

p -葉解析関数についての Marx-Strohhäcker の定理

[On the Marx-Strohhäcker Theorem in
 p -valently Analytic Functions]

福井 誠一 [Seiichi FUKUI] 和歌山大学 教育学部
西郷 恵 [Megumi SAIGO] 福岡大学 理学部
池田 彰 [Akira IKEDA] 福岡大学 理学部

§1. 導入

関数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ が単位円 $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内で正則とする. この関数の集合を A とおく. このとき, $0 \leq \alpha < 1$ として,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad (1.1)$$

をみたす関数 $f(z) \in A$ を位数 α の星型関数といい, この関数の族を $S^*(\alpha)$ とおく. また, $f(z) \in A$ が $0 \leq \alpha < 1$ に対して,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad (1.2)$$

をみたすとき, 位数 α の凸型関数という. この関数の族を $K(\alpha)$ とかく. 特に $S^*(0) = S^*$, $K(0) = K$ とおく.

Marx [9] と Strohhäcker [11] は次の結果を示した.

定理 A. 任意の $f(z) \in A$ について,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in U) \quad \text{ならば} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \frac{1}{2} \quad (z \in U), \quad (1.3)$$

すなわち,

$$K(0) \subset S^* \left(\frac{1}{2} \right) \quad (1.4)$$

が成り立つ.

Jack [7] はこの結果を部分的に拡張した. そして, 次の定理を MacGregor [8] が示し, さらに Willken-Feng [13] は新しい方法でこの定理を完全に証明した.

定理 B. 任意の $f(z) \in A$ について,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad \text{ならば} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta \quad (z \in U), \quad (1.5)$$

すなわち,

$$K(\alpha) \subset S^*(\beta) \quad (1.6)$$

が成り立つ. ただし,

$$\beta = \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}(1-2^{2\alpha-1})} & \left(\alpha \neq \frac{1}{2} \right), \\ \frac{1}{2 \log 2} & \left(\alpha = \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (1.7)$$

である.

ここではこの定理を p -葉解析関数の場合にどのように拡張できるかについて調べる. 完全な拡張定理は得られなかったが, 興味ある結果が分かったのでそれを報告したい.

§2. 準備

p と n を正の整数として, U 上での正則関数 $f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$ の集合を $A_p(n)$ とおく. $0 \leq \alpha < p$ について $f(z) \in A_p(n)$ が

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad (2.1)$$

をみたすとき, 位数 α の p -葉星型関数といい, この関数の族を $S_p^*(\alpha)$ とおく. また, 同様に $0 \leq \alpha < p$ として,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad (2.2)$$

をみたす関数 $f(z) \in A_p(n)$ を位数 α の p -葉凸型関数といい, この関数の族を $K_p(\alpha)$ とする. 特に $A_p(1) = A_p$ とおく. また $A_1 = A$, $S_1^*(\alpha) = S^*(\alpha)$, $K_1(\alpha) = K(\alpha)$ である.

2つの補題が必要である. 補題 1 は Fukui-Sakaguchi [5], Jack [7], Miller-Mocanu [10] が示した. 補題 2 は補題 1 を使って得られた ([2] 参照).

補題 1. $n \geq 1$ とし, 関数 $w(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ を U で正則とする. $\max_{|z|=r} |w(z)| = |w(z_0)|$ となる $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ($r_0 < 1$) が存在すれば, $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \equiv m$ は実数で, $m \geq n$ となる.

