

z と $f(z)$ によって生成される関数環

大阪府立大学工学部

阪 井 章

(Akira Sakai)

この話は、複素領域（または実領域）の上で関数 f が与えられているとき、連続関数を z と $f(z)$ （または x と $f(x)$ ）の多項式によって近似する問題を通じて、近似問題における直交測度の方法を述べるのが目的である。

この方法は関数解析的方法であるが、環の性質を使うわけではないので、この意味では、この話も関数環の話とはいいたくない。近似問題における関数環論固有の方法としては、例えば表現測度や Bishop の分解定理などがあるが、ここでは述べない。また、以下において直交測度の一般的なことと具体的な 1 つの問題の解について述べるが、この問題についてはつい最近に Gauthier-Frih[2] によって同じ結果が発表されたので、これは新しい結果ではなくなった。これらのことをはじめにお断わりしておく。

近似の問題を考えるときに、その近似の度合とか速さとかを問題にする場合と、近似の可能性を問題にする場合がある。ここで問題にするのは後者の場合で、集合 S とその上のある関数族 F を与えて、 S 上の関数 f が S 上で F の関数によって一様に近似されるための S , F , f の条件を考える。ここで考えるのは S が C^n のコンパクト部分集合のときで、この場合には、近似の可能性の問題は、集合の複素的構造の問題とある種の凸性の問題に関係する。このとき、近似する関数が f を用いて具体的な式によって表されるに越したことはない。しかし、特別な場合を除くと、それは容易なことではなく、一般にはなんらかの存在証明を行うのである。その1つが直交測度の方法である。たとえば、コンパクト集合 X 上の連続関数全体を $C(X)$ とするとき、閉部分空間 $A \subset B \subset C(X)$ について、 $A = B$ を示すには A に直交する測度が B にも直交することを示すことになる。近似を考えるとき、集合 S をなるべく一般のものにしようという願望がある。たとえば、 S がある関数のグラフになっているとすれば、その関数の滑らかさの条件を弱いものにしようとする。それに直交測度の方法が有効である。

ここで扱う問題の1つは、 K と、 K 上のベクトル値関数 $f: K \rightarrow C^m$ が与えられたとき、 z と $f(z)$ によって生成される関数環 A_f が $C(X)$ と一致するかどうかの問題である。この場合、 K 上の f のグラフを X とするとき、 X 上の多項式の一樣極限の全体からなる関数環 $P(X)$ は A と同型である。したがってこの問題は $P(X) = C(X)$ が成り立つための X の条件を求める問題となる。もう1つの問題は R^n のコンパクト集合 K と K 上の関数 $g: K \rightarrow R^n$ が与えられたとき、 g のグラフを $X = \{x + ig(x) \in C^n : x \in K\}$ と考え、 $P(X) = C(X)$ の条件を考える問題である。いずれの場合も、 $P(X) = C(X)$ 示すことが問題であって、 $P(X)$ に直交する測度が 0 に等しいことを示すことになる。

第1の場合にこの方法の概略を述べてみよう。 K は C^k のコンパクト集合で、 A は K 上の関数環とする。 G は K を含む開集合、 U は G の近傍とし、 $U \times G$ で定義された積分核 $s(z, \zeta)$ は ζ について $(n, n-1)$ 形式で z について関数であるとする。さらに、 $s(z, \zeta)$ は次の条件を満たすものとする。

- (i) $s(z, \zeta)$ は z の関数として A に属する。
- (ii) G 内に台をもつ任意の C 関数 ϕ に対して

$$\phi(z) = \int \bar{\partial} \phi(\zeta) \wedge s(z, \zeta)$$

いま μ は A に直行する測度とする。そのとき (ii) により

$$\begin{aligned}\int \phi(z) d\mu(z) &= \int \left(\int \bar{\partial} \phi(\zeta) \wedge s(z, \zeta) \right) d\mu(z) \\ &= \int \phi(\zeta) \wedge \left(\int s(z, \zeta) d\mu(z) \right)\end{aligned}$$

