

Sp_n 上の Fourier-Jacobi 型 Whittaker 函数

京都産業大学理 村瀬 篤 (Atsushi Murase)

三重大学理 菅野 孝史 (Takashi Sugano)

Whittaker 函数は, Jacquet-Langlands の仕事に見られるように, 保型 L -函数の理論において最も基本的な道具の一つである。最近 Bump は, GSp_3 上の generic な cusp form の spinor L -函数 ε , Whittaker 函数によって積分表示し, それをさらに Rankin-Selberg 型の積分表示に変形することにより, 解析接続, 函数等式を導いた。(Bump 参照) しかしながら, 次数 2 以上の holomorphic な Siegel cusp form は generic な π に (すなわち, 付随する Whittaker 函数 $\equiv 0$) ため, Bump の方法は non-holomorphic form に対してのみ有効である。従って, Whittaker 函数の様々な modification を考え, それらの保型 L -函数の理論に役立つか向うのは, 興味深い問題と思われる。

本稿では, Shintani ([Shintani]) によって導入された Fourier-Jacobi 型の Whittaker 函数を考察し,

Euler 積分解 (Th.1), standard zeta 函数との関係 (Th.4) を述べる。これらは, Shintani に与えた予想と一致した結果である。

Shintani の Whittaker 函数 (以後 Whittaker-Shintani (WS) 函数と呼ぶ) は, 本来の Whittaker 函数に比べ複雑な性質をもつが, holomorphic cusp form に対して恒等的に 0 にならない (ある弱条件の下で) という長所をもつ。詳細については [M-S] を見られたい。

§1. WS-函数の定義

$$G^* = Sp_n$$

$$G^* = Sp_{n+1}, G = Sp_n \text{ とする。 } g \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & a & b & \\ & c & d & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \text{ という } n+1 \text{ 次元の行列により, } G^* \text{ の部分群とみられる。}$$

次数 n の Heisenberg 群 H は,

$$H_{\mathbb{Q}} = \left\{ (\lambda, \mu, \kappa) := \begin{bmatrix} 1 & \kappa & \mu \\ & 1_n & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ & 1_n & 0 \\ 0 & -\lambda^t & 1_n \end{bmatrix} \mid \right.$$

$$\left. \lambda, \mu \in \mathbb{Q}^n, \kappa \in \mathbb{Q} \right\}$$

により定め, Jacobi 群 G は, H と G^* の $(G^*$ 内での)

半直積により定義する。 G は, 中心 $Z(G) = \{100k\}$ と $\mathbb{Q}$ 上の non reductive algebraic group とある。

$\psi_A \in \mathbb{Q}$ の adèle 環 A の additive character
 として $\psi_A(x_\infty) = e[x_\infty] = \exp(2\pi i x_\infty) \quad (x_\infty \in \mathbb{R})$
 とおける。

$F: G^*(\mathbb{Q}) \backslash G^*(A) \rightarrow \mathbb{C}$ は G^* 上の cusp form,
 $f: G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) \rightarrow \mathbb{C}$ は level 1 (つまり
 $f(100k)g) = \psi_A(k) f(g) \quad (k \in A, g \in G(A))$ とおける)
 の Jacobi cusp form とする。 cusp form

cusp form の組 (F, f) に対し, global WS-函数
 $W_{F,f}$ は 次のように定義する ([Shintani]):

$$(1.1) \quad W_{F,f}(g^*) = \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)} F(xg^*) \overline{f(x)} dx \quad (g^* \in G^*(A))$$

§2 WS-函数の Euler 積分

以後, F, f は Hecke 作用素の ^用 同時固有函数 (Hecke eigenform と呼ぶ) とする。 二つとも, $\mathbb{Q}$ の有限素点 p に対し, F, f に対応する Satake parameter $\chi^{(p)} = (\chi_p^{(1)}, \dots, \chi_p^{(n+1)}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\xi^{(p)} = (\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_n^{(p)}) \in \mathbb{C}^n$

