

Oleg Musin の論文 「The kissing number in four dimensions」 の紹介

九州大学・数理学府 田上 真 (Makoto Tagami)

Graduate School of Mathematics,

Kyushu University

1 Introduction

kissing number 問題とは一つの固定した球に同じ半径の球達を境界以外は交わらないように接触させていき、一体いくつまで接触させることができるかという問題である（各次元に対するこの接触球の最大数をその次元における kissing number という）。この問題は有名な 1694 年の Newton と Gregory の論争「13 球問題」にまで遡る。この問題は非常に難しく、3 次元においてすら長い間未解決のままであったが、問題が提起されて以来約 250 年経ってはじめて 3 次元の kissing number が 12 であることが Schütte と van der Waerden [14] により完全に証明された（1956 年の Leech[10] による別証明もある）。しかしこれら [10],[14] の証明は初等的ではあるが、簡明であるとはいえない。

1 次元, 2 次元の kissing number 問題は自明なので、次は 4 次元である。4 次元においては原点に半径 1 の球を固定し、 $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0, 0)$ の $\pm$ と $\sqrt{2}$ の位置を任意に取って得られる 24 個の点に半径 1 の球の中心をおくことで、24 個の球を接触球が境界以外交わらないように固定球に接触させることができる。よって $\tau_4 \geq 24$ であることはすぐに解る（ここで τ_4 は 4 次元の kissing number を表している、以下 n 次元の kissing number を τ_n で表す）。

一般的な次元に対する kissing number の upper bound が Coxeter[5] により与えられた。この bound を 8 次元まで書いてみると次のようになる。

$$\tau_4 \leq 26, \tau_5 \leq 48, \tau_6 \leq 85, \tau_7 \leq 146, \tau_8 \leq 244.$$

しかし Coxeter bound は kissing number 問題を解く程には良い bound ではなかった。

一方 Delsarte [6] はある条件を満たす多項式を一つ与えると kissing number の upper bound が一つ得られるという、所謂 Delsarte method を導入した。Odlyzko-Sloane [13] はこの方法を 24 次元までの kissing number に適用し、Coxeter bound を改善した。8 次元まで書いてみると、

$$\tau_4 \leq 25, \tau_5 \leq 46, \tau_6 \leq 82, \tau_7 \leq 140, \tau_8 \leq 240$$

となる. 特に Odlyzko-Sloane[13] と Levenshtein[11] はこの方法を用いて, $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$ を独立に示した. これらの kissing number はそれぞれ E_8 型ルート系や Leech Lattice の nonzero 最小ノルムベクトルにより与えられる (また 8 次元と 24 次元の kissing number を与える配置の一意性も坂内-Sloane[4] により証明されている). しかし, 4 次元の kissing number に対しては Delsarte method を適用できるどんな多項式をもってしても, 25 よりも小さい upper bound は得られないことが Arestov-Babenko[1] によって示された (3 次元の場合も同様).

また Hsiang による 4 次元の kissing number が 24 であることを証明したという論文 [9] があるが, この論文はまだ正しいかどうか解っていない.

これらのことから 4 次元の kissing number 問題は解く手がかりすら得られていなかったのであるが, ごく最近 Oleg Musin[12] は Delsarte method を少し改良することにより 25 より小さい upper bound を求めることができることを示した. またこの方法を 3 次元に適用し, 13 球問題に対する別証明も与えている (この証明は代数的組合せ論の観点からすると [10], [14] のものよりも簡明である). この報告の目的は Oleg Musin の論文 [12] を紹介することである.

2 Gegenbauer polynomials and Delsarte method

この節で Delsarte method の解説をする. Delsarte method は球面上の調和解析と密接な関係がある.

$\mathbb{R}$ を実数体, $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ を実係数 n 変数多項式環, $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ を Laplacian とする. $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ は $\Delta f = 0$ である時に調和多項式という. 次の空間を考える.

$$H^{(k)} := \{f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ は次数 } k \text{ の同次調和多項式}\}.$$

$H^{(k)}$ には次のように非退化な内積が定義される: $f, g \in H^{(k)}$ に対して,

$$\langle f, g \rangle := \int_{S^{n-1}} f(w)g(w)d\mu(w).$$

ここで S^{n-1} は $n-1$ 次元球面, μ は S^{n-1} 上の確率 $O(n)$ -不変測度を表している (不変測度については [3], [8] を参照).

