

ステファン問題の差分解法

京大工 野木達夫

§1 序

ステファン問題の古典的な解の存在と一意性については数多くの結果が知られている。その殆んどものは、考えているステファン問題を同等な *Volterra* 型積分方程式の問題に帰着させて解決している。その際、解の構成は積分方程式に対する逐次近似法を用いて行われるので、近似解を求める方法も与えていると言える。しかしこの方法が全領域での時間的変化を数値計算するのに都合よい方法とは言えない。

それに代るものとして差分解法が開発されてきた。原形は *Douglas and Gallie* [1] にみられる。ここでは、ステファン条件を同等な積分恒等式に置きかえたもの (*Evans* [2]) を使用することがポイントになっている。その意味で完全に局所化された近似式を用いたことになっている。しかもこの置きかえは *Green* の公式によっているため、壁側の条件がノイマン型に限られる。使い方がわかることは、更に断熱条件は除かれてしまう。

ここでは、ディリクレ条件や、断熱条件の場合にも適用可能な完全に局所化された差分解法を提案する。この方法の新しいポイントは、ステファン条件の中に、全く計算のための

人工的な熱流項を導入することにある。

§2. 取り扱う問題

我々は次の問題を考える： 方程式及び境界条件

$$(2.1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < y(t), \quad t > 0 \quad (a \text{ は定数})$$

$$(2.2) \quad u(0, t) = f(t), \quad f(t) \leq 0, \quad t > 0$$

$$(2.3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \varphi(l) = 0, \quad l > 0$$

$$(2.4) \quad u(y(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = l$$

$$(2.5) \quad k \frac{\partial u}{\partial x}(y(t), t) = \dot{y}(t), \quad t > 0 \quad (k \text{ は定数})$$

(ステファン条件)

とみなす $u(x, t)$ と自由境界 $x = y(t)$ を求めること。ここでは氷が凍ってゆくモデルを取り扱ったということから、物理的に自然な条件 $f(t) \leq 0$, $\varphi(x) \leq 0$ が付けられている。

この問題の解の存在と一意性、並に関数 $x = y(t)$ の単調増大性の証明は、Friedman [3] が与えている。この証明で欠かせない制約は $l > 0$ となることである。我々の差分解法でもこの条件は欠かせない。

§3. 差分解法

上半平面 $-\infty < x < \infty, t > 0$ を直線

$$x = x_j = jh \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$t = t_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

でできる格子で被うものとする。 h が空間方向の格子間隔で位置に関して一様とする。一方時間ステップ

$$k_n = t_n - t_{n-1}$$

は n の変数とする。いま h として

$$\frac{l}{h} = J \text{ (整数)}$$

となるものにとり、

$$x = y_n \equiv x_{J+n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が自由境界となるように $\{k_n\}$ が定められるものとする。

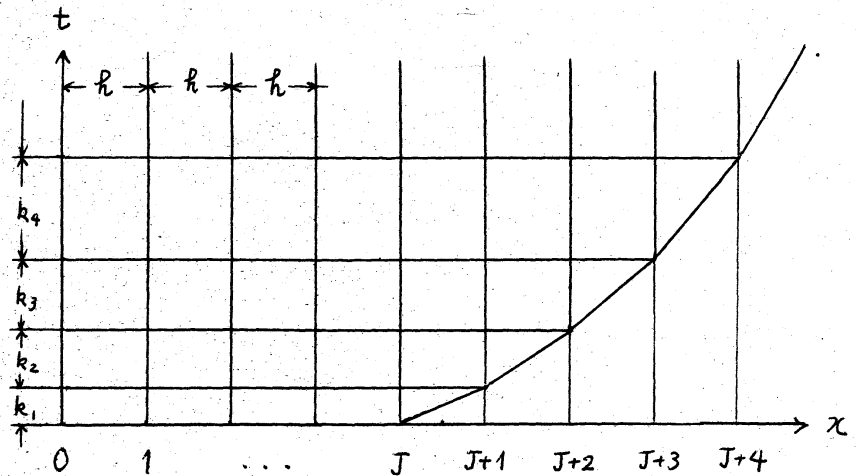


図-1

問題 (2.1) ~ (2.5) をこの差分領域上で次の問題で置き換え

3: 差分方程式系

$$(3.1) \quad \alpha^2 u_{x\bar{x}}(x_j, t_n) - u_{\bar{t}}(x_j, t_n) = 0, \quad j=1, 2, \dots, J+n, n=1, 2, \dots$$

