

統計流体力学と量子電気力学の相似点と相違点

名古屋大学 桑原 真二

§ 1. まえおき

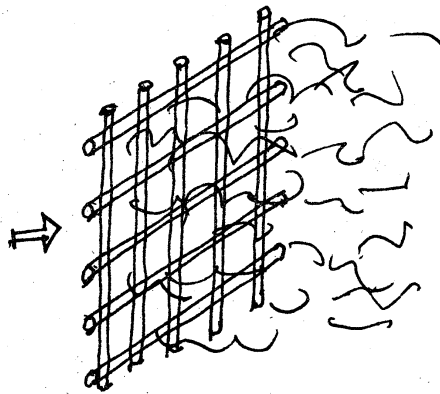
最近、乱流の統計理論において量子電気力学 (QED) の手法、とくにくりこみの概念およびそれによる数学的手法が用いられるようになった。しかし、乱流は量子電気力学的現象の座にある物理的意味を適確には握し、その間の数学的構造の相似点に着目して、使用するのではなくて、意味のない sophistication におちいらないとも限らない。この論文では、そのような観点に立ち、その一歩として、2, 3 の相似点、相違点を指摘する。

まず両者の対象とする物理現象を示そう (第 1, 2 図)。
統計流体力学 (SHD) は平均流と乱れとの相互作用, QED は電子と光子との相互作用をとりあつかう。平均流, 電子は性格の割合にはっきりした対象であり、乱れ、光子は甚だ波動的性格が強く、発生、消滅をくりかえしている。

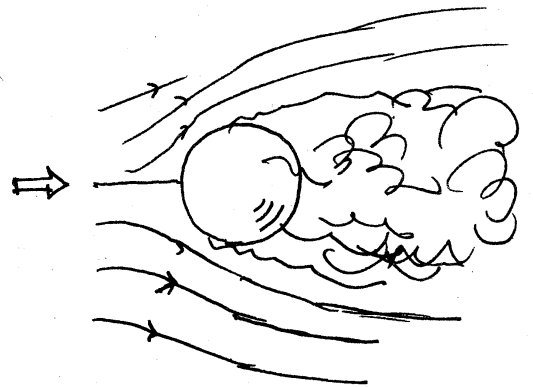
§2. SHD 及 α -QED の数学的構造

古典統計力学では力学変数を確率変数とみなし、確率空間 (= 相空間, phase space) における力学変数の分布 (分布密度関数) を対象とする。力学変数は Hamilton の方程式によって記述され、物理的に意味のある観測量は、力学変数の関数である対応する量の統計的平均値としてあらわされる。

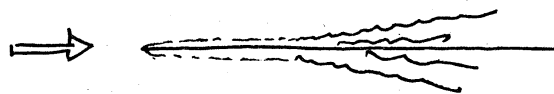
SHD でも数学的構造は古典統計力学と全く同じである。



(a) 格子の後の乱流



(b) 球の物体 (球) の後流

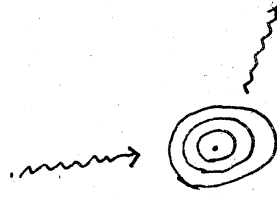
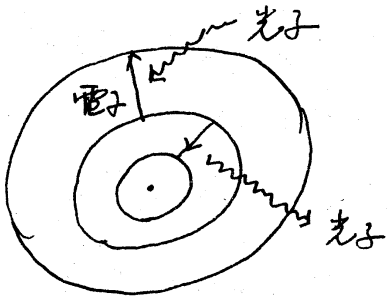


(c) 境界層乱流

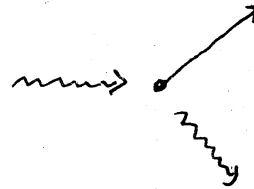


(d) 内部乱流 (Hagen-Poiseuille の乱流)

図1 統計流体力学 (乱流) の対象の典型的な例

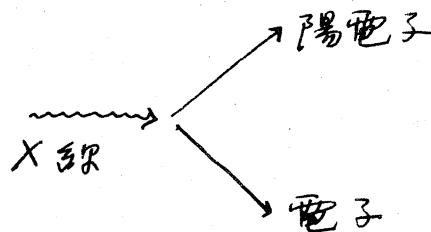
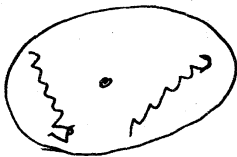