定義 2.1 (再帰核 [15]). H を集合 E 上の実数値関数族からなる Hilbert 空間とする. 内積を (f, g) と書くことにする. $E \times E$ 上の関数 $K(x, y)$ が再帰核であるとは次が成り立つときをいう:

- (i) y を固定したとき, $K(\cdot, y) \in H$
- (ii) 任意の $f(x) \in H$ に対して $(f(\cdot), K(\cdot, y)) = f(y)$ が成り立つ.

特に有限次元の場合, 再帰核 Φ は空間の正規直交基底 $\{e_i\}$ を用いて,

$$\Phi(x, y) = \sum_i e_i(x) e_i(y)$$

となる. $H^{(k)}$ の再帰核は次の Gegenbauer polynomial で与えられることがよく知られている.

定義 2.2 (Gegenbauer polynomial[3], [16]).

$$G_k^{(n)} := \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv k \pmod{2}}}^k c_{k-j} t^j (1-t^2)^{\frac{k-j}{2}},$$

ここで c_i 達は次の漸化式で定義される定数である.

$$c_0 = N_k = \dim H^{(k)}, \quad c_{k-j}(k-j)(k-j+n-3) + c_{k-j-2}(j+1)(j+2) = 0.$$

$G_k^{(n)}$ は $[-1, 1]$ 上重み関数 $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$ に対する直交多項式系になっている. 特に $n=3$ の時は Legendre 球多項式, $n=4$ の時は第 2 種 Chebyshev 多項式である.

次の補題は球面上の代数的組合せ論の基本定理であり, 加法公式と呼ばれている.

補題 2.1 (加法公式 [3]). Φ_k を $H^{(k)}$ の再帰核とする. この時, $x, y \in S^{n-1}$ に対して次が成り立つ:

$$\Phi_k(x, y) = G_k^{(n)}(x \cdot y),$$

ここで $x \cdot y$ はユークリッド内積を表す.

補題 2.1 の証明は [3] を参照のこと.

Delsarte method は次の spherical z -code の言葉で述べるのが便利である.

定義 2.3 (spherical z -code). X を S^{n-1} 上の有限部分集合とし, $z \in [-1, 1]$ を固定する. この時, X が spherical z -code であるとは, 任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ に対して $x \cdot y \leq z$ が成り立つことと定義する.

例えば $z = 1/2$ とすると, $x \cdot y \leq z$ はベクトル x, y が 60 度以上離れていることを意味するので, spherical z -code の最大頂点数が kissing number を与える.

Musin による Delsarte method の拡張を述べるのに Delsarte method の証明が重要なので, 次の命題は証明も述べることにする.

命題 2.1 (Delsarte method [6]). $z \in [-1, 1]$ を固定し, X を S^{n-1} 上の spherical z -code とする. また $a_0 > 0$, $a_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, d$) に対して $f(t) = \sum_{k=0}^d a_k G_k^{(n)}$ とおく. また次を仮定する:

$$f(t) \leq 0 \quad (t \in [-1, z]) \tag{1}$$

この時, $|X| \leq f(1)/a_0$ が成り立つ.

[証明]

$X = \{x_1, \dots, x_M\}$ を spherical z -code, $\{e_i\}_{i=1..N_k}$ を $H^{(k)}$ の正規直交基底とする. また $t_{ij} := x_i \cdot x_j$ とおく.

