

標数2の Kummer 曲面について

東北大理 桂 利行

A を標数 p の代数的閉体 k 上の Abelian 曲面 (i.e. 2次元 Abelian 多様体) とする。 A の inversion を ι ($\iota(u) = -u$) とし, 商多様体 A/ι を考える。標数 $p \neq 2$ ならば, A/ι の minimal non-singular model が K3 曲面 (標準因子が自明的な regular 曲面) になることはよく知られている。

標数 $p=2$ の時には, 群 $G = \{\text{id}_A, \iota\} \cong \mathbb{Z}/2$ の作用は "wild action" となって 少し変わった現象が起こる。T. Shioda は A が2つの楕円曲線の直積の場合にこの現象を解析し, 次の結果を得た (cf. T. Shioda [6])。

(i) A が2つの supersingular な楕円曲線の直積に同型ならば, A/ι は有理曲面である。

(ii) それ以外の場合には, A/ι の minimal non-singular model は K3 曲面である。

さらに, 次のような問題を提起した。

(i) A が位数 2 の点を持たない時, $A/\mathbb{C}$ は有理曲面であるか?

(ii) A が位数 2 の点を持つ時, $A/\mathbb{C}$ の *minimal non-singular model* は $K3$ 曲面であるか?

本稿では これらの問に対する肯定的解答を与え, さらに $A/\mathbb{C}$ の特異点の性質を調べる。詳細は後に発表するので, ここでは証明を省略し, 結果とそれに用いられた用語の説明をするにとどめる。

本稿を準備するにあたり, これらの問題を著者に与え, また, 適切な助言をして下さった Professor T. Shioda に感謝します。また, 助言と激励を惜まなかった Professor K. Ueno に感謝します。

§ 1. 特異点について.

S を 孤立特異点 v を持つ曲面とする。morphism $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S$ で, $\tilde{S}$ が non-singular, φ が proper birational なるものを S の desingularization とする。 v の逆像 $\varphi^{-1}(v)$ の support である reduced curve を X と書き, $\{X_i\}$, $i=1, \dots, n$ を X の irreducible components とする。点 v に於ける局所環を $\mathcal{O}_v$ とかく。 $\mathcal{O}_v$ の arithmetic genus を

$$p_a(\mathcal{O}_v) = \sup p_a(Z)$$

と定義する。ただし、右辺に於て、 Z は support が X に含まれる positive divisor 全体を動くものとし、 $p_a(Z)$ は Z の arithmetic genus を表わすものとする。

定義 (M. Artin [1], E. Wagnreich [7]). $p_a(\mathcal{O}_v) = 0$ であるとき v を rational singular point という。 $p_a(\mathcal{O}_v) = 1$ であるとき v を elliptic singular point という。

Z_0 を M. Artin [1] の意味の fundamental cycle (i.e. $(Z \cdot X_i) \leq 0 \quad i=1, \dots, n$ をみたす positive divisor のうち最小のもの) とすると

$$(i) \quad p_a(\mathcal{O}_v) = 0 \iff p_a(Z_0) = 0 \iff R^1 \varphi_* (\mathcal{O}_Z) = 0,$$

$$(ii) \quad p_a(\mathcal{O}_v) = 1 \iff p_a(Z_0) = 1$$

が成立する。

§ 2. 結果

定理 1. 次の 3 条件は同値である。

- (i) A は supersingular な Abel 曲面である。
- (ii) $A/\mathbb{C}$ は有理曲面である。
- (iii) $A/\mathbb{C}$ の特異点は elliptic singular point である。

定理 2. 次の 3 条件は同値である。

- (i) A は non-supersingular な Abel 曲面である。
- (ii) $A/\mathbb{C}$ の minimal non-singular model が K3 曲面である。

る。

(iii) A/ℓ の特異点が *rational singular point* である。

A の 2 等分点のなす群を ${}_2A_{\text{red}}$ とかく。

定理 3. A/ℓ の特異点は次のように分類される。

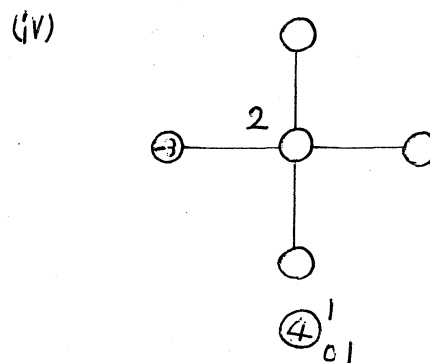
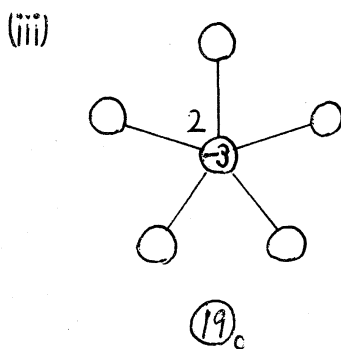
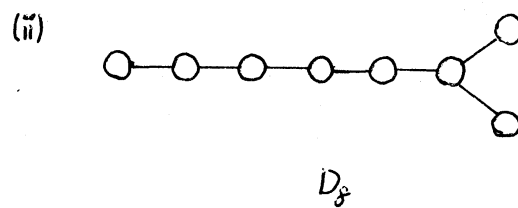
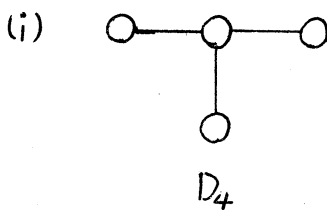
(i) ${}_2A_{\text{red}} \cong \bigoplus^2 \mathbb{Z}/2$ ならば *rational double point of type D_4* 。