が各々定まる。

Theorem 1 $W_{F,f} \neq 0$ と可なり,

$$(1.2) \quad W_{F,f} \left(\prod_v g_v^* \right) = \prod_v W^{(v)}(g_v^*)$$

$= z^v$, $W^{(v)}$ は, $G^*(\mathbb{Q}_v)$ 上の

$$W^{(v)}(e) = \begin{cases} 1 & v = p \\ W_{F,f}(e) & v \neq p \end{cases}$$

と可なり函数 z^v , $v = p$ のときは Satake parameters $\chi^{(p)}, \xi^{(p)}$ の可なり定まる。

$S_2^{(n+1)} \in G^*(\mathbb{Z}) = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ に属する weight l の holomorphic Siegel cusp forms の空間, $S_{l,m}^{(n)} \in G(\mathbb{Z})$ に属する weight l , index m の Jacobi cusp forms の空間とし, $S_{l,m}^{(n)}$ の Petersson 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l,m}$ で表す (詳細は [M] を参照)。 $F \in S_2^{(n+1)} \in$

$$F \left(\begin{smallmatrix} z & w \\ w & z \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(z, w) \in [m\mathbb{Z}]$$

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} z & w \\ w & z \end{smallmatrix} \right) \in H_{n+1} = \text{次数 } n+1 \text{ Siegel 上半空間} \right)$ と

Fourier-Jacobi 展開でき, F は知られているように,

$F_m \in S_{l,m}^{(n)}$ である。

Proposition 2 $F \in S_2^{(n+1)}$, $f \in S_{2,1}^{(n)}$ とおくと,

$$W_{F,f} \neq 0 \iff W_{F,f}(e) = \langle \bar{F}_1, f \rangle_{2,1} \neq 0$$

つまり, $W_{F,f}$ は, F, f の adèle 群上への lifts 1-対応する WS 函数である。

Corollary 3 $F \in S_2^{(n+1)}$ は Hecke eigenform

である。このとき, $\bar{F}_1 \neq 0$ ならば, Hecke eigenform $f \in S_{2,1}^{(n)}$ として $W_{F,f} \neq 0$ となるものが存在する。

§ 3 WS 函数と standard zeta 函数

$F \in S_2^{(n+1)}$, $f \in S_{2,1}^{(n)}$ は Hecke eigenform であるとき,

これら standard zeta 函数を

$$D(s, \bar{F}) = \prod_{p < \infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \chi_i^{(p)} p^{-s}) (1 - \chi_i^{(p)-1} p^{-s}) \right\}^{-1} \\ \times (1 - p^{-s})^{-1}$$

$$D(s, f) = \prod_{p < \infty} \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - \xi_i^{(p)} p^{-s}) (1 - \xi_i^{(p)-1} p^{-s}) \right\}^{-1}$$

により定義する。

Theorem 4 $F \in S_{\ell}^{(n+1)}$, $f \in S_{\ell,1}^{(n)} \in$ Hecke eigenform $\Leftrightarrow \exists \lambda = a \geq 2$

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \int_{A^{\times}} W_{F,f} \left(\begin{bmatrix} x & & \\ & 1_n & \\ & & t^{-1} \\ & & & 1_n \end{bmatrix} \right) |x|_A^{s-n-1} d^{\times} x \\
 &= (2\pi)^{-(s+\ell-n-1)/2} P\left(\frac{s+\ell-n-1}{2}\right) \ll F_1, f \gg_{\ell,1} \\
 &\times \frac{D(s, F)}{D(s, f)}
 \end{aligned}$$

Remark F, f or holomorphic form $z \cdot \bar{z} \geq 2$
 $\nexists$, (3.1) is "p-factor" $\exists$ λ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\lambda \geq 2$ (both,
 p -factor $= \lambda \geq 2$ $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq 2$).

References

[Bump] D. Bump :

[M] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree n , Part I. The basic identity,

J. für die reine und angew. Math.

[M-S] A. Murase and T. Sugano : Whittaker functions
on the symplectic groups of Fourier-Jacobi type,
preprint 1990.

[Shintani] T. Shintani, unpublished notes