$$(3.2) \quad u(0, t_n) = f(t_n), \quad n=1, 2, \dots$$

$$(3.3) \quad u(x_j, 0) = \varphi(x_j), \quad j=0, 1, 2, \dots, J$$

$$(3.4) \quad u(y_n, t_n) = 0, \quad y_n = x_{J+n}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$(3.5) \quad K u(t_n) + \frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n = \frac{h}{k_n}, \quad u(t_n) = u_{\bar{x}}(y_n, t_n), n=1, 2, \dots$$

をみたす $\{u(x_j, t_n)\}$ 及び $\{k_n\}$ を求めること。ただし

$$u_{x\bar{x}}(x_j, t_n) = \frac{1}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)],$$

$$u_{\bar{t}}(x_j, t_n) = \frac{1}{k_n} [u(x_j, t_n) - u(x_j, t_{n-1})], \quad (*)$$

そして β は後で定められる適当に大きな正定数である。

さてファイン条件 (2.5) に代る式 (3.5) において 項 $\frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n$ が人工的に附加した熱流項である。 $\frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n$ をついでない式か (2.5) 式を形式的に近似していることは明白であるが、(3.5) 式でも (2.5) 式を形式的に近似している。実際 (3.5) 式に k_n

*) 後で、前進差分商 $u_{x_j}(x_j, t_n) = \frac{1}{h} [u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)]$, 後退差分商

$u_{\bar{x}}(x_j, t_n) = \frac{1}{h} [u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)]$ などの記号も用いる。

について解けば

$$(3.6) \quad k_n = \frac{\sqrt{h}}{2\beta} \left[-\kappa v(t_n) + \sqrt{\kappa^2 v(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}} \right] \quad (*)$$

となり, 二れより

$$(3.6)' \quad \frac{h}{k_n} = \frac{1}{2} \left(\kappa v(t_n) + \sqrt{\kappa^2 v(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}} \right).$$

そこで $h \rightarrow 0$ とすれば,

$$\lim \frac{h}{k_n} = \lim \kappa v(t_n)$$

左辺が $\dot{y}(t)$ に, 右辺が $\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(y(t), t)$ に対応すべきものであり, 二れは (3.5) 式が (2.5) 式を形式的に近似してゐることを意味する.

系 (3.1) ~ (3.5) を時間ステップを進めて解いていくための

$t = t_n$ で次のような Iteration scheme を採用する:

$$(3.7) \quad a^2 u_{x\bar{x}}^{(s)}(x_j, t_n) - \frac{u^{(s)}(x_j, t_n) - u(x_j, t_{n-1})}{k_n^{(s)}} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, J+n-1$$

$$(3.8) \quad u^{(s)}(0, t_n) = f(t_n)$$

$$(3.9) \quad u^{(s)}(y_n, t_n) = 0$$

*) 条件 $f, \varphi \leq 0$ より $u(x_j, t_n) \leq 0$ が従ふ (最大値原理), 条件 (3.9) と

あわせて, $v(t_n) \geq 0$ である. 従つて (3.6) 式より $k_n > 0$ が成り立つ.

$$(3.10) \quad k_n^{(s+1)} = \frac{\sqrt{h}}{2\beta} \left[-K v^{(s)}(t_n) + \sqrt{K^2 v^{(s)}(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}} \right]$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

$$(3.11) \quad k_n^{(1)} = k_{n-1}$$

次のことが証明される:

定理 $f(t) \in C^1 (0 < t < T)$, $\varphi(x) \in C^2 (0 < x < l)$, $\varphi(l) = 0$ とする. このとき,

i) 各ステップで $t = t_n$ で Iteration scheme ($s = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \infty$) は収束し 極限值 $\{u(x_j, t_n)\}$, k_n は方程式 (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) をみたす.

ii) 系 (3.1) ~ (3.5) の解 は, $h \rightarrow 0$ のとき もとの系 (2.1) ~ (2.5) の解に一様収束する. (*)

このことを証明するために次節で, 差分方程式 (3.1) に対するグリーン関数及び基本公式を準備する.

§4 基本公式及びグリーン関数の評価

差分方程式 (3.1) の右半平面 ($j = 0, 1, 2, \dots$) における第2種

(*) 境界についても $\{y_n, t_n\}$ を結んでできる折線関数 $y_n(t)$ が $h_n \rightarrow 0$ とともに もとの問題の自由境界 $y(t)$ に一様収束することを意味する.

境界値問題のグリーン関数 $G(x_r, \xi_j; t_n, \tau_p)$ は式

$$(4.1)_1 \quad G(x_r, \xi_j, t_n, \tau_p) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=p+1}^n \Lambda_j^{-1} [e^{-i(r-j)\omega} + e^{-i(r+j-1)\omega}] d\omega & (n > p) \\ \frac{1}{h} \delta_{r,j} \quad , \quad r, j > 0 & (n = p) \end{cases} \quad (*)$$

$$(4.1)_2 \quad \Lambda_j = 1 + 4\lambda_j \sin^2 \frac{\omega}{2}, \quad \lambda_j = \frac{a^2 k_j}{h^2}$$

によつて定義する。これは、変数 (x_r, t_n) の関数として方程式及び境界条件

$$a^2 G_{x\bar{x}} - G_{\bar{t}} = 0, \quad G_x(0, t_n) = 0$$

を満足し、 (ξ_j, τ_p) の関数として

$$a^2 G_{\xi\bar{\xi}} + G_{\tau} = 0, \quad G_{\xi}(0, t_n) = 0$$

を満足してゐる。

補助定理 1. (基本公式) 差分方程式系 (3.1) ~ (3.4) の解に對

して関係式

$$(4.2) \quad U(t_n) = \left[1 + a^2 k_n G_{\xi}(y_n, \eta_n; t_n, \tau_{n-1}) \right]^{-1} \times \quad (**)$$

$$\times \left[(G(0) - f(0)) G(y_n, 0; t_n, 0) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^J h G(y_n, \xi_j; t_n, 0) \varphi_{\bar{\xi}}(\xi_j) - \right.$$

$$*) \quad \delta_{r,j} = 1 \quad (r=j), \quad = 0 \quad (r \neq j), \quad **) \quad \eta_n = \xi_{J+n},$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=1}^n k_p G(y_n, 0; t_n, \tau_{p-1}) f_{\bar{z}}(\tau_p) \\
& - a^2 \sum_{p=1}^{n-1} k_p G_{\bar{z}}(y_n, \tau_p; t_n, \tau_{p-1}) v(\tau_p) \Big],
\end{aligned}$$

持に

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad v(t_n) = & \left[1 + a^2 k_n G_{\bar{z}}(y_n, \tau_n; t_n, \tau_{n-1}) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\sum_{j=1}^{J_{n-1}} h G(y_n, \bar{z}_j; t_n, \tau_{n-1}) u_{\bar{z}}(\bar{z}_j, \tau_{n-1}) \right. \\
& \left. - k_n G(y_n, 0; t_n, \tau_{n-1}) f_{\bar{z}}(\tau_n) \right]
\end{aligned}$$

が成り立つ.