(ii) ${}_2A_{\text{red}} \cong \mathbb{Z}/2$ ならば *rational double point of type D_8* 。

(iii) A が *supersingular* な *Abel* 曲面で 2 つの楕円曲線の直積に同型ならば, *elliptic double point of type $(19)_c$* (cf. P. Wagreich [7])。

(iv) A が *supersingular* な *Abel* 曲面で 2 つの楕円曲線の直積には決して同型にならないならば, *elliptic double point of type $(4)_{c1}^1$* (cf. P. Wagreich [7])。

各々の *type* の *configuration* は次のとおりである。



ただし, $\bigcirc$ は非特異有理曲線を表わし, $\textcircled{-3}$ はその self-intersection number が -3 であることを表わす。何も書いていない所は self-intersection number が -2 である。直線で結ばれた2個の $\bigcirc$ は, transversal に交わっている。 $\bigcirc$ の左肩の数字は multiplicity を表わす。何も書いていない所は multiplicity 1 である。

最後に ある種の elliptic surface の構造を問題にする。

Local-local な group scheme

$$\mathcal{A}_2 = \text{Spec } k[T]/(T^2),$$

$$\text{multiplication } m: \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_2$$

$$m^*(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$$

を考える。 $\text{Hom}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2) \cong k$ だから, $\text{Hom}(\mathcal{A}_2, A)$ は自然に k 上の vector space とみなせる。そこで,

$$a(A) = \dim_k \text{Hom}(\mathcal{A}_2, A)$$

と定義する。

$\text{char } k = 2$ の場合には supersingular な楕円曲線は $E: y^2 + y = x^3$ だけであるから, F. Oort [5] をつかって, A を supersingular な Abel 曲面とすると,

$$(i) \quad a(A) = 2 \iff \exists \varphi: A \cong E \times E,$$

(ii) $a(A) = 1 \iff A$ は楕円曲線の直積に分解しない, が成立する。(iii) の場合にも $\mathcal{A}_2$ の $E \times E$ への適当な埋込みを

と、て

$$\exists \varphi: A \cong E \times E / \alpha_2$$

が成立する。

(i) の場合には $p_1: E \times E \rightarrow E$ なる第一成分への射影から自然に

$$\begin{array}{ccc} \pi: E \times E / \mathcal{L} & \longrightarrow & E / \mathcal{L} \\ \text{SII} & & \text{SII} \\ A / \mathcal{L} & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

なる elliptic fiber space の構造をうる。

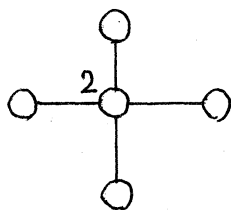
(ii) の場合には $p_1: E \times E / \alpha_2 \rightarrow E / \alpha_2$ なる第一成分への射影から自然に

$$\pi: A / \mathcal{L} \longrightarrow E / \mathcal{L} \cong \mathbb{P}^1$$

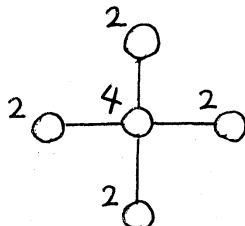
なる elliptic fiber space の構造をうる。

$A / \mathcal{L}$ は ただ 1 つの特異点を持っているが、(i)(ii) いずれの場合にもそれを解消して、第 1 種例外曲線を含ませ $\mathbb{P}^1$ 上の elliptic surface をつくることができる。それを $K_{M\varphi}(A)$ とかく。この曲面の singular fiber は φ のとり方によらず ただ 1 つで、(i) の場合には type I_0^* , (ii) の場合には $2I_0^*$ (i.e. type I_0^* の multiple fiber) である [cf. K. Kodaira [3]]。

(i)



(ii)



A が non-supersingular な Abel 曲面 の時には, $A/\mathbb{C}$ から minimal resolution によって得られる曲面を $K_m(A)$ とかくことにすれば 次の定理を得る。

定理 4. (i) A が supersingular ならば, Picard number $\rho(K_m(A)) = 10$ 。

(ii) A が non-supersingular ならば, Picard number $\rho(K_m(A)) = \rho(A) + 16$ 。

文献

- [1] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. Vol. 166, 76-102 (1966).
- [2] T. Katsura, On Kummer Surfaces in Characteristic 2, in preparation.
- [3] K. Kodaira, On compact analytic surfaces. II, Ann. of Math., 77, 563-626 (1963).
- [4] T. Ohashi, 標数 2 の クンマー曲面について. 修論, University of Tokyo, 1974.
- [5] F. Oort, Which abelian varieties are products of elliptic curves? To appear.
- [6] T. Shioda, Kummer surfaces in characteristic 2. Proc. J. Acad. Vol. 50, No. 9 (1974).

- [7] P. Wayreich, *Elliptic singularities of surfaces*. Amer. J. Math. 92, 419 - 454 (1970).