(a) 原子による光子の吸収, 放出 (b) 原子による光子の散乱



(c) Rutherford 散乱

(d) Compton 散乱



(e) スペクトル線の中,
hyperfine structure

(f) pair creation

第2回 量子電気力学の対象とする現象

ここで異なるのは力学変数が离散自由度でなく連続自由度の連
度場 $\psi(x)$ であり、それらを支配する基礎方程式が Navier-

Stokes 方程式である。力学変数が連続自由度であるために、相空間も、离散次元の空間でなく（ソレノイタル系, $\text{div } v = 0$ ） $v(x)$ のはる関数空間となる。1つの力学系の時間的发展はその相空間の中の1点の運動と考えられ、その運動は N.-S. 方程式によって支配される。N.-S. 方程式を圧力を消去して速度だけで表わせば

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} = & -v_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \nu \nabla^2 v_i + \iiint_V G \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (v_m' \frac{\partial v_n'}{\partial x_m}) \right) d^3x' \\ & + \iint_{\partial V} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_m' \frac{\partial v_i'}{\partial x_m} - \nu \nabla'^2 v_i' \right) \frac{\partial G}{\partial n'} dS \equiv Q_i(v) \quad (2.1) \end{aligned}$$

となる。ここで $v_i' = v_i(x')$ 等であり、 V は流れの場全体、 ∂V はその境界である。この N.-S. 方程式では、流れの場全体での速度分布、境界での速度及びその時間微分がわかれば場全体のその後の速度の発展が定められるという形式をとっている。G はうろす演算子に対する Green 関数:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G(x, x') &= \delta(x - x') \quad x \in V \\ G(x, x') &= 0 \quad x' \in \partial V \quad x (\neq x') \in \partial V \cap V \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

である。

相空間における確率分布関数 $P = P[v(x), t]$ とすれば一般化された Liouville 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \iiint \frac{\delta}{\delta v_i(x)} (Q_i(v(x)) P[v, t]) d^3x = 0 \quad (2.3)$$

となる。Pの一種の Fourier 変換をなす特性汎関数:

$$\Xi[\bar{z}(x), t] = \int e^{i(\bar{z} \cdot v)} P[v, t] \delta v \quad (2.4)$$

をもちければ L-方程式は Hopf 方程式に変換される:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} = i \int \bar{z}_L Q_L \left(\frac{\partial}{i \partial \bar{z}_L} \right) \Xi d^3x \quad (2.5)$$

QEDでは電磁場 $(A_\mu) = (A_1, A_2, A_3, i\phi)$ に対して Maxwell の方程式及び電子場 $(\psi_\mu) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ に対する Dirac 方程式:

$$\square A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu \quad (2.6)$$

$$\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi + \kappa \psi = 0 \quad \kappa = \frac{mc}{\hbar} \quad (2.7)$$

$$j_\mu = ie \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (2.8)$$

を基礎とす。2) で $(x_\mu) = (x_1, x_2, x_3, i ct)$, γ_μ は Dirac 行列で

$$\gamma_4 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_L \\ -\sigma_L & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (2.9) \\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

と示すことが出来る。 $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$ ($*$ は Hermite 共役) は ψ の Dirac 共役である。その他一般の慣用にしたがう。

相互作用のある輻射場と電子場に対する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = H \Psi' \quad (2.10)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_I, \quad \bar{H}_0 = \bar{H}_R + \bar{H}_M \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_R &= \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_4} - \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)^2 + (\text{rot } A)^2 \right\} d^3x \\ \bar{H}_M &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi d^3x \\ \bar{H}_I &= -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3x \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

で表わされる。

ここでSFDとQEDとの関係を考えれば、力学系の運動方程式としては、(2.1)と(2.6), (2.7)とが対応し、統計法則を支配する方程式として、(2.3)又は(2.5)と(2.10)とが対応している。SFDでは速度場 $v_i(x)$ は平均値と乱れの和であり、明白な分離が常に可能であるわけではない。それに対し、QEDでは輻射場 A_μ と電子場 ψ_μ とは始めから完全に分離されている。

場の方程式(2.6), (2.7)から粒子的描像をうけるためには ψ_μ, A_μ がそれぞれ、反交換(フェルミオン), 交換関係(ボゾン)をみたす演算子とみなす, すなわち第2量子化を行う, 必要がある。

$$\left. \begin{aligned} [\psi_\lambda(x), \psi_\mu^*(x')]_+ &= \delta_{\lambda\mu} \delta(x-x') \\ [\psi_\lambda(x), \psi_\mu(x')]_+ &= [\psi_\lambda^*(x), \psi_\mu^*(x')]_+ = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} [A_\lambda(x), \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(x')] &= i\hbar c^2 \delta_{\lambda\mu} \delta(x-x') \\ [A_\lambda(x), A_\mu(x')] &= [\frac{\partial}{\partial t} A_\lambda(x), \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(x')] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$\psi, \psi^\dagger$ 及び $A_\mu, \frac{1}{i\hbar c} \frac{\partial}{\partial t} A_\mu$ は各々正準共役な関係にある。