これらの式を導くには, 互いに共役な方程式 $a^2 g_{\bar{z}\bar{z}} - g_{\bar{z}} = 0$ と $a^2 \psi_{\bar{z}\bar{z}} + \psi_{\bar{z}} = 0$ の解がみえ, いわゆる, Riemann の公式を導き, そこで $g(\bar{z}_j, \tau_p) = u(\bar{z}_j, \tau_p)$, $\psi(\bar{z}_j, \tau_p) = g(x_r, \bar{z}_j, t_n, \tau_p)$ ($j > 0$ に対する第 1 種境界値問題のグリーン関数) とおけば, $u(x_r, t_n)$ の表示を得, 二れより $v(t_n) = u_{\bar{z}}(y_n, t_n)$ の表示 (4.2) を得る.

補助定理 2 十分小さな h に対して

$$(4.4) \quad 1 + a^2 G_{\bar{z}}(y_n, \tau_n; t_n, \tau_{n-1}) > \frac{1}{4}$$

補助定理 3

$$(4.5) \quad |G(y_n, 0; t_n, \tau_{p-1})| < \frac{1}{a\sqrt{t_n - \tau_{p-1}}}$$

補助定理 4 $p \leq n-1$ に対して

$$(4.6) \quad \frac{1}{\pi h^2} \int_{-n}^n \prod_{g=p}^n \Lambda_g^{-1} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega < \frac{h}{2\sqrt{2} a^3 (t_n - \tau_{p+1} - \hat{k})^{\frac{3}{2}}}, \quad \hat{k} = \max_{g=p, \dots, n} k_g$$

特に $p = n-1$ に対して

$$(4.7) \quad = \frac{h}{4a^3 \sqrt{k_{n-1}} \sqrt{k_n} (\sqrt{k_{n-1}} + \sqrt{k_n})}$$

(4.6) 式の証明には, $\prod_{g=p}^n \Lambda_g > \left[1 + \frac{2a^2}{h^2} (t_n - \tau_{p+1} - \hat{k}) \sin^2 \frac{\omega}{2} \right]^2$ とおき
これを用いる. (4.6) 式を用いると次の (4.8) 式が成り立つ.

補助定理 5

$$(4.8) \quad \left| \frac{1}{2\pi h^2} \int_{-n}^n \prod_{g=p}^n \Lambda_g^{-1} \sin \omega \sin K\omega d\omega \right| < \frac{1+2\sqrt{2}}{2a} \cdot \frac{1}{Kh \sqrt{t_n - \tau_{p+1} - \hat{k}}} + \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{\hat{k}}{Kh (t_n - \tau_{p+1} - \hat{k})^{\frac{3}{2}}}$$

或いは,

$$(4.9) \quad < \frac{3}{2a} \frac{\sqrt{t_n - \tau_{p+1}}}{Kh^2} \cdot V_h$$

ここで V_h は $\frac{h}{k_p}$ ($p=1, 2, \dots, n$) の上界とする:

$$(4.10) \quad \frac{h}{k_p} < V_h \quad (p=1, 2, \dots, n)$$

この証明には, 部分積分を用いる,

$$\left| \frac{d}{d\omega} \prod_{g=p}^n \Lambda_g^{-1} \sin \omega \right| < \left[1 + 8 \sum_{g=p}^n \lambda_g \sin^2 \frac{\omega}{2} \right] \prod_{g=p}^n \Lambda_g^{-1}$$

或いは

$$< 2(n-p+\frac{3}{2}) \prod_{j=p}^n \Lambda_j^{-1}$$

と事実を用いる. (*)

補助定理 6

$$(4.11) \quad |G_3(y_n, \eta_p; t_n, z_{p-1})|$$

$$< \left[\frac{2+\pi}{2\sqrt{2}a^3} V_h + \frac{1+2\sqrt{2}}{2a} \cdot \frac{1}{y_n + \eta_p} \right] \frac{1}{\sqrt{t_n - z_{p-1} - \hat{k}}} + \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{\hat{k}}{(y_n + \eta_p)(t_n - z_{p-1} - \hat{k})^{\frac{3}{2}}}$$

