

Commutative Hypergroups associated with Group Actions (群作用に付随する可換ハイパー群)

奈良教育大学 河上 哲

Nara University of Education (Satoshi Kawakami)

[要約] ハイパー群の概念は、代数的な群概念を確率論的に拡張したものであり、数学の色々な所で昔から顕われているが、それを統一的に扱うようになつたのは、ごく最近のことである。本稿では、有限可換ハイパー群への有限アーベル群の群作用によって自然に定まる2つの可換ハイパー群の構成とその双対性について得られた結果を報告する。一方のハイパー群の構成には作用素環の手法を用い、他方のハイパー群の構成には表現論の手法を用いる。ここで得られた結果をひとつのモデルケースとして、将来、局所コンパクト可換ハイパー群への拡張を試みる。

- [目次]
- §1. 定義と準備
 - §2. 群作用と不動点ハイパー群
 - §3. 群作用に付随して定まるハイパー群の構成とその双対性
 - §4. ハイパー群の指数とエントロピー

§ 1. 定義と準備

定義 1 (Wildberger [3])

次の条件を満たす $K = (K, A(K))$ を有限符号付きハイパー群と呼ぶ。

$A(K)$; $\mathbb{C}$ 上の $*$ -環で、単位元 c_0 をもつ。

K は $A(K)$ の部分集合で、 $K = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$

(1) $c_0, c_1, \dots, c_n$ は、 $A(K)$ の線形空間としての基底

(2) $K^* = K$

(3) $c_i c_j = \sum_{k=0}^n n_{ij}^k c_k$ で

$$\textcircled{1} n_{ij}^k \in \mathbb{R} \text{ で } \sum_{k=0}^n n_{ij}^k = 1 \quad \textcircled{2} \begin{aligned} c_i = c_j^* &\Leftrightarrow n_{ij}^0 > 0 \\ c_i \neq c_j^* &\Leftrightarrow n_{ij}^0 = 0 \end{aligned}$$

このとき、 $w(c_i) = \frac{1}{n_{ij}^0}$ ($c_i = c_j^*$) を c_i のウェイトと呼び、

$w(K) = \sum_{i=0}^n w(c_i)$ を K のウェイトと呼び、重要な役割を果たす。

定義 2 ([3])

$K = (K, A(K))$ を有限符号付きハイパー群とする。

(1) 任意の i, j に対し、 $c_i c_j = c_j c_i$ のとき、 K を可換であるという。

(2) 任意の i, j, k に対し、その構造定数 n_{ij}^k が非負のとき、

K は、ハイパー群と呼ばれる。

定義3. ([3])

$K = (K, A(K))$ を有限符号付き可換ハイパー群とする。このとき、 K 上の複素数値関数 χ が、

$$C_i C_j = \sum_{k=0}^n m_{ij}^k C_k \quad \text{に対し、} \quad \chi(C_i) \chi(C_j) = \sum_{k=0}^n m_{ij}^k \chi(C_k)$$

を満すとき、 χ は K の指標と呼ばれる。 K の指標全体の集合を $\widehat{K} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ (但し、 $\chi_0 \equiv 1$) と表すと、 $\widehat{K}$ も有限符号付き可換ハイパー群となる。 $A(\widehat{K}) = \{\widehat{K}$ 上の複素数値関数全体 $\}$ である。更に、 $\widehat{\widehat{K}} \cong K$ という、双対性が成立している。

例 ([3])

有限群 G に対しては、いつでも自然にその共役類ハイパー群 $K(G)$ と指標ハイパー群 $K(\widehat{G})$ が定義される。

$$(1) K(G) = \{C_0, C_1, \dots, C_n\}$$

$C_0, C_1, \dots, C_n$ を群 G の共役類とし、

$$C_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{g \in C_i} \delta_g \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