補題 2. p と n を正の整数とし、関数 $p(z) = p + \sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k$ は U で正則とする。このとき、ある $z_0 \in U$ が存在して、 $\operatorname{Re}\{p(z)\} > \operatorname{Re}\{p(z_0)\} \equiv \gamma$ ($|z| < |z_0|$) であれば、

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right\} \begin{cases} \geq \frac{n\gamma}{2(\gamma-p)} & (\gamma \leq 0), \\ \leq \frac{n\gamma}{2(\gamma-p)} & \left(0 \leq \gamma \leq \frac{p}{2}\right), \\ \leq \frac{n(\gamma-p)}{2\gamma} & \left(\frac{p}{2} \leq \gamma < p\right), \end{cases} \quad (2.3)$$

となる。

注意. 補題 2 で、

$$p(z) = \frac{p - (2\gamma - p)z^n}{1 - z^n}$$

とすると、(2.3) のいずれも等号が成立する。

§3. 主定理

$f(z) \in A_p(n)$ のとき、

$$p(z) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)} = p + pa_n z^n + \dots, \quad 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = p + b_n z^n + \dots$$

の様に形式的に展開し、仮定 $\operatorname{Re}\left\{\frac{1 + zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$ ($z \in U$) があれば、 $p(z)$ および $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}$ は正則になる。従って、次の定理が得られる。

定理 1. 関数 $f(z) \in A_p(n)$ と与えられた p, α が $0 \leq \alpha < p$ および

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \quad (3.1)$$

みたすならば

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta \quad (z \in U) \quad (3.2)$$

となる。ただし、 β は $0 \leq \beta < p$ で

$$0 \leq \beta \leq \frac{p}{2} \quad \text{かつ} \quad \beta + \frac{n\beta}{2(\beta-p)} \leq \alpha \quad (3.3)$$

または

$$\frac{p}{2} \leq \beta < p \quad \text{かつ} \quad \beta + \frac{2(\beta - p)}{n\beta} \leq \alpha \quad (3.4)$$

をみたすとする.

この定理は, $K_p(\alpha) \subset S_p^*(\beta)$ となるための十分条件が (3.3) または (3.4) であることを示している.

証明. 背理法による.

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

とおくと, $p(0) = p$, $0 \leq \beta < p$ より $z = 0$ の近傍では $\operatorname{Re}\{p(z)\} > \beta$ であるから, もし $z_0 \in U$ が存在して, $\operatorname{Re}\{p(z)\} > \operatorname{Re}\{p(z_0)\} \equiv \beta$ ($|z| < |z_0|$) 成立したとすると, 補題 2 から

(i) $0 \leq \beta \leq \frac{p}{2}$ のとき

$$1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} = p(z_0) + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}$$

ゆえに

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \leq \beta + \frac{n\beta}{2(\beta - p)} < \alpha$$

となり, 仮定に反する.

(ii) $\frac{p}{2} \leq \beta < p$ のときも同様に示される.

定理 1 で $\alpha = 0$, $p = n = 1$ とおくと, 定理 A が得られる. なお, $p \geq 2$ のときには, $n < p$ と $n \geq p$ の場合によって, 次のように異なる結果となる.

系 1. $p \geq 2$, $1 \leq n < p$ とし, $f(z) \in A_p(n)$ とする. $\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$ ($z \in U$) ならば $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ ($z \in U$) である. すなわち, $K_p(0) \subset S_p^*(0)$ である. これは sharp な結果である.

この系の $n = 1$ の場合は Fukui [4], Sugawa [12] が示した. $n = 1$ で $S_p^*(0)$ に属するということはどんな正の数 β に対しても, $S_p^*(\beta)$ で置き換えることが出来ないことは, 具体的な関数を作つて示された. 後で $1 < n < p$ の場合についても証明する.

系 2. $2 \leq p \leq n$ とする. このとき, $f(z) \in A_p(n)$ が $f(z) \in K_p(0)$ ならば

$$p \leq n \leq 2p \quad \text{のとき} \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > p - \frac{n}{2} \quad (z \in U) \quad (3.5)$$

$$2p \leq n \quad \text{のとき} \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \frac{-n + \sqrt{n^2 + 8np}}{4} \quad (z \in U) \quad (3.6)$$

となる.

特に, $n = p$ のときは次のようになる.