或いは

$$(4.12) \quad < \frac{2+\pi}{2\sqrt{2}a^3} \frac{V_h}{\sqrt{t_n - z_{p-1} - \hat{k}}} + \frac{3}{2a} \frac{\sqrt{t_n - z_{p-1}}}{(y_n + \eta_p) \hat{k}} V_h$$

証明には不等式

$$\begin{aligned} |G_3(y_n, \eta_p; t_n, z_{p-1})| &= \frac{1}{2\pi h^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=p}^n \Lambda_j^{-1} [-4 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin(J+p)\omega \sin(J+n)\omega + \sin \omega \sin(\pi-p)\omega \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega \sin(2J+n+p)\omega] d\omega \right| \\ &< \frac{2+(n-p)\pi}{\pi h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=p}^n \Lambda_j^{-1} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega + \left| \frac{1}{2\pi h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=p}^n \Lambda_j^{-1} \sin \omega \sin(2J+n+p)\omega d\omega \right| \end{aligned}$$

の右辺に補助定理 4, 5 を適用すればよい.

補助定理 7 $k_1 \geq k_2$ とする. 十分小さな h に対して

$$(4.13) \quad \left| \frac{1}{2\pi h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} \sin \omega \sin K\omega d\omega \right| < \frac{\pi}{4a^3} \cdot \frac{Kh}{k_1 \sqrt{k_2}}, \quad \text{或いは}$$

$$(4.14) \quad < \frac{Kh}{4a^3 k_1^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{Kh}{a\sqrt{k_1}}} + \left(\frac{\pi^3}{6a^3} + \frac{\pi}{3a^3} \right) \cdot \frac{h}{k_1 \sqrt{k_2}} \quad (Kh > 3a\sqrt{k_1} \text{ に対して})$$

$$(*) \quad (n-p+1)h < V_h(t_n - z_{p-1}) \quad ((4.10) \text{ より})$$

(4.13) 式は (4.7) 式を用いれば直ちに導かれる. (4.14) 式導くには, 不等式

$$\begin{aligned} \text{左辺} &< \left| \frac{1}{2nh^2} \int_{-n}^n \frac{\omega \sin K\omega}{(1+\lambda_1\omega^2)(1+\lambda_2\omega^2)} d\omega \right| + \frac{1}{nh^2} \int_0^n |\omega - \sin \omega| \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{nh^2} \int_0^n \left| \omega \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} - \frac{\omega}{(1+\lambda_1\omega^2)(1+\lambda_2\omega^2)} \right| d\omega \end{aligned}$$

の右辺各項を評価すればよい. このとき k の関数 $\frac{Kh}{k^2} e^{-\frac{Kh}{\alpha k}}$ が $Kh > 3\alpha\sqrt{k}$ で単調増加であることを用いる.

§5 Iteration scheme の収束性

定理の 1) を証明しよう. そのためには,

$$(5.1) \quad |v^{(s)}(t_n) - v^{(s-1)}(t_n)| < \delta |v^{(s-1)}(t_n) - v^{(s-2)}(t_n)| \quad (s=3, 4, \dots)$$

となる正数 $\delta < 1$ の存在が証明できればよい. 実際このとき $v^{(s)}(t_n)$ は $s \rightarrow \infty$ のとき収束し, 従って (3.10) より $k_n^{(s)}$ もある極限 k_n に収束する. 一方列 $\{u^{(s)}(x_j, t_n)\}_{s=1, 2, \dots}$ は一様に有界である (最大値原理) から部分列 $\{u^{(s_j)}(x_j, t_n)\}$ が極限 $u(x_j, t_n)$ に収束する. この極限值の関数 $u(x_j, t_n)$ ($j=0, 1, \dots, J+n$) が方程式 (3.1) 及び境界条件 (3.2) (3.4) を満たすことは明らかである. この 2 点境界値問題の解は一意的であるから, 全列 $\{u^{(s)}(x_j, t_n)\}_{s=1, 2, \dots}$

(*) (3.1) に現れる k_n として勿論, 上に得た極限值 k_n を用いる.