この時, 行を X , 列を $\{e_i\}_{i=1..N_k}$ で添え字付けされた行列 T_k を次のように定義する:

$$T_k := \begin{pmatrix} e_1(x_1) & \cdots & e_{N_k}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1(x_M) & \cdots & e_{N_k}(x_M) \end{pmatrix}.$$

T_k を第 k 特性行列と言う. T_k に右側から tT_k をかけて

$$T_k {}^tT_k = \left(\sum_{l=1}^{N_k} e_l(x_i) e_l(x_j) \right).$$

ただしカッコ内は (i, j) 成分を表す. 右辺は再帰核 $\Phi_k(x_i, x_j)$ であるので, 加法公式によって $G_k^{(n)}(t_{ij})$ に等しい. よって $T_k {}^tT_k = \left(G_k^{(n)}(t_{ij}) \right)$ が成り立つ. これから実対称行列 $\left(G_k^{(n)}(t_{ij}) \right)$ は半正定値であることが解る. 特に全ての成分が 1 のベクトル $\mathbf{j}$ を行列 $\left(G_k^{(n)}(t_{ij}) \right)$ に左右から掛けて,

$${}^t\mathbf{j} \left(G_k^{(n)}(t_{ij}) \right) \mathbf{j} = \sum_{i,j} G_k^{(n)}(t_{ij}) \geq 0 \quad (2)$$

が成り立つ. $\sum_{i,j} G_k^{(n)}(t_{ij})$ に a_k を掛けて全て足し合わせると

$$\sum_k a_k \sum_{i,j} G_k^{(n)}(t_{ij}) = \sum_{i,j} \sum_k a_k G_k^{(n)}(t_{ij}) = \sum_{i,j} f(t_{ij}) \quad (3)$$

となるが, (2) は任意の k について成り立つので, 和 (3) は $k=0$ だけを足したほうが小さい. $G_0^{(n)} = 1$ より,

$$\sum_{i,j} f(t_{ij}) \geq a_0 M^2 \quad (4)$$

また条件 (1) と, $i \neq j$ の時 $t_{ij} \in [-1, z]$ であることから, 和 (3) は $i=j$ の時だけを足したほうが大きい. よって,

$$M f(1) \geq \sum_{i,j} f(t_{ij}) \geq a_0 M^2.$$

これから欲しかった不等式が得られる.

[証明終]

3 An extension of Delsarte method

この節で Musin による Delsarte method の拡張を紹介する. Delsarte method では多項式に $[-1, z]$ 上では負の値をとるように条件をつけていたが, 拡張ではこの条件をはずし, その代わりに幾何的考察を行っている.

命題 2.1 の条件及びその証明の中の記法をそのまま用いることにするが, 多項式 $f(t)$ には条件 (1) は仮定しない.

$$A = [-1, z] \cup \{1\}, A_+ := \{t \mid t \in A, f(t) > 0\}$$

とする. この時,

$$\sum_{i,j} f(t_{ij}) \geq a_0 M^2$$

の証明には条件 (1) は使っていないのでそのまま成り立つ. それぞれの i に対して,

$$F_i(X) := \sum_{j: t_{ij} \in A_+} f(t_{ij})$$

と置くと, $f(t_{ij})$ の正のものだけ足しているので明らかに

$$\sum_{i,j} f(t_{ij}) \leq \sum_{i=1}^M F_i(X)$$

が成り立つ. 以下それぞれの $F_i(X)$ を評価することを考える.

定義 3.1 ([12]). m を自然数とし, $Y = \{y_0, \dots, y_m\} \subset S^{n-1}$ は次の条件を満たすとする:

$$y_i \cdot y_j \leq z \quad (\forall i, j, i \neq j), \quad f(y_0 \cdot y_i) > 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (5)$$

この時,

$$h(Y) := f(1) + f(y_0 \cdot y_1) + \dots + f(y_0 \cdot y_m), \quad h_m := \max_{\substack{Y \text{ は (5) を満たす} \\ |Y|=m+1}} h(Y).$$

とする. μ を (5) を満たす Y が存在するような m の最大値とし,

$$h_{\max} := \max\{h_0, \dots, h_\mu\}$$

と定義する.

この時明らかに全ての $F_i(X)$ は $h_{\max}$ 以下であるので,

$$a_0 M^2 \leq F(X) \leq \sum_{i=1}^M F_i(X) \leq M h_{\max}.$$

が成り立つ. 以上から次の Delsarte method の拡張が得られる.