とあくと、ディラック δ_g の $\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$ の演算で、 $K(G) = \{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ は、有限可換ハイパー群となる。このとき、 $w(C_i) = |C_i|$, $w(K(G)) = |G|$ となる。

$$(2) K(\widehat{G}) = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$$

群 G の既約表現の同値類の集合 (G の双対) $\widehat{G}$ を

$G = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ ($p_i \equiv 1$) とするとき、

$$\chi_j(g) = \chi(p_j(g)) = \frac{1}{\dim p_j} \text{Tr}(p_j(g)) \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

とかくと、これらの G の正規化された指標全体の集合 $K(G) = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ は G 上の類関数の積の演算で、有限可換ハイパー群となる。このとき、 $w(\chi_j) = (\dim p_j)^2$, $w(K(G)) = |G|$ となっている。

注意 1. $K(\widehat{G}) \cong \widehat{K(G)}$, $K(G) \cong \widehat{K(\widehat{G})}$ が成立している。

注意 2. 作用素環の立場で $K(G)$ (II) のケース) を観察すると、 G の正則表現 λ が生成する $*$ -環 $A(G) = \lambda(G)''$ からその中心 $Z(G) = Z(A(G)) = A(G) \cap A(G)'$ への自然な条件付き期待値 $E: A(G) \rightarrow Z(G)$ による $A(G)$ の自然な基底 $\{\lambda_g; g \in G\}$ の像として $K(G)$ が得られる。但し $E(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Ad}(g)(x)$ 。このときは、 $A(K(G)) = Z(G)$ である。この視点と発想が、§3 におけるハイパー群の構成法へと導びいていることを、ここで付記しておきたい。

§2. ハイパー群への群作用と不動点ハイパー群

G を有限群、 $K = (K, A(K))$ を有限可換ハイパー群とする。このとき、群 G のハイパー群 K への作用 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(K)$ は、群 G の $*$ -環 $A(K)$ への作用を誘導する。このとき、 $K = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ の各要素 c_i に対し、

$$d_j = \bar{c}_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_g(c_i)$$

といて、 $K^\alpha = \{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ ($d_0 = c_0$) とおくと、 K^α は、 $A(K^\alpha) = A(K)^\alpha$ (不動点環) を満たす有限可換ハイパー群となる。 K の双対ハイパー群 $\widehat{K} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ に対しては群 G の $\widehat{K}$ への作用 $\widehat{\alpha}$ が、 $\widehat{\alpha}_g(\chi_j)(c_i) = \chi_j(\alpha_g^{-1}(c_i))$ により、定義され、 $\widehat{K}$ の不動点ハイパー群 $\widehat{K}^{\widehat{\alpha}}$ も自然に得られる。このとき、 $\widehat{K}^{\widehat{\alpha}} \cong K^\alpha$ 、 $K^\alpha \cong \widehat{K}^{\widehat{\alpha}}$ も成立している。

§3. 群作用に付随して定まるハイパー群の構成とその双対性
本節では、群 G を有限アーベル群とし、 $H = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ を有限可換ハイパー群とする。群 G のハイパー群 H への作用 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ が与えられたとする。このとき、作用 α は、 $\ast$ -環 $A(H)$ への作用 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A(H))$ と、 H の双対 $\widehat{H}$ への作用 $\widehat{\alpha}: G \rightarrow \text{Aut}(\widehat{H})$ を誘導する。 $\widehat{H}$ を $\widehat{H} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ とすると、 $A(H)$ の中に互いに直交する射影 $e_0, e_1, \dots, e_n$ が $c_i e_j = \alpha_j(c_i) e_j$ の関係式を満たす形で一意的に定まる。このとき、 $\widehat{\alpha}_g(\chi_j) = \chi_j \Leftrightarrow \alpha_g(e_j) = e_j$ などが成立している。 $e_0, e_1, \dots, e_n$ を用いたハイパー群 H の調和解析(フーリエ変換)は、重要な役割を果たすが、本稿では省略する。