輻射場と相互作用のない Dirac 方程式の解は平面波で表わされ4つの独立な固有解がある。それらと

$$u^{(2)}(p) e^{iP_\mu x_\mu / \hbar}, v^{(2)}(p) e^{-iP_\mu x_\mu / \hbar} \quad (2=1,2) \quad (2.15)$$

とかく。ここで

$$(P_\mu) = (p, iE_p/c), \quad E_p = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (2.16)$$

である。これらは、 u が電子と、 v が陽電子と、 $2=1,2$ はスピンの上、下を表わすような固有関数になっている。これらによって電子場を展開し

$$\psi = \psi^- + \psi^+, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}^- + \bar{\psi}^+ \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi^-(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \sum_{2=1,2} a^{(2)}(p) u^{(2)}(p) e^{iP_\mu x_\mu / \hbar} \\ \psi^+(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \sum_{2=1,2} b^{(2)}(p) v^{(2)}(p) e^{-iP_\mu x_\mu / \hbar} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

とおくと、 a, b は演算子として次の交換関係を満足する：

$$\left. \begin{aligned} [a^{(2)}(p), a^{(2')\dagger}(p')]_+ &= \delta_{22'} \delta(p-p') \\ [b^{(2)}(p), b^{(2')\dagger}(p')]_+ &= \delta_{22'} \delta(p-p') \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

同様に輻射場もやはり相互作用のない輻射場の固有解である平面波で展開する：

$$A_\mu = A^+ + A^- \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} A_\lambda^+(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} a_\mu^\dagger(k) e^{-iK_\mu x} \\ A_\lambda^-(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} a_\mu(k) e^{iK_\mu x} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$(K_\mu) = (k, i k) \quad k = |k| \quad]$$

となり。 a_μ, a_μ^* は演算子で

$$[a_\lambda(k), a_\mu^*(k')] = \delta_{\lambda\mu} \delta(k-k') \text{ etc.} \quad (2.22)$$

を満足する。

$a^{(1)*}(p), b^{(1)*}(p), a_\mu^*(k)$ は電子, 陽電子, 光子に対する発生演算子 (C.O.) となり, $a^{(1)}(p), b^{(1)}(p), a_\mu(k)$ はそれらに対する消滅演算子 (A.O.) となる。そこで $|0\rangle$ を真空の状態ベクトルとすれば

$$a^{(1)}(p)|0\rangle = 0, \quad b^{(1)}(p)|0\rangle = 0, \quad a_\mu(k)|0\rangle = 0 \quad (2.23)$$

となり, 単位体積中の電子 $(p_1, r_1), (p_2, r_2), \dots$ 陽電子 $(q_1, s_1), (q_2, s_2), \dots$, 光子 $(k_1, \mu_1), (k_2, \mu_2), \dots$ がある状態は

$$\begin{aligned} & a^{(1)*}(p_1) a^{(1)*}(p_2) \dots b^{(1)*}(q_1) b^{(1)*}(q_2) \dots \\ & a_{\mu_1}^*(k_1) a_{\mu_2}^*(k_2) \dots |0\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

で表わされる。

そこで

$$a_0^*(k) = -i a_4(k), \quad a_0(k) = -i a_4^*(k) \quad (2.25)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} n^-(p, r) &= a^{(1)*}(p) a^{(1)}(p) \\ n^+(p, r) &= b^{(1)*}(p) b^{(1)}(p) \\ n(k) &= a_0(k)^* a_0(k) \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

は電子, 陽電子, 光子に対する恒数演算子と看做す。

$\psi, \bar{\psi}, A_\mu$ は電子, 陽電子, 光子の A.O. に関係する部分, $\bar{\psi}^+, \psi^+, A_\mu^+$ はそれらの C.O. に関係する部分である。

§3. QED における数学的方法

以下, 自然単位 ($c = \hbar = 1$) を用いる。 (2.12) の相互作用の Hamiltonian 密度 $-\frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ を演算子とみるときには

$$\begin{aligned} H_1 &= \int d^3x \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu \\ &= \int d^3x A_\mu (\bar{\psi}^+ \gamma_\mu \psi^+ + \bar{\psi}^+ \gamma_\mu \psi^- - \psi^+ \gamma_\mu \bar{\psi}^- \\ &\quad + \bar{\psi}^- \gamma_\mu \psi^-) \end{aligned} \quad (3.1)$$