命題 3.1 (An extension of Delsarte method [12]). $z \in [-1, 1]$, $X \subset S^{n-1}$ を spherical z -code とする. また $a_0 > 0$, $a_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, d$) に対して $f(t) = \sum_{k=0}^d a_k G_k^{(n)}$ とおく. この時, $|X| \leq h_{\max}/a_0$

注意 1. 実際命題 3.1 は Delsarte method の拡張になっている. もし条件 (1) が成り立っているとすると, $\mu = 0$ となり, $h_{\max} = h_0 = f(1)$ となるからである. 命題 3.1 においては良い upper bound を求める為に探す多項式の条件が命題 2.1 よりも弱くなっているため, Delsarte のものよりも良い upper bound が得られる可能性がある. 実際に $n = 3$, $n = 4$ に対しては改善に成功している.

4 A class of f for an extension of Delsarte method

命題 3.1 の任意の f に対して, $h_{\max}$ を求めるのは非常に難しいので, 探す f の類を少し限定する.

$t_0 < -z \leq 0$ を一つ固定する. この時 f は次の条件を満たすとする.

$$f(t) \leq 0 \ (t \in [t_0, z]), \ f(t) \text{ は } [-1, t_0] \text{ 上単調減少関数} \quad (6)$$

$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset S^{n-1}$ は (5) を満たすとし, Y の幾何を考える.

$y_0^* := -y_0$, $\phi_i := \arccos(y_0^* \cdot y_i)$, $\phi_{ij} := \arccos(y_i \cdot y_j)$, $\psi := \arccos(z)$, $\phi_0 := \arccos(-t_0)$ とおく. $Q_m := \{y_1, \dots, y_m\}$ とすると, $f(t) \leq 0 \ (t \in [t_0, z])$ と $f(y_0 \cdot y_i) > 0 \ (1 \leq i \leq m)$ より, Q_m の点は全て y_0^* から ϕ_0 以内の距離にある. 特に Q_m は y_0^* を中心とする半球面上にある.

$C \subset S^{n-1}$ が convex であるとは C の任意の 2 頂点 $x, y (x \neq \pm y)$ に対して, x, y を端点とする球面弧 $\text{arc}(x, y)$ が C に含まれる時をいう.

半球面に含まれている S^{n-1} の部分集合 Z に対して, Z を含む最小の convex 集合が考えられるが, それを $\text{Conv}(Z)$ で表す. $\Delta_m = \text{Conv}(Q_m)$ とする.

定義 4.1 (optimal). $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset S^{n-1}$ は (5) を満たすとする. この時, Y が optimal であるとは, $h(Y) = h_m$ でかつそのような Y の中で ϕ_{ij} が ψ になるような (i, j) の pair の個数が最大であるときに言う.

注意 2. optimal な Y が必ず存在することは位相空間論を考えれば明らかである. 従って我々は h_m を求めるときは常に optimal 集合だけを考えればいいことになる.

次の補題は optimal 集合の形がかなり限定されることを言っている.

補題 4.1. $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset S^{n-1}$ を optimal 集合であるとする. この時次が成り立つ.

- (i) $y_0^* \in \Delta_m$ である. また Q_m の任意の点は Δ_m の頂点になっている.
- (ii) $m \leq n$ の時, Δ_m は辺の長さ ψ の正則 $(m-1)$ -単体になっている.
- (iii) $m > n$ の時, Q_m の任意の点から距離 ψ に少なくとも $n-1$ 個の Q_m の点が存在する.

注意 3. 補題 4.1 は Musin の現在の preprint 中の Lemma 1 であるが, Lemma 1 の (ii), (iii) に対する証明は厳密とは言いがたいと思われる. しかし我々は $\tau_3 = 12$, $\tau_4 = 24$ の証明に必要となる特別な場合にだけは厳密な証明を与えることができた. すなわち次の場合には補題 4.1 の (ii), (iii) は正しい:

- (1) $n = 3$, $z = 1/2$, $t_0 \leq -0.5907$
- (2) $n = 4$, $z = 1/2$, $t_0 \leq -0.6058$, $m \leq 5$