($j=0, 1, 2, \dots, J+n$) が収束する.

そこで (5.1) を証明しよう. 方程式 (3.7) の解に基本公式 (4.3) を適用すれば

$$(5.2) \quad \begin{aligned} v^{(s)}(t_n) = & \left[1 + a^2 k_n^{(s)} G_3(y_n, \tau_n; t_n + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) \right]^{-1} x_0 \\ & \times \left[\sum_{j=1}^{J+n-1} h G(y_n, \xi_j; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) u_{\bar{3}}(\xi_j, t_{n-1}) \right. \\ & \left. - k_n^{(s)} G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) f_{\bar{2}}(\tau_n) \right] \end{aligned}$$

補助定理 2, 3 と上式右辺の $\sum$ の部分がある初期値問題の解 $u_{\bar{3}}$ であることと最大値原理を用いると

$$|v^{(s)}(t_n)| < 4 \left(\tilde{M} + \frac{M_1}{a} \sqrt{k_n^{(s)}} \right)$$

ただし, $\tilde{M} \in |u_{\bar{3}}(x_j, t_{n-1})|$ の上界, $M_1 \in |\dot{f}(t)|$ の上界とし

た. (3.10) より

$$(5.3) \quad k_n^{(s)} < \frac{h^{\frac{3}{7}}}{\sqrt{\beta}}$$

であるから十分小さな h に対し

$$(5.4) \quad |v^{(s)}(t_n)| < 4\tilde{M} + 1 = M \quad (s=1, 2, \dots),$$

同時に (3.6)' より

$$(5.5) \quad \frac{h}{k_n^{(s)}} < 2KM$$

を得る. 次に, 記号 $D(\cdot(k_n^{(s)})) = \cdot(k_n^{(s)}) - \cdot(k_n^{(s-1)})$ を用いると

$$\begin{aligned}
 |v^{(s)} - v^{(s-1)}| &< |D(\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s)}))| \cdot |\Gamma_2(k_n^{(s)})| + |\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s-1)})| \cdot \left[\left| \sum_{j=1}^{J_{n-1}} h D(G(y_n, \xi_j; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1})) \cdot u_{\bar{z}}(\xi_j, \tau_{n-1}) \right| \right. \\
 (5.6) \quad &\quad \left. + |G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) D(f(t_{n-1} + k_n^{(s)}))| + k_n^{(s-1)} |f_{\bar{z}}(\tau_{n-1})| \cdot |D(G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}))| \right] \\
 &= z.
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_1(k_n^{(s)}) = 1 + a^2 k_n^{(s)} G_{\bar{z}}(y_n, \xi_n; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1})$$

$$\Gamma_2(k_n^{(s)}) = \sum_{j=1}^{J_{n-1}} h G(y_n, \xi_j; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) u_{\bar{z}}(\xi_j, \tau_{n-1}) - k_n^{(s)} G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) f_{\bar{z}}(\tau_{n-1})$$

容易にわかることは

$$|\Gamma_2(k_n^{(s)})| < 2\tilde{M}, \quad |\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s)})| < 4 \quad (\text{補助定理2})$$

(5.7)

$$|G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) D(f(t_{n-1} + k_n^{(s)}))| < \frac{\sqrt{2KM} M_1 |D(k_n^{(s)})|}{a \sqrt{h}} \quad (\text{補助定理3})$$