系 3. $f(z)$ を $f(z) \in A_p(p)$ つまり $f(z) = z^p + \sum_{k=2p}^{\infty} a_k z^k$ の形の U での正則とする.
 $\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$ ($z \in U$) ならば $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \frac{p}{2}$ ($z \in U$) を得る. すなわち, $K_p(0) \subset S_p^* \left(\frac{p}{2} \right)$ である. これは sharp な結果であって, 関数 $f(z) = \frac{z^p}{1-z^p}$ がそれを保証する.

系 3 は $p = 1$ のとき定理 A となって, これは定理 A の一つの拡張である.

§4. sharp な評価を求めて

前節の系 1 の $S_p^*(0)$ は sharp な評価である. 系 2 は十分条件であって, さらに sharp な評価が望まれる. 系 3 はそのまま十分評価できているが, この節での特別な場合の中に含まれる.

2つの解析関数 $f(z), g(z) \in A_p(n)$ について,

$$f(z) = p \int_0^z \frac{g(w)}{w} dw \iff 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)} \quad (4.1)$$

であるから,

$$f(z) \in K_p(\alpha) \iff g(z) \in S_p^*(\alpha) \quad (4.2)$$

となる. いま, 任意の $g(z) \in S_p^*(\alpha)$ に対して, $g_0(z) = \frac{z^p}{(1+z^n)^{2(p-\alpha)/n}}$ が一つの極値関数になり,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} \prec \frac{zg'_0(z)}{g_0(z)} = p \cdot \frac{p - (2\alpha - p)z^n}{1 + z^n} \quad (4.3)$$

であることが知られている. ここに, 記号 $\prec$ は subordination を示す.

この $g_0(z) \in S_p^*(\alpha)$ に対して,

$$f_0(z) = p \int_0^z \frac{g_0(w)}{w} dw = p \int_0^z \frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}} dw \in K_p(\alpha) \quad (4.4)$$

と定義し $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)} \right\} > \beta$ ($z \in U$) となる β を求める. これは, すべての $z \in U$ における最小の β を求めることである. 条件から, $\frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}$ は U の正則関数を示し, その調和関数 $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)} \right\}$

の最小値を求めることになるから, $\min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)} \right\}$ ($0 < r < 1$) の $r \rightarrow 1$ のときの値, または $\inf_{z \in U} \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)} \right\}$ を求めてもよい. 従って, $|z| = 1$ つまり $z = e^{i\theta}$ として以下計算する.

いま, $f_0(z) = p \int_0^z \frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}} dw$, $z = e^{i\theta}$ として $f_0(e^{i\theta}) = p \left(\int_0^1 + \int_1^{e^{i\theta}} \right) = p(A+B)$ とおく. ただし,

$$A = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2(p-\alpha)/n}} dt > 0, \quad (4.5)$$

$$B = \int_1^{e^{i\theta}} \frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}} dw = i \int_0^\theta \frac{e^{i\alpha\theta}}{2^{(p-\alpha)/n} (1 + \cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}} d\theta. \quad (4.6)$$

よって,

$$B = i[C(\theta) + iS(\theta)], \quad (4.7)$$

$$C(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos \alpha\theta}{2^{(p-\alpha)/n} (1 + \cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}} d\theta, \quad (4.8)$$

$$S(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \alpha\theta}{2^{(p-\alpha)/n} (1 + \cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}} d\theta \quad (4.9)$$

を得る. $\alpha = 0$ として, $\varphi(z) = \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \varphi(e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta} f'_0(e^{i\theta})}{f_0(e^{i\theta})} = \frac{df'_0(e^{i\theta})/d\theta}{i f_0(e^{i\theta})} \\ &= \frac{p[A + iC(\theta)]'}{ip[A + iC(\theta)]} = \frac{ipC'(\theta)}{ip[A + iC(\theta)]} = \frac{C'(\theta)}{A + iC(\theta)}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \frac{AC'(\theta)}{A^2 + C^2(\theta)}. \quad (4.10)$$

となり, この $0 \leq \theta < 2\pi$ における最小値を求めればよい. ここで

$$C'(\theta) = \frac{1}{2^{p/n} (1 + \cos n\theta)^{p/n}} > 0 \quad (4.11)$$

である.