しかし特別な場合は示すことができたが、補題 4.1 は Musin の方法の応用に重要な役割を果たすので、一般的に正しいかどうかは重要な問題になってくる。

以下、補題 4.1 が成り立つものとして話を進める。

補題 4.1 により, optimal 集合 Y に対して Δ_m は形が大体決まることが解るので, Y を与えてから h_m を求めるのではなく, 逆に Δ_m の形を与えてから y_0^* を Δ_m のどこにおけば $h(Y)$ が最大になるかを考える. そこで $\Delta_m = \{y_1, \dots, y_m\}$ の形を与えた時に,

$$\Lambda_m(y) := \{y \in \Delta_m \mid y \cdot y_k \leq -t_0, 1 \leq k \leq m\}$$

とし, Λ_m 上の関数を次のように定義する:

$$H_m(y) := f(1) + f(-y \cdot y_1) + \dots + f(-y \cdot y_m)$$

明らかに,

$$h_m = \max_{y \in \Lambda_m} H_m(y)$$

が成り立つ。

5 How to find μ

この節で 3 節で紹介した μ の求め方を紹介する。

$X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ に対して, $\phi_{ij} = \arccos(x_i \cdot x_j)$, $\varphi(X) := \min\{\phi_{ij} \mid i \neq j\}$ とする. また自然数 M に対して

$$\varphi_n(M) := \max\{\varphi(X) \mid |X| = M, X \subset S^{n-1}\}$$

と定義する. $\varphi_n(M)$ は球面上のコード理論において研究されている値である. $\varphi_2(M) = 360^\circ/M$ は簡単にわかるが, 3 次元になるともうすでに難しくなる. 3 次元も $M \leq 12$ と $M = 24$ の場合は知られている [7]. 例えば, 7 頂点まで書くと,

$$\varphi_3(5) = \varphi_3(6) = 90^\circ, \varphi_3(7) = \cot(40^\circ) \cot(80^\circ) = 77.86954 \dots^\circ$$

となる。

$$\rho(z, \phi_0) := \arccos\left(\frac{z - \cos^2(\phi_0)}{\sin^2(\phi_0)}\right)$$

とおく. この時次が成り立つ。

補題 5.1 ([12]). $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset S^{n-1}$ は $\phi_{ij} \geq \psi$ ($i \neq j$), $\phi_i \leq \phi_0$ ($1 \leq i \leq m$) を満たすとする. この時, もし $\rho(z, \phi_0) > \varphi_{n-1}(M)$ ならば $m < M$ が成り立つ。

$n = 3, n = 4$ に対して補題 5.1 を適用して次の系が得られる。

系 5.1. $n = 4, z = 1/2, t_0 \leq -0.6058$ に対して, $\mu \leq 6$.

系 5.2. $n = 3, z = 1/2, t_0 \leq -0.5907$ に対して, $\mu \leq 4$.

6 $\tau_4 = 24$ and a new proof for $\tau_3 = 12$

この節で $\tau_3 = 12$ の新しい証明をのべ、また $\tau_4 = 24$ を証明する。まず $\tau_3 = 12$ を証明する。

定理 6.1. $\tau_3 = 12$

[証明]

$z = 1/2, t_0 = -0.5907$ とする。

$$f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 - \frac{1}{10}t - \frac{1}{200}$$

$$= P_0 + 1.6P_1 + 3.48P_2 + 1.65P_3 + 1.96P_4 + 0.1P_5 + 0.32P_9$$

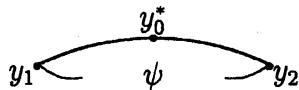
とおく。ここで $P_k = G_k^{(3)}$ である。この時 $f(t)$ は $[-1, t_0]$ 上単調減少で、 $[t_0, z]$ 上非正になる。

系 5.2 より、 $m \leq 4$ 以下の h_m を求めればよい。

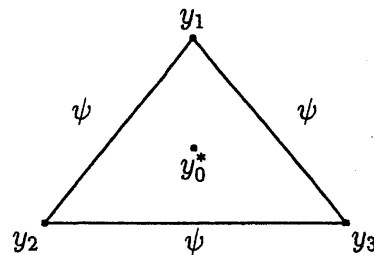
$m = 0$ の時は簡単で $h_0 = f(1) = 10.11$ となる。

$m = 1$ の時は f が $[-1, t_0]$ 上で単調減少なので、 $y = y_1$ の時に $H_1(y)$ は最大になる。よって $h_1 = f(1) + f(-1) = 12.88$ 。