とみる必要がある。 $\int d^3x$ は $\int d^3x$ 種をあらわし, $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ の C.O., A.O. を別べかえて, C.O. を A.O. の左におくようにし, その符号 ε と

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{偶置換} \\ \text{奇置換} \end{array} \\ + & \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{フェルミオン} \\ \text{ボソン} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

と定めるのである。

相互作用する輻射場と電子場に対する Schrödinger 方程式 (2.10) は相互作用表示 $\Psi(t)$ で

$$\Psi'(t) = U'(t) \Psi(t) \quad U'(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (3.3)$$

なる子と

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \bar{H}(t) \Psi \quad \bar{H}(t) = U'^{-1} H U' \quad (3.4)$$

となる。この初期値問題に対する解は

$$\Psi(t) = U(t, t_0) \Psi(t_0) \quad (3.5)$$

の形に書くと

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{l-1}} dt_l \bar{H}(t_1) \bar{H}(t_2) \cdots \bar{H}(t_l) \quad (3.6)$$

となる。ここで S マトリックス R を

$$S = U(\infty, -\infty), \quad S = 1 + R \quad (3.7)$$

で定義する。

S マトリックスを区変形式で表わすと

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \cdots d^4 x_l T(H(x_1) \cdots H(x_l)) \quad (3.8)$$

となる。ここで T は T 種を表わし、 T 種は $H(x_m)$ ($m=1, \dots, l$)

を左から右へ左から右へならべ、それが偶置換ならは $+$ 、奇置換ならは $-$ とす。ここで contraction

$$\{A(x), B(y)\} = T(AB) - S(AB) \quad (3.9)$$

を定義する。Wickの定理によれば、演算子 $b_1, \dots, b_l$ の T 種は contraction と S 種の積で表わす：

$$T(b_1 \cdots b_l) = \sum_m \sum_n \varepsilon(m_1, \dots, m_l) \{b_{m_1}, b_{m_2}\} \{b_{m_3}, b_{m_4}\} \cdots$$

$$\dots \{b_{m_{2n-1}}, b_{m_{2n}}\} \delta(b_{m_{2n+1}}, \dots, b_{m_L}) \quad (3.10)$$

l 個の電子 $(p_1, s_1) \dots (p_L, s_L)$, m 個の陽電子 $(q_1, s_1) \dots (q_m, s_m)$, n 個の光子 $(k_1, \mu) \dots (k_n, \mu_n)$ の初期状態 Ψ_a から l' 個の電子, m' 個の陽電子, n' 個の光子の終状態 Ψ_b への遷移マトリックス R_{ba} , 遷移確率 W_{ba} は

$$R_{ba} = \langle \Psi_b | R | \Psi_a \rangle, \quad W_{ba} = |R_{ba}| \quad (3.11)$$

となる。すなわち S を $\langle \Psi_a | = \langle 0 | a^{(1)}(p_1') \dots a^{(2)}(p_L') b^{(s_1)}(q_1') \dots b^{(s_m)}(q_m') a_{\mu_1}(k_1') \dots a_{\mu_n}(k_n')$ と $| \Psi_a \rangle = a^{(1)}(p_1) \dots a^{(2)}(p_L) b^{(s_1)}(q_1) \dots b^{(s_m)}(q_m) a_{\mu_1}(k_1) \dots a_{\mu_n}(k_n) | 0 \rangle$ とはさんで行列成分を計算することになる。結局この展開 (3.8) の各項で $\langle \Psi_b |$ 中の A.O. に対応する C.O. と $| \Psi_a \rangle$ 中の C.O. に対応する A.O. だけが必ず値のみが遷移マトリックスにまいる。更にその各項に Wick の定理で展開し、contraction は

$$\left. \begin{aligned} \{A(x) A(y)\} & \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ x \quad y \end{array} \\ \{\psi(x) \bar{\psi}(y)\} & \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{x} y \end{array} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

S 積中の $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A(x)$ はつゞては

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) & \quad \xrightarrow{x} \\ \bar{\psi}(x) & \quad \xleftarrow{x} \\ A & \quad \text{~~~~~} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{時間} \\ \text{空間} \end{array} \quad (3.13)$$

と書くと展開の各項は $\longrightarrow$, ~~~~~ からなる グラフ となる

は Feynman グラフの規則である。そして $\rightarrow, \sim$ は各々起関数に対応し R_{ba} と計算することは Feynman グラフに対応する積分を実行することである。