いま $k = p/n$ とおくと

$$(1) \quad k > 1 \ (p > n) \quad \text{ならば} \quad \min_{0 \leq \theta < 2\pi} [\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}] = 0,$$

$$(2) \quad k = 1 \ (p = n) \quad \text{ならば} \quad \operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \frac{p}{2},$$

$$(3) \quad 0 < k < 1 \ (p < n) \quad \text{ならば} \quad \min_{0 \leq \theta < 2\pi} [\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}] = \frac{C'(0)}{A}$$

が示される.

なぜなら, (1) は, まず (4.10) より $\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}$ は正で, (4.5) より $A = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2p/n}} dt > 0$, (4.11) より $C'(\theta)$ も正だから, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/n} \varphi(e^{i\theta}) = 0$ となることを示せばよい.

$$C'(\theta) = \frac{1}{2^{2k}(\cos n\theta/2)^{2k}}, \quad C(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{2^{2k}(\cos n\theta/2)^{2k}} d\theta$$

で $t = \tan \frac{n\theta}{2}$ とおくと, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{n} - 0$ のとき $t \rightarrow \infty$ となって,

$$C'(\theta) = \frac{(1+t^2)^k}{2^{2k}} = O(t^{2k}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

また,

$$C(\theta) = \int_0^t 2^{k-1} n^{-1} (1+t^2)^{k-1} dt = O(t^{2k-1}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

ゆえに $k > 1$ のとき, $\frac{AC'(\theta)}{A^2 + C(\theta)^2} = O(t^{-2k+2})$ より $\lim_{\theta \rightarrow \pi/n} \frac{AC'(\theta)}{A^2 + C(\theta)^2} = 0$.

次に, (2) $k = 1$ の場合には (4.5), (4.8), (4.11) より

$$A = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^p)^2} dt = \frac{1}{2p}, \quad C(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{2(1+\cos p\theta)} d\theta = \frac{1}{2p} \tan \frac{p\theta}{2}, \quad C'(\theta) = \frac{1}{4 \cos^2(p\theta/2)}$$

であるから $\frac{AC'(\theta)}{A^2 + C(\theta)^2} = \frac{p}{2}$ を得る.

(3) $0 < k < 1$ のとき,

$$\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \frac{AC'(\theta)}{A^2 + C^2(\theta)} \geq \frac{C'(0)}{A} \quad (4.12)$$

を示そう. (4.12) の各辺 はすべて正であるから, $A^2 \left(\frac{C'(\theta)}{C'(0)} - 1 \right) \geq C^2(\theta)$, つまり

$$g(\theta) = A \sqrt{\frac{C'(\theta)}{C'(0)} - 1} - C(\theta) \geq 0 \quad (4.13)$$

を示せばよい. (4.11) より

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= A \frac{\frac{C''(\theta)}{C'(0)}}{2\sqrt{\frac{C'(\theta)}{C'(0)} - 1}} - C'(\theta) \\ &= \frac{A}{2} \frac{\frac{p \sin n\theta}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n+1}} 2^{2p/n}}{\sqrt{\frac{2^{2p/n}}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}} - 1}} - \frac{1}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}} \\ &= \frac{1}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}} \left\{ \frac{Ap}{2} 2^{2p/n} \frac{\sin^n \theta}{1+\cos n\theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^{2p/n}(n\theta/2)} - 1}} - 1 \right\} \end{aligned}$$

となり, $\tan \frac{n\theta}{2} = t$ とおくと, $k = p/n$ ($0 < k < 1$) であるから

$$g'(\theta) = \frac{1}{2^{2k} \cos^{2k}(n\theta/2)} \left\{ \frac{Ap2^{2k-1}t}{\sqrt{(1+t^2)^k - 1}} - 1 \right\}$$