$m = 2$ の時は Δ_2 は弧長 ψ の弧になる。以下、図は点の距離が ψ の時に辺で結んでいる。

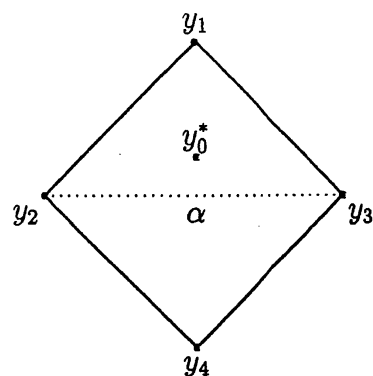


Q_2 の各点に実際に座標を置き、 $H_2(y)$ を最大にする y の位置を調べると、丁度弧の中心で最大になることがわかる。よって $h_2 = f(1) + 2f(-\cos(30^\circ)) = 12.8749$ 。



$m = 3$ の時は補題 4.1 により球面上の正三角形になる。

これも実際 Q_3 の各点に座標を置いて考えて、 $h_3 = 12.8721$ が求まる。



$m = 4$ の時は補題 4.1 により Δ_m は右の図のようになり, α が動く.

この図に対して, $H_4(y) = H_4(\alpha, y)$ が最大になるように, α と y についての自由度 3 の関数の最大問題を解いて, $h_4 = 12.4849$ が得られる. 従って,

$$h_{\max} = \max\{h_0, h_1, \dots, h_4\} = h_1 = 12.88$$

となり, 今 $a_0 = 1$ であるから, 命題 3.1 より $\tau_3 \leq 12$ がわかる.

[証明終]

定理 6.2. $\tau_4 = 24$

[証明] $z = 1/2$, $t_0 = -0.60794$ とする.

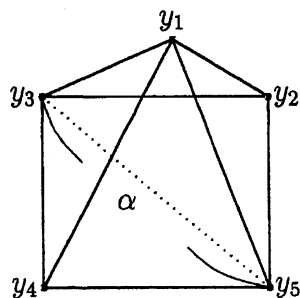
$$\begin{aligned} f(t) &= 53.76t^9 - 107.52t^7 + 70.56t^5 + 16.384t^4 - 9.832t^3 - 4.128t^2 - 0.434t - 0.016 \\ &= U_0 + 2U_1 + 6.12U_2 + 3.484U_3 + 5.12U_4 + 1.05U_9 \end{aligned}$$

とおく. ここで $U_k = G_k^{(4)}$ である. この時 $f(t)$ は $[-1, t_0]$ 上単調減少で, $[t_0, z]$ 上非正になる.

系 5.1 より, $m \leq 6$ 以下の h_m を求めればよい.

$m \leq n = 4$ の時は Δ_m は正則 $(m-1)$ 単体であるので, 定理 6.1 の証明の $m \leq 3$ の時と同様にして h_m が求められる. 計算すると $h_0 = 18.774$, $h_1 = 24.48$, $h_2 = 24.8644$, $h_3 = 24.8345$, $h_4 = 24.8180$ となる.

$m = 5$ の時は補題 4.1 により図は各頂点から少なくとも 3 本の辺が出ていることになる. しかし頂点数は 5 と奇数なので, ある頂点からは 4 本の辺がでてゐる. このことを考慮すると, 図は下の図のようになり, α が動く.



この図に対して, $H_5(y) = H_5(\alpha, y)$ が最大になるように, α と y についての自由度 4 の関数の最大問題を解いて, $h_5 = 24.6856$ が得られる.

$m = 6$ の時は下の補題 6.1 より, $h_2 > h_6$ が解るので考える必要はない. 従って,

$$h_{\max} = \max\{h_0, h_1, \dots, h_6\} = h_2 = 24.8644$$

となり, 今 $\alpha_0 = 1$ であるから, 命題 3.1 より $\tau_4 \leq 24$ がわかる.

[証明終]

補題 6.1 ([12]). $h_6 < h_2$.