§4. Burgers 乱流

前節で、 Ψ に対する一般解は、 S_{ba} (または R_{ba}) の実際の寄与するのは $\langle \Psi |$ 中の A.O. に対応する C.O. と $|\Psi_a\rangle$ 中の C.O. に対応する A.O. の項のみであることを見出した。これらに類似した数学的構造が Hopf 方程式の解析において現れ、これを示す。

ある種の Burgers 乱流では $u = u(x, t)$ に対する Burgers 方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

を u は u の Fourier 変換 $v(k, t)$ に対する方程式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \int_{-\infty}^{\infty} k' v(k-k') v(k') dk' + \nu k^2 v = 0 \quad (4.2)$$

の初期の乱流状態に対するその発展を論ずる。³⁾ (4.2) に対

する Hopf 方程式は

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + A \overline{\varphi} = 0 \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}[\overline{\varphi}(k), t] \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -\alpha_{21} k_2 + \nu D_1 k_1 \\ D_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{k_1} \overline{\varphi}(k_1) D_1 \\ D_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_1 \overline{\varphi}(k_2 + k_1) D_2 D_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$D_1 = \frac{\delta}{\delta \psi(k_1)}$$

である。\$\psi\$ の初期値として

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}[z] &= \psi(z, 0) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} K_{21} z_2 z_1\right) \\ K_{21} &= \iint_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_1 \hat{E}(k_2) \delta(k_2 + k_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

と置く。ここで \$\hat{E}(k)\$ は初期のエネルギー・スペクトルである。

Hopf 方程式 (4.3) を独立変数の変換によって, \$A\$ が波の間の相互作用の値のみを記述する "相互作用表示" を作り上げる事ができる:

$$\left. \begin{aligned} \zeta(k) &= \psi(k) e^{-\gamma k^2 t} \\ s &= t \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + A(s) \psi = 0 \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= -D_{21} k_2 e^{2k_2 k_1 s} \\ D_{21} &= \iint_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_1 \zeta(k_2 + k_1) D_2 D_1 \\ D_1 &= \frac{\delta}{\delta \zeta(k_1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

初期条件は

$$\left. \begin{aligned} \psi[s, 0] &= \hat{\psi}[z] = \exp\left(-\frac{1}{2} K_{21} s_2 s_1\right) \\ K_{21} &= \iint dk_2 dk_1 \hat{E}(k_2) \delta(k_2 + k_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

となる。

以下 \$s\$ と \$t\$ にあてはめる。(4.7) の解を

$$\Phi[S, t] = U(t, 0) \hat{\Phi} \quad (4.10)$$

と書くとき U は

$$\frac{dU}{dt} + A(t)U = 0 \quad (4.11)$$

を満足し、その解は

$$U(t, 0) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{l-1}} dt_l A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_l) \quad (4.12)$$

の形に書け、(3.4) と同形である。

ある時刻 t におけるエネルギー $E(k, t)$ は

$$\begin{aligned} E(k, t) \delta(k' + k) &= \left[\frac{\delta^2 \Phi}{\delta S(k') \delta S(k)} \right]_{S, S'=0} \\ &= \left[\frac{\delta^2}{\delta S' \delta S} U \hat{\Phi} \right]_{S, S'=0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

から求められる。そこで $U \hat{\Phi}$ の中で S について 2 次の項だけを取り出せばよい。なぜならば、2 次より低次の項は微分したとき落ち、高次の項は $S', S=0$ としたとき落ちるからである。これは前節で ρ による S の 2 項を抜き出したのと同じ考え方である。それ故、 $S \in C, 0, \frac{\delta}{\delta S} \in A, 0$ に対応させれば、2 項の関係がえられる。

§5. おわりに

以上、QED と SHD の相収束、相違点について論じた。前節で数学的相収束を指摘したが、物理的には重大な相違点

がある。QEDではくりこみを行えば、近似の数値ととれば十分であるが、 ϕ^4 Dでは非常に高次までとらなければ十分でない。あるいはこのような展開が収束するかどうかも確かでない。これは乱流での非線形相互作用が非常に強いためである。そこで、くりこみのような考えをつかって処理することが必要になると思われる。

参考文献:

- 1) Feynman, R.P.: Quantum Electrodynamics (1962, Benjamin)
- 2) ハイトラー, W. (江口克郎訳): 輻射の量子論^{上・下} (1957, 1958, 玄同書房)
- 3) 桑原真二: 教理講究録 No.120 (1971) p 124
- 4) 桑原真二: 統計力学力学 (1976, 法政懇話会)
- 5) 朝永, 福田, 福田, 沢田: 場の量子論 (1955, 岩波講座現代物理学)