

*On a theorem of Brauer on induced characters
of finite groups*

北大 理 奥山哲郎

G ; 有限群

$G \supseteq H$ に対し, $C(H)$; character ring of H .

$G \supseteq H \supseteq K$ に対し, $C(K)^H = \{\alpha^H \mid \alpha \in C(K)\} \subseteq C(H)$ と定義する。Brauer は、次の重要な定理を導いた。

定理 (Brauer [1]) .

$$\mathcal{E} \text{ を } G \text{ の基本部分群の全体とすると, } C(G) = \sum_{E \in \mathcal{E}} C(E)^G .$$

ここで、上の定理を p -ブロック (p は素数) 毎に考察してみる。

定理 1 .

B : p -ブロック, defect group D , $C_B(G)$: B に属する指標の整係数一次結合とすると, $C_B(G) \subseteq \sum_{E \in \mathcal{E}(D)} C(E)^G$, ここで, $\mathcal{E}(D)$ は $\mathcal{E}$ の元で, その p -Sylow 群が D のある共役に含まれるものの全体,

定理1は以下の定理3から系として得られる。

R : complete discrete valuation ring $\supset (\pi)$: max. ideal
 $(\pi) \ni p$, K : R の商体, $(\text{char } K = 0)$, K は考える群の分解体と仮定する。

補題2.

$H = P \times A$, P : p -群, A : p' -群, V : indecomposable R -free, $R[G]$ -加群, χ をその指標とする。 V a vertex of $D\alpha$ とし, $\exists \eta: D \times A \rightarrow K$ -指標があり, $\chi = \eta^H$ 。

定理3.

V : R -free, $R[G]$ -加群, $R[D]$ -projective (D は p -群)
 χ をその指標とすると, $\chi \in \sum_{E \in \mathcal{E}(D)} C(E)^G$ 。

B が defect group D をもつ p -ブロッツとすると, B に属する $R[G]$ -加群はすべて $R[D]$ -projective である (Th.54.1 [2]) から, 定理3から定理1が導かれる。

モジュラーな場合の Brauer の定理の変形が Dress によって与えられている。以下, F を標数 p の代数閉体とする。

$G \supseteq H$ に対し, $A(H)$ を整数環上の $F[H]$ の Green ring

$G \supseteq H \supseteq K$ に対し, $A(K)^H = \{ \alpha^H \mid \alpha \in A(K) \} \subseteq A(H)$ と

定義する。

定理 (Dress [3])

$\mathcal{E}_p$: G の部分群 E で $E/O_p(E)$ が p' -基本群となるもの全体の
 すると, $A(G) = \sum_{E \in \mathcal{E}_p} A(E)^G$

この定理について, 上と同様の考察をすすめることができる。

定理 4.

B : defect group D の p -ブロック, $A_B(G)$: B に属する $F[G]$ -
 加群の整数係数一次結合とすると, $A_B(G) \subseteq \sum_{E \in \mathcal{E}_p(D)} A(E)^G$, こ
 こで, $\mathcal{E}_p(D)$ は $\mathcal{E}_p$ の元 E で, $O_p(E)$ がある D の共役に含まれるものの
 全体。

補題 5.

$H = AP$ $P \triangleleft H$ p -群, A : 可解 p' -群, V : indecomp.
 $F[H]$ -mod. vertex $D \triangleleft H$ とすると, $\exists W: F[AD]$ -mod. $\mathbb{Z}$ -
 $V = W^H$ 。

定理 6.

V : $F[G]$ -加群, vertex D とすると, $V \in \sum_{E \in \mathcal{E}_p(D)} A(E)^G$ 。

Brauer の定理の考察のときと、同じようにして、定理 6 から定理 4 が導かれる。

参考文献

- [1] . Brauer . *Ann. of Math* (2) 57 (1953) 357-377.
- [2] . Dornhoff . "Group Representation Theory B" Marcel Dekker
- [3] . Dress . *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 44 (1975) 101-109.
- [4] . Feit . "Representations of Finite Groups" Yale Univ.