(1) $K(H, G, \alpha)$ の構成

有限アベル群 G の可換 $\ast$ -環 $A(H)$ の作用 α により、その結合積 $A(H) \rtimes_{\alpha} G = \{ \sum_{j \in G} a_j \lambda_j ; a_j \in A(H) \}$ が自然に定義される。そこで、 $A(H) \rtimes_{\alpha} G$ の各要素 x に対し、 $F(x)$ を、

$$F(x) = \frac{1}{w(H)} \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^n \sum_{j \in G} w(c_i) c_i \lambda_j x \lambda_j^* c_i^*$$

とおくと、 F は $A(H) \rtimes_{\alpha} G$ からその中心 $Z(A(H) \rtimes_{\alpha} G)$ への作用素値ウェイトであり、 $A(H)$ の単位元 c_0 の F による像 $F(c_0)$ は、

$$F(c_0) = \sum_{j=0}^n \langle x_j, x_j \rangle e_j = \sum_{j=0}^n w(x_j)^{-1} e_j \equiv a > 0$$

で与えられる。そこで、 $E(x) = F(\bar{a}^{-\frac{1}{2}} x \bar{a}^{-\frac{1}{2}}) = F(\bar{a}^{-1} x) = \bar{a}^{-1} F(x)$

とおくと、 $A(H) \rtimes_{\alpha} G$ から $Z(A(H) \rtimes_{\alpha} G)$ への自然な条件付き期待値 E が定まる。そこで、 $A(H) \rtimes_{\alpha} G$ の基底 $\{ c_i \lambda_j ;$

$i=0, 1, \dots, n, j \in G \}$ のこの期待値 E による像 $E(c_i \lambda_j)$ の集合

を $K(H, G, \alpha)$ と表す。ハイパー群 H の調和解析の結果を用いると、 $E(c_i \lambda_j)$ の実態が、

$$E(c_i \lambda_j) = \bar{c}_i e(j) \lambda_j$$

であることが判る。但し、 $\bar{c}_i = \frac{1}{|G|} \sum_{j \in G} \chi_j(c_i) \in H^{\times}$ で $e(j) = \sum_{j \in J(j)} e_j$

$J(j) = \{ j ; \chi_j(x_j) = x_j \} = \{ j ; \chi_j(e_j) = e_j \}$ である。 H が有

限アベル群のときは、 $K(H, G, \alpha)$ は、 H の G による半直積群の共役類ハイパー群 $K(H \rtimes G)$ に一致している。

(2) $K(\hat{H}, \hat{G}, \alpha)$ の構成

有限アーベル群 G の H への作用 α に対する $\hat{H} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ への作用 α による軌道 (orbit) の集合を $O_0, O_1, \dots, O_\ell$ とする。つまり、

$$O_j = \{\hat{\alpha}_g(x) ; g \in G\} \quad (\text{ある } x \in \hat{H} \text{ について})。このとき、} x \in O_j \text{ に対し、}$$

$$G_j = \{g \in G ; \hat{\alpha}_g(x) = x\} \text{ とおくと、} G_j \text{ は } O_j \text{ のみによ}$$

$$\text{って定まる } G \text{ の部分群で、更に、} B(j) = \hat{G}/G_j^\perp \cong \hat{G}_j \text{ とおく。}$$

$$\text{更に、} \tau_j = \frac{1}{|G_j^\perp|} \sum_{\tau \in G_j^\perp} \tau \quad (G_j^\perp \text{ は } G_j \text{ の零化群}) \text{ とおく。この}$$

$$\text{とき、} \hat{H}^{\hat{\alpha}} = \{p_0, p_1, \dots, p_\ell\} \quad p_j = \frac{1}{|O_j|} \sum_{x \in O_j} x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \hat{\alpha}_g(x) \quad (x \in O_j)$$

であることを注意して、

$$K(\hat{H}, \hat{G}, \alpha) = \{p_j \otimes \tau_j ; j=0, 1, \dots, \ell, \tau \in B(j)\}$$