更に $\bar{h} \in k_n^{(s)}, k_n^{(s-1)}$ のある中間値として

$$\begin{aligned}
 |D(\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s)}))| &< 16 \left| a^2 G_{\bar{z}}(y_n, \eta_n; t_{n-1} + \bar{h}, \tau_{n-1}) + a^2 \bar{h} \frac{dG_{\bar{z}}}{dh}(y_n, \eta_n; t_{n-1} + \bar{h}, \tau_{n-1}) \right| |D(k_n^{(s)})| \\
 (5.8) \quad &< 4 \left[\frac{\sqrt{2}(KM)^{\frac{3}{2}}}{a} + \frac{5a}{2} \right] \frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}}
 \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{j=1}^{J_{n-1}} h D(G(y_n, \xi_j; t_{n-1} + k_n^{(s)}, \tau_{n-1})) \cdot u_{\bar{z}}(\xi_j, \tau_{n-1}) \right| \\
 &\leq a^2 |D(k_n^{(s)})| \left| \sum_{j=1}^{J_{n-1}} h \Phi_{\bar{z}}(\xi_j) u_{\bar{z}}(\xi_j, \tau_{n-1}) \right|, \quad \Phi_{\bar{z}}(\xi_j) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_{\bar{z}}^{(s)} \Lambda_{\bar{z}}^{(s-1)} [e^{-i(J_{n-1}-j)\omega} + e^{-i(J_{n-1}+j)\omega}] d\omega \\
 &\leq a^2 |D(k_n^{(s)})| \left[\tilde{M} (|\Phi_{\bar{z}}(\xi_{J_{n-1}})| + |\Phi_{\bar{z}}(0)|) + \frac{\bar{M}}{a^2} \sum_{j=0}^{J_{n-1}-2} h |\Phi_{\bar{z}}(\xi_j)| \right], \quad |u_{x\bar{x}}(x_j, t_{n-1})| < \frac{\bar{M}}{a^2}
 \end{aligned}$$

すなわち、 $\Phi_{\bar{z}}(\xi_j)$ の評価に、(4.7), (4.13), (4.14) を用いれば

$$(5.9) \quad < \frac{C_0}{\sqrt{h}} |D(k_n^{(s)})|, \quad (C \text{ は } \tilde{M}, M, \bar{M} \text{ による関係した定数})$$

最後に、再び (4.7) を用いて

$$(5.10) \quad |k_n^{(s-1)} f_z(z_n) D(G(y_n, 0; t_{n-1} + k_n^{(s)}, z_{n-1}))| < \frac{\sqrt{2KM} \cdot M_1}{a} \frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}}$$

(5.6) — (5.10) から

$$|v^{(s)} - v^{(s-1)}| < C_1 \frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}}$$

一方 (3.10) から

$$|D(k_n^{(s)})| < \frac{\kappa}{\beta} \sqrt{h} |v^{(s)} - v^{(s-2)}|$$

従って、

$$(5.11) \quad |v^{(s)} - v^{(s-1)}| < \frac{\kappa C_1}{\beta} |v^{(s)} - v^{(s-2)}|$$

β を十分大きくとれば (5.1) を満たす δ がとれる。

§6 差分解の収束性

いま、

$$(6.1) \quad |f(t)|, |\varphi(x)| < M_0, \quad |\dot{f}(t)|, |\dot{\varphi}(x)| < M_1, \quad |\ddot{\varphi}(x)| < M_2$$

を仮定する。系 (3.1) ~ (3.4) の解 u に対して最大値原理を用いると

$$(6.2) \quad |u(x_j, t_n)| < M_0, \quad j=0, 1, 2, \dots, J+n, \quad n=1, 2, \dots$$

よって

$$(6.3) \quad |v(t_n)| < M, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad t_n < \sigma$$

が証明できたところから、 u_F のみたすべき差分方程式系に最大値原理を用いて

$$(6.4) \quad |u_F(x_j, t_n)| < \bar{M}, \quad |u_{x\bar{x}}(x_j, t_n)| < \frac{\bar{M}}{a^2}, \quad j=1, 2, \dots, J+n-1, \quad n=1, 2, \dots, \quad t_n < \sigma$$

$$\bar{M} = \max \{M_1, a^2 M_2, 2KM^2\}$$

を得,

$$(6.5) \quad |u_x(x_j, t_n)| < M + \frac{\bar{M}}{a^2} [l + 2KM\sigma] = \tilde{M}, \quad t_n < \sigma$$