[証明] 背理法で示す. ある $Y_6 = \{y_0, y_1, \dots, y_6\}$ が存在し, $h(Y_6) \geq h_2$ を満たすと仮定する. $\phi_i := \arccos(y_0^* \cdot y_i)$ とし, 一般性を失うことなく $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_6$ としてよい.

$Y_5 := \{y_0, y_1, \dots, y_5\}$ とおく. この時,

$$f(-\cos \phi_6) \geq h_2 - h(Y_5) \leq h_2 - h_5$$

であるので,

$$\phi_6 \leq \alpha_0 = \arccos(-f^{-1}(0.1788)) = 48.3787^\circ$$

となる. 特に, $\forall \phi_k \leq \alpha_0$ が成り立つ.

一方,

$$\varphi_3(6) = 90^\circ, \quad \rho\left(\frac{1}{2}, 45^\circ\right) = 90^\circ$$

であるので, 補題 5.1 より $\phi_6 \geq 45^\circ$ となる. よって,

$$h(Y_6) \leq h(Y_5) + f(-\cos(45^\circ)) \leq 23.5389 + 0.4533 < h_2$$

ここで 2 番目の不等式は $h(Y_5)$ を t_0 を α_0 に変えて h_5 を計算し評価している. しかしこれは矛盾である.

[証明終]

定理 6.1, 定理 6.2 の証明の中でいくつか最大問題を解くとだけ言ってその詳細を書いていないが, Musin の論文で非常に巧妙にこの問題を解いているので, 原論文を読んでいたきたい.

7 Applications of Musin method

最後に定理の証明で用いた多項式をどのように求めたのかの説明と, Musin の方法の応用について述べる.

n, d, z, t_0, N が与えられているとする.

$$f = 1 + \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(t)$$

とおき, c_k ($1 \leq k \leq d$) は変数とする. 各係数 c_k は非負であり, f は $[-1, t_0]$ 以下単調減少であり, $f(t) \leq 0$ ($t \in [t_0, z]$) より, $\{c_k\}$ 達の不等式が得られる:

$$c_k \leq 0 \quad (1 \leq k \leq d) \quad (7)$$

$$f(a) > f(b) \quad (-1 \leq a < b \leq t_0) \quad (8)$$

$$f(t) \leq 0 \quad (t_0 \leq t \leq z) \quad (9)$$

但し不等式 (8), (9) については区間を N 等分しその等分点のみで不等式を考え, 有限個の不等式にする.

$m \leq n$ に対して Δ_m を正則 $(m-1)$ 単体として y_c としてその中心点を表すとする. この時, y_c と Δ_m の各頂点との内積は全て $\sqrt{\frac{1+(m-1)z}{m}}$ となるので, $H_m(y_c)$ は

$$H_m(y_c) = f(1) + mf \left(-\sqrt{\frac{1+(m-1)z}{m}} \right)$$

となる. 新しい変数 F_0 を導入し,

$$f(1) + mf \left(-\sqrt{\frac{1+(m-1)z}{m}} \right) \leq F_0 + f(1) \quad (10)$$

とおく. また $m = 2n-2$ の時, Δ_m を $(n-1)$ 次元 regular spherical octahedron とし, 同様にその中心を y_c とする. この時, y_c と Δ_m の各頂点との内積は全て $\sqrt{z}$ となるので, $H_m(y_c)$ は

$$H_m(y_c) = f(1) + mf(-\sqrt{z}) \leq F_0 + f(1) \quad (11)$$

と置く.

変数 $\{c_k\}$, F_0 についての不等式 (7), (8), (9), (10), (11) の下, 一次式 $E = 1 + F_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_d = F_0 + f(1)$ を最小にするという線形計画法を解いて出てきたのが定理の証明で用いられた多項式である.

定理 6.1, 定理 6.2 の証明では $h_{\max}$ の値が正則単体から出てきているので, 線形計画法で求めた一次式の最小値 E が $h_{\max}$ を与えているが, 一般には E は $h_{\max}$ を与えないかもしれない. なぜなら補題 4.1 が一般的に成り立つかどうかまだ解らないし, $m \leq n$ に対して Δ_m が正則単体になるかどうか解らない. また補題が成り立っていても $H_m(y)$ を最大にする y が中心 y_c になるとは限らないからである. しかし我々は E が $h_{\max}$ に近い値を取るのではないかと期待している.

