} = \overline{\varphi}_{M(\overline{\varphi}_X: I)} = \overline{\varphi}_X$ となる. $M(\overline{\varphi}_X: I)$ はそのような再配列不変 Banach 関数空間で最大のものであり, $\Lambda(\overline{\varphi}_X: I)$ は最小のものである (Semenov [12]).

D を各 $t \in I$ に対して区間 $(t, 1]$ 上で積分可能な I 上の関数の全体とし, D 上の線形作用素 $\mathcal{Q}$ を

$$(\mathcal{Q}\eta)(t) = \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s} ds \quad (t \in I)$$

で定義する. この作用素の有界性について, Boyd の定理 ([3]) を用いることにより, 次の結果を導くことができる ([10, Proposition 2.2]).

命題 3.2. $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を準凹関数とする. このとき, 次の (i)–(iv) は互いに同値である:

- (i) $\mathcal{Q}$ の $M(\varphi: I)$ への制限は, $M(\varphi: I)$ からそれ自身への有界線形作用素である.
- (ii) $\mathcal{Q}$ の $M(\varphi: I)$ への制限は, $M(\varphi: I)$ から $M^*(\varphi: I)$ への有界線形作用素である.
- (iii) $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\varphi: I)$ への制限は, $\Lambda(\varphi: I)$ からそれ自身への有界線形作用素である.
- (iv) $p_\varphi > 0$.

特に, X が Ω 上の Banach 関数空間であれば, $p_X > 0$ であることと $\mathcal{Q}$ が $M(\overline{\varphi}_X: I)$ からそれ自身への有界作用素となることは同値である. 更に, $\mathcal{Q}$ の定義域 D が $M^*(\overline{\varphi}_X: I)$ に含まれ, 尚かつ $\mathcal{Q}$ が $M^*(\overline{\varphi}_X: I)$ からそれ自身への有界作用素になれば, $p_X > 0$ となることも命題 3.2 から導かれる.

この事実を用いて、例えば [9] では、不等式

$$C_X^{-1} \|f_\infty\|_{w-X} \leq \|Sf\|_{w-X} \leq C_X \|f_\infty\|_{w-X} \quad (3.2)$$

が成り立つとき、 $p_X > 0$ となることが示されている。その手順は次の通りである：

- (1) (3.2) が成り立つとき、 $w-X = M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$ となることを示す。
- (2) $w-X$ と $M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$ のノルムが同値であることから (3.2) が

$$C_X^{-1} \|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \leq \|Sf\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \leq C_X \|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \quad (3.3)$$

と書き換えられる。このことを用いて、 $\mathcal{Q}$ が $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への有界線形作用素であることを示す。このことと命題 3.2 から $p_X > 0$ を得る。

(3.3) から不等式 $\|\mathcal{Q}\eta\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : I)} \leq K \|\eta\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : I)}$ が導かれるという事実は、マルチンゲールの二次変分 Sf の扱いに慣れていれば、決して納得し難いというものではない。しかしながら、本稿の主定理 (定理 3.1) の証明には、もはや命題 3.2 は利用できない。というのは、(3.1) の 2 つの不等式から導かれる不等式は

$$\|Sf\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \leq C_X \|f_\infty\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)}, \quad \|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \leq C_X \|Sf\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)}$$

という形のものであって、残念ながら (3.3) の形の不等式が導かれなからである。一方、 $\mathcal{Q}$ の $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への作用素としての有界性が (3.3) から導かれたのと同様に、 $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への作用素としての有界性が、上記の第 2 の不等式から導かれる。では「 $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への作用素としての有界性から、 $p_X > 0$ を導くことができないか」という疑問が湧く。この疑問に対する肯定的な結果がえ得られたことが、難しかった定理 3.1 を得ることに繋がった。

命題 3.3. $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を準凹関数とする。このとき、次の (i)–(iv) は互いに同値である：

- (i) $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\varphi : I)$ へ制限は、 $\Lambda(\varphi : I)$ から $M^*(\varphi : I)$ への有界線形作用素である。
- (ii) $p_\varphi > 0$.

$\Lambda(\varphi : I) \hookrightarrow M(\varphi : I)$ であるから、命題 3.3 の (i) は命題 3.2 の (ii) より弱い条件である。結果的に命題 3.2 の中に、見かけ上、より弱い同値な条件が付け加えられたことになる。その意味で、命題 3.3 は命題 3.2 の改良になっている。

前述のように、 $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への有界作用素であることを示すことは可能であるから、 $\overline{\varphi}_X$ に対して命題 3.3 を適用することにより、(3.1) の 2 つの不等式から $p_X > 0$ を導かれることになる。

参考文献

- [1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators. Pure and Applied Mathematics, 129, Academic Press, Boston, 1988.
- [2] D. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.
- [3] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*. Canad. J. Math. **21** (1969), 1245–1254.
- [4] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.
- [5] M. Kikuchi, *A remark on Doob's inequality in Banach function spaces*, Math. J. Toyama Univ. **21** (1998), 101–109.
- [6] M. Kikuchi, *Characterization of Banach function spaces that preserve the Burkholder square-function inequality*, Illinois J. Math. **47** (2003), 867–882.
- [7] M. Kikuchi, *Uniform boundedness of conditional expectation operators on a Banach function space*, Math. Inequal. Appl. **16** (2013), 483–499.
- [8] M. Kikuchi, *On some martingale inequalities for mean oscillations in weak spaces*, Ric. Mat. **64** (2015), 137–165.
- [9] M. Kikuchi, *On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak spaces*, Collect. Math. **67** (2016), 461–483.
- [10] M. Kikuchi, *On martingale transform inequalities in certain quasi-Banach function spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. **12** (2019), 485–514.
- [11] H. König, Eigenvalue distribution of compact operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [12] E. M. Semenov, *Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions*, Sov. Math., Dokl. **5** (1964), 831–834.