で, $t < 0$ なら $g'(\theta) < 0$ で $g(\theta)$ は単調減少となる. $t > 0$ なら $x = t^2$ として $\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^k - 1}} =$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^k - 1}{x}}}$ となるが, 関数 $h(x) = \frac{(1+x)^k - 1}{x}$ ($x > 0$) は容易に分かるように, 単調減少

で $0 < h(x) < k$ である. 従って, $\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^k - 1}} > \frac{1}{\sqrt{k}} > 1$ を得る. また, 一方 A については

$0 < w \leq 1$ ならば $\frac{\Gamma(w+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(w+1)} \leq \frac{1}{2\sqrt{w}}$ が成り立つから, (4.5) より

$$A = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2p/n}} dt = \frac{1}{2n} \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{(1+u)^{2k}} du = \frac{1}{2n} B(k, k) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{2^{2k}n\Gamma(k+1/2)} \geq \frac{1}{2^{2k-1}n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

ゆえに,

$$g'(\theta) \geq \frac{1}{2^{2k} \cos^{2k}(n\theta/2)} \left\{ 2^{2k-1}p \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2^{2k-1}n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 \right\} = 0$$

つまり, $t > 0$ で $g(\theta)$ は単調増加である. 以上より, $g(\theta)$ は $\theta = 0$ で最小となり, $g(0) = 0$ であるから, $g(\theta) \geq 0$. 従って, $f_0(z) = p \int_0^z \frac{z^{p-1}}{(1+z^n)^{2p/n}} dz$ は $k = p/n$ として, (4.12) より

$$\operatorname{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}\right\} > \frac{n\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}$$

となる. ゆえに

命題. 任意の $f(z) \in K_p(0)$ が

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zf'_0(z)}{f_0(z)} \quad (4.14)$$

をみたせば, $f(z) \in S_p^*(\beta)$ である. すなわち

$$K_p(0) \subset S_p^*(\beta), \quad \beta = \frac{n\Gamma(p/n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p/n)}$$

である. ただし, $n \geq p$. この結果は sharp である.

注意. この命題で $p = 1$, $n = 2$ とすると,

$$K(0) \subset S^*\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

となり $f(z) = \tan^{-1} z$ がその sharpness を保証する.

参考文献

- [1] J. Dziok and J. Stankiewicz: The order of starlikeness of the p -valent functions, *Zegyty Nauk, Politech. Rzeszowskiej Mat.* **19**(1996), 5-12.
- [2] S. Fukui: On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, *Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci.* **45**(1995), 1-7.
- [3] S. Fukui: On p -valently starlike functions and convex functions (in Japanese), *Univalent Functions and Briot-Bouquet Differential Equations* (Kyoto,1996), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku **963**(1996), 23-28.
- [4] S. Fukui: On p -valently α -convex functions of order β (in Japanese), *New Development of Convolution* (Kyoto,1997), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku **1012**(1997), 20-24.
- [5] S. Fukui and K. Sakaguchi: An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, *Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci.* **29**(1980), 1-3.
- [6] D.J. Hallenbeck and A.E. Livingston: Applications of extremal point theory to classes of multivalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **221**(1976), 339-359.
- [7] I.S. Jack: Functions starlike and convex of order α , *J. London Math. Soc.* (2) **3**(1971), 469-474.
- [8] T.M. MacGregor: A subordination for convex functions of order α , *J. London Math. Soc.* (2) **9**(1975), 530-536.
- [9] A. Marx: Untersuchungen über schlichte Abbildungen, *Math. Ann.* **107**(1932), 40-67.
- [10] S.S. Miller and P.T. Mocanu: Second order differential inequalities in the complex plane, *J. Math. Anal. Appl.* **65**(1978), 289-305.
- [11] E. Strohäcker: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, *Math. Z.* **37**(1933), 356-380.
- [12] T. Sugawa: A property of Fukui's extremal functions, *Univalent Functions and Briot-Bouquet Differential Equations* (Kyoto,1996), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku **963**(1996), 119-123.
- [13] D.R. Willken and J. Feng: A remark on convex and starlike functions, *J. London Math. Soc.* (2) **21**(1980), 287-290.