Delsarte method では9次元と11次元の kissing number に対して,

$$306 \leq \tau_9 \leq 380, \quad 500 \leq \tau_{10} \leq 595$$

が得られている. しかし上の線形計画法を $n = 9, n = 10$ に対して解くと

$$n = 9: \deg f = 11, E = 367.8619, t_0 = -0.57$$

$$n = 10: \deg f = 11, E = 570.5240, t_0 = -0.586$$

となる. この結果は τ_9, τ_{10} の upper bound が大幅に改善できる可能性があることを示している. しかし $n = 5, 6, 7$ についてはそれは改善は難しいようである.

また球面上のコード理論への応用もある. 頂点数が M の S^{n-1} 上の spherical z -code が存在する必要十分条件は $\varphi_n(M) \geq z$ である. よって $\tau_3 = 12$ は $\varphi_3(13) < 60^\circ$ が解る. しかし $z = \cos(59.4^\circ)$ に Musin の方法を用いて, 13 頂点の spherical z -code は存在しないことがわかる. よって $\varphi_3(13) < 59.4^\circ$ と upper bound を改善できる.

同様に Arestov-Babenko[2] によって求められた $\varphi_4(24) < 61.41^\circ$ を $\varphi_4(24) < 60.5^\circ$ まで, $\varphi_4(25) < 60.5^\circ$ を $\varphi_4(25) < 59.81^\circ$ まで改善できる. 実際 Musin の方法は種々の場合において Fejes Tóth bound や Coxeter bound よりもいい bound を与える.

Acknowledgement. Musin のこの論文の存在を筆者に教えて下さり, また論文を紹介する場を与えてくださった坂内英一先生に感謝いたします. また筆者はこの報告に用いた全ての図を作ってくれた徳永元康君にも感謝します.

参考文献

- [1] V.V. Arestov and A.G. Babenko, On Delsarte scheme of estimating the contact numbers, *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* **219**, 1997, 36-65.
- [2] V.V. Arestov and A.G. Babenko, On kissing number in four dimensions, in Proc. Conf. memory of Paul Erdős, Budapest, Hungary, July 4-11, 1999, A. Sali, M. Simonovits and V.T. Sós(eds), *J.Bolyai Math. Soc.*, Budapest, 1999, 10-14.
- [3] Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガーフェアラーク東京, 1999.
- [4] E. Bannai and N.J.A. Sloane, Uniqueness of certain spherical codes, *Can. J. Math.* **33** (1981), 437-449.
- [5] H.S.M. Coxeter, An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size, *Proc. of Symp. in Pure Math. AMS.*, **7**(1963), 53-71= Chap. 9 of H.S.M. Coxeter, *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois Press, Carbondale II, 1968.

- [6] Ph. Delsarte, Bounds for unrestricted codes by linear programming, *Philips Res. Rep.*, **27**, 1972, 272-289.
- [7] T. Ericson, V. Zinoviev, *Codes on Euclidean Spheres*, North-Holland Math. Lib. 2001.
- [8] P.R. Halmos, *Measure Theory*, New York, D. van Nostrand, 1954.
- [9] W.Y. Hsiang, The geometry of spheres , *Differential Geometry, World Scientific, River Edge, NJ*, 1993, 92-107.
- [10] J. Leech, The problem of the thirteen spheres, *Math. Gazette* **41** (1956), 22-23.
- [11] V.I. Levenshtein, On bounds for packing in n -dimensional Euclidean space, *Sov. Math. Dokl.* **20**(2), 1979, 417-421.
- [12] O. Musin, The kissing number in four dimensions, preprint.
- [13] A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, New upper bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions, *J. of Combinatorial Theory* **A26**(1979), 210-214.
- [14] K. Schütte and B.L. van der Waerden, Auf welcher Kugel haben 5,6,7,8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz?, *Math. Ann.* **123**(1951), 96-124.
- [15] 数学辞典 (第3版), 日本数学会編集, 岩波書店.
- [16] M. Takeuchi, 現代の球関数, 岩波書店数学選書, 1974.