以上のアポリアリ評価から $0 < t_n < \sigma$ での収束性が示される:

3) $h_n \rightarrow 0$ を考へる. (5.3) から $kn_n \rightarrow 0$. $y_\alpha(t)$ と自由境界 (y_n, t_n)

($n=0, 1, 2, \dots$) を結んでできる折線とする. (6.3) より $\{y_\alpha(t)\}$ は

一様に有界, 同程度連続 (一様リプシッツ条件を満たす) な関数族となり, ^{有界な} リプシッツ連続な関数 $y(t)$ に一様収束する^(*).

この境界 $x=y(t)$ をもつ問題 (2.1) - (2.4) の差分近似 (3.1) - (3.4) の解 $u(x_j, t_n)$ の収束性は Petrowsky [6] によればよい. 得られた極限関数 $u(x, t)$ がスラフアン条件 (2.5) を満たすことも容易に確かめられる.

問題は (6.3) の証明である. 基本公式 (4.2) より

$$(6.6) \quad |v(t_n)| < 4 \left[2M_0 + M_1 + M_1 \sum_{p=1}^n \frac{k_p}{a\sqrt{t_n - \tau_{p-1}}} + a^2 \|v\| \cdot \left| \sum_{p=1}^{n-1} k_p G_3(y_n, \tau_p; t_n, \tau_{p-1}) \right| \right]$$

補助定理 6 より, h に対して

$$(6.7) \quad < 4 \left[2M_0 + M_1 + \frac{2M_1}{a} \sqrt{t_n} + (C_2 + C_3 \|v\|) \sqrt{t_n} + C_4 \|v\| h^{\frac{1}{2}} \right]$$

いま,

$$(6.8) \quad M = 4(2M_0 + M_1) + 1$$

ととり, $h \in (0, \varepsilon) < \varepsilon$ $4C_4 M h^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$ とするふうにし,

(*) $n \rightarrow \infty$ 部分列 $\{y_{\alpha}(t_i)\}$ の収束 (かでないか), 最終的には 解の一変数から 全収束が導かれる.

のときとく選んて

$$4 \left[\frac{2M_1}{a} \sqrt{\sigma} + (C_2 + C_3 M) \sqrt{\sigma} \right] < \frac{1}{2}$$

とすれば、

$$|v(t_n)| < M, \quad 0 < t_n < \sigma$$

えうる。

かくして $0 < t_n < \sigma$ に対して差分解の収束性 (局所解の存在) が証明されたことになる。この事実から大局解の存在と導くには Friedman [3] によればよい。従って局所解の収束性から、ア・プリオリ評価

$$|v(t_n)| < M', \quad 0 < t_n < T$$

を得、 $0 < t < T$ 全体で差分解が収束することは前と同じようにすればよい。

§7 おわりに

$x=0$ で断続条件が与えられているときも全く同様に差分解の収束性が示される。更に別の種境界条件が与えられている場合にも拡張可能であろう。もっと複雑な多相のスタッフアン問題への適用も困難なからう。

数値計算でも良好な結果を得た。

最後に、この研究を手とめるのに、奥川光太郎先生、

山口昌哉先生をはじめ、京大工学部数値解析セミナー参加者全員の方々に多大な批判忠告を受けました。二に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- [1] Douglas J. Jr. and Gallie T. M., On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. J. 22 No.4, 1955.
- [2] Evans G. W. II, A note on the existence of a solution to a problem of Stefan, Quant. Appl. Math. vol 9. No.2. 1951
- [3] Friedman A., Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids, J. Math. and Mech, vol 8 No.4 1959
- [4] Rubinstein, L. I. On the determination of the position of the boundary which separates two phases in the one dimensional problem of Stefan, D. A. N. SSSR, 58, 1947
- [5] Rubinstein, L. I. Stefan's problems, 1967
- [6] イ. ヴ. ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書, 1961