とおく。この構成法は、半直積群の誘導表現と既約表現と念

頭においた方法である。実際、 H が有限アーベル群の時には、

$K(\hat{H}, \hat{G}, \alpha)$ は、 H の G による半直積群 $H \rtimes_\alpha G$ の指標ハイパー群 $K(\widehat{H \rtimes_\alpha G})$ に一致している。

定義：regular な作用

$$x_i, x_j \in \hat{H} \quad \text{が} \quad x_i x_j = \sum_{k=0}^n m_{ij}^* x_k \quad \text{となっているとき、}$$

$$\text{もし、} \hat{\alpha}_g(x_i) = x_i, \hat{\alpha}_g(x_j) = x_j \quad \text{で} \quad m_{ij}^* \neq 0 \quad \text{であれば、}$$

$$\hat{\alpha}_g(x_k) = x_k \quad \text{が任意の} g \in G \quad \text{で成立している時、我々は、作}$$

用 $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ を "regular" と呼ぶことにする。

定理 (河上)

有限アーベル群 G の有限可換ハイパー群 H への作用 α が *regular* のとき、次が成立する。

- (1) $K(H, G, \alpha)$ は有限可換ハイパー群である。
- (2) $K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha})$ は有限可換ハイパー群である。
- (3) $K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha}) \cong \widehat{K(H, G, \alpha)}$

§ 4. ハイパー群の指数とエントロピー

$K = (K, A(K))$ を有限可換ハイパー群とし、

$$K = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}, \quad \hat{K} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ とする。}$$

このとき、 x -環 $A(K)$ の互いに直交する *minimal* な射影

$e_0, e_1, \dots, e_n$ が、 $c_i c_j = x_j (c_i) e_j$ により定まる。今、

$A(K)$ 上の *state* φ が、 $\varphi(e_j) = \frac{w(x_j)}{w(K)}$ ($j=0, 1, \dots, n$) を満たし

ているとき、 φ を K の標準 *state* と呼ぶことにする。このとき、

K の指数 $\text{index}(K)$ と K のエントロピー $H_\varphi(K)$ が

$$\begin{cases} \text{index}(K) = \text{index } \varphi = \sum_{j=0}^n \frac{w(K)}{w(x_j)} e_j \\ H_\varphi(K) = H_\varphi(A(K)) = \sum_{j=0}^n - \frac{w(x_j)}{w(K)} \log \frac{w(x_j)}{w(K)} \end{cases}$$

が定義される。

今、2つの有限可換ハイパー群 $K = (K, A(K))$ と $K_0 = (K_0, A(K_0))$

に対し、 $A(K_0)$ は、 $A(K)$ の商 x -環 (単位元は共有) であり、

条件付き期待値 $E: A(K) \rightarrow A(K_0)$ により、 $K_0 = E(K)$ であ

るとする。このとき、次が成立する。

定理 $K = (K, A(K))$, $K_0 = (K_0, A(K_0))$, $E: A(K) \rightarrow A(K_0)$

は、上述のものとする。

(1) K の標準 state φ の K_0 への制限 φ_0 は、 K_0 の標準 state である。

(2) $\text{index}(K) = (\text{index } E)(\text{index}(K_0))$

(3) $H_\varphi(K) = H_\varphi(K|K_0) + H_{\varphi_0}(K_0)$

注意 K が必ずしも可換でない場合でも、多くの典型的なケースでは、上の定理が成立している。

参考文献

- [1] Bloom W.R. & Heyer, H.; Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups, 1995, Walter de Gruyter, de Gruyter Studies in Mathematics 20.
- [2] Kawakami, S.; Crossed Products of Commutative Finite Hypergroups, 1999, Bull. Nara Univ. Educ., Vol 48, No 2.
and Ito W.
- [3] Wildberger, N.J.; Finite commutative hypergroups and applications from group theory to conformal field theory. Applications of hypergroups and related measure algebras, (Joint Summer Research Conference, Seattle, 1993), American Mathematical Society, Providence, 1994.