(i) によって右辺は 0 であるから $\mu = 0$ が得られる。

証明の骨子はこのようなものであるが、実際には積分可能性などについての考察が必要である。

$f(z)$ は K で定義された関数とし、 A が z と $f(z)$ で生成される関数環 A_f であるときには $s(z, \zeta)$ は $f(z)$ を用いてつくられる。Wermer[6]は $n = 1$ の場合に、Lipschitz関数 $R(z)$ によって定義される関数 $f(z) = \bar{z} + R(z)$ に対して最初にこの方法を用いた。Weinstock[4]はこれを $n > 1$ の場合に拡張して、次の Hörmander-Wermer[3] の新しい証明を与えた。

定理 H W $R = (R_1, \dots, R_n)$ は K の近傍からの C_1 写像で

$$|R(z) - R(z')| \leq k |z - z'| \quad (k < 1)$$

を満たしているとき $f = z + R(z)$ に対して $A_f = C(K)$

この場合に積分核はつぎように構成される。

$$H_j(z, w) = \bar{z}_j + R_j(z) - \bar{w}_j - R_j(w)$$

$$G(z, w) = \sum_j (z_j - w_j) H_j(z, w)$$

$$s_j(z, w) = G(z, w)^{-n} H_j(z, w)$$

$$\eta_j = \bigwedge_{j \neq k} \bar{\partial}_z H_k(z, w), \quad dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

$$s(z, w) = (n-1)!(2\pi i)^{-n} \bigwedge_j (-i)^{j-1} s_j(z, w) \eta_j \wedge dz$$

ここでは $f(z)$ の滑らかさを必要としている。 f が滑らかでない場合には、 f を滑らかな関数 f_n によって近似する。
 f, f_n によって構成される積分核をそれぞれ s, s_n として

$$0 = \int s_n(z, w) d\mu(z) \rightarrow \int s(z, w) d\mu(z)$$

が示される。これによって、定理 HW は R の滑らかさの条件を除いても成り立つことがわかる。

今度は $R(x)$ が R^n 領域で定義された Lipschitz 関数であるば

場合について考えよう。このときは、積分核は

$$H_j(z, w) = \bar{z}_j + 2R_j(x) - \bar{w}_j - 2R_j(u)$$

$$(z = x + iy, w = u + iv)$$

とおくことによって構成される。このばあいグラフ X 上では $y = x + iR(x)$ であるが、この関係は

$$z = \bar{z} + 2iR(x)$$

とかける。このことから構成された核関数 $s(z, w)$ が z について X 上で正則になる。この idea は Berndtson[1]によるもので、これによって Hörmander-Wermerによる totally real submanifold 上の近似定理の別証明がなされた。

最近、この idea を用いて、Fruh - Gauthier[2]は次の定理を証明した。

定理 F G $R(x)$ は R^n のコンパクト集合 K の関数で

$$|R(x) - R(x')| < k|x - x'| \quad (0 < k < 1)$$

を満たしているとする。このとき、 R のグラフ X に対して

$P(X) = C(X)$ が成り立つ。

この方法はさらに C^k 級の totally real set 上の近似定理の証明に応用可能である。とくに、この方法によって $k = 0$ の場合の近似定理に適用できる可能性がある。

また、この方法は C^R 関数の近似定理にも適用される。例えば Weinstock[5] によって定理 H W の拡張がなされている。

文 献

- [1] B. Berndtson: Integral kernels and approximation on totally real submanifolds of C^n , Math. Ann. 243 (1979) 125-129
- [2] E. M. Fritzsche and E. M. Gauthier: Polynomial approximation on certain Lipschitz graphs in C^n , Complex Variables 18 (1992) 55-61
- [3] L. Hörmander and J. Wermer: Uniform approximation on compact sets in C^n , Math. Scand. 23 (1968) 5-21
- [4] B. M. Weinstock: A new proof of a theorem of Hörmander and Wermer, Math. Ann. 220 (1976) 59-63
- [5] B. M. Weinstock: On a theorem of A. Sakai, Osaka J. Math 17 (1980) 763-767
- [6] J. Wermer: Approximation on a disk, Math. Ann. 155 (1954) 331-333