

Perfectoid 空間論の基礎 (Foundations for theory of perfectoid spaces)

By

津嶋 貴弘 (Takahiro TSUSHIMA)*

Abstract

In this survey article, we explain the contents of [Sch, §1–§7]. Our main aim is to introduce the definition of perfectoid space and the outline of the proof of the tilting equivalence due to Scholze.

§ 1. 序論

この概説記事では、[Sch, §1–§7] の perfectoid 空間論について解説する。perfectoid 空間論は混標数の問題を等標数の問題に帰着するための強力な幾何学的な枠組みを与える。実際、perfectoid 空間論は信じられない様な衝撃的な応用を数多く持つ。それらの応用については [Ito] を見られたい。本稿では perfectoid 空間の定義を正確に述べ、tilting 同値の証明を紹介することを主な目的とした。tilting 同値は混標数における perfectoid 空間 X に対して tilt と呼ばれる等標数における perfectoid 空間 $X^\flat$ を関手的に作る方法を与える。これにより混標数の世界から等標数の世界に移行することができる。しかもその相方 $X^\flat$ は X と非常によく似た数論的性質を持つことがわかる。この意味で等標数も混標数も十分極限を取ると数論的に同じ様な振る舞いをするといった類いの現象を巧妙に捉えたものになっている。また、perfectoid 空間のお陰でこれまで取り扱えなかったある種のリジッド解析空間の逆極限も幾何的対象として取り扱えるようになった。[Sch, §1–§7] では大略、以下の三つのことが示されている。

- (a) perfectoid 空間を導入し、混標数における perfectoid 空間 X から tilt と呼ばれる等標数における perfectoid 空間 $X^\flat$ を定義した (tilting 同値)。

Received March 22, 2015. Revised July 2, 2015 and July 14, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14G22, 14G35.

Key Words: *perfectoid spaces, tilting equivalence.*

Supported by Japan Society for the Promotion of Science and in part by KAKENHI grant 15K17506.

*Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Chiba University, 1-33 Yayoi-cho, Inage, Chiba, 263-8522, Japan.

e-mail: tsushima@math.s.chiba-u.ac.jp

© 2017 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

(b) perfectoid 空間は解析が展開できる良い幾何学的対象とみなせることを示した (テイトの非輪状性定理)。

(c) X と $X^\flat$ はよく似た数論的性質を持つことを示した (これらのエタールサイトの同型)。

前述通り本稿では (a) については詳述する。(b), (c) の証明では (a) の tilting 同値が重要な役割を果たす。(b), (c) については紙幅の都合もあり主張と証明の方針を述べるにとどまった。但し、perfectoid 空間のエタールサイトの定義は本稿で述べる。これらの事柄の意味をより正確に説明するための導入として 0 次元の perfectoid 空間の特殊な場合を考える。この場合には [FW] においてノルム体の理論として研究されていた。 p を素数とする。 p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ を固定する。 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の中で次をみたす元 $\{p^{1/p^n}\}_{n=1}^\infty$ を取る。全ての自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$(p^{1/p^n})^{p^n} = p, \quad (p^{1/p^{n+1}})^p = p^{1/p^n}.$$

これらの元をすべて $\mathbb{Q}_p$ に添加した体を $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ と書く。

定理 1.1. $\mathbb{F}_p((t))$ 上の有限次分離拡大体の圏と $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ 上のそれとの間に標準的な圏同値が存在する。

以下この圏同値を与える関手の構成を述べる。 K を $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ の完備化とし、 $K^\flat$ を $\mathbb{F}_p((t))$ の完全化 $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ の完備化とする。拡大 $\mathbb{F}_p((t)) \subset \mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ は純非分離拡大なので $\mathbb{F}_p((t))$ 上の有限次分離拡大体の圏と $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ 上のそれは自然に圏同値である。 $K^\flat$ は完全体の完備化だから、完全体である。よって上の定理を示すためには、 K 上の有限次拡大体の圏と $K^\flat$ 上のそれとの間に標準的な圏同値が存在することを示せば十分である。 $K^\circ, K^{\flat\circ}$ をそれぞれ $K, K^\flat$ の付値環とする。 p を不定元 t で置き換えるというのが証明の大まかなアイデアである。次の同型が成立する。

$$K^\circ/p = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p \simeq \mathbb{F}_p[[t^{1/p^\infty}]]/t \simeq K^{\flat\circ}/t.$$

真ん中の同型は任意の正の整数 n に対して p^{1/p^n} を t^{1/p^n} に移す。 $K^\flat$ から K への t を p に送るような連続かつ積構造を保つ写像 $(\cdot)^\sharp: K^\flat \rightarrow K; x \mapsto x^\sharp$ が定義出来る。標数が違うので勿論和の構造は保たない。写像 $(\cdot)^\sharp$ の $K^{\flat\circ}$ への制限は写像 $K^{\flat\circ} \rightarrow K^\circ$ を誘導し、 $K^{\flat\circ}$ 上ではこの写像は次のような記述を持つ。任意の元 $x \in K^{\flat\circ}$ を一つ固定して、 $x^\sharp \in K^\circ$ を定義する。 $K^\flat$ は標数 p の完全体だから任意の非負整数 n について、 $K^\flat$ の任意の元 a の p^n 乗根が $K^\flat$ に唯一存在する。それを a^{1/p^n} と書く。先程の x に対して $x^{1/p^n} \in K^{\flat\circ}$ となることは容易にわかる。合成写像 $K^{\flat\circ} \rightarrow K^{\flat\circ}/t \simeq K^\circ/p$ による x^{1/p^n} の像の K° への持ち上げ x_n を取る。すると、列 $\{x_n^{p^n}\}_{n=1}^\infty$ は K° の中でコーシー列であることが示せるのでその極限を $x^\sharp \in K^\circ$ とおく。こうして作る $x^\sharp$ は持ち上げ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の取り方によらない。写像 $(\cdot)^\sharp$ を使うと次の様な積構造を保つ同相写像が得られる。

$$K^\flat \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{x \mapsto x^p} K; x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, \dots).$$

任意の有限次拡大体 $L/K^\flat$ に対して標準的に有限次拡大体 $L^\sharp/K$ を構成する。まず L が $K^\flat$ 上の多項式 $X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d = 0$ の分解体の場合を考える。これは $X^d + a_1^{1/p^n} X^{d-1} + \cdots + a_d^{1/p^n} = 0$ の分解体でもある。すると、 $X^d + (a_1^{1/p^n})^\sharp X^{d-1} + \cdots + (a_d^{1/p^n})^\sharp = 0$ の分解体は n を十分大きくすれば一定になっておりその体を $L^\sharp$ と定義する。このとき、ガロワ群の間の自然な同型 $\text{Gal}(L/K^\flat) \simeq \text{Gal}(L^\sharp/K)$ も得られる。一般の有限次拡大体の場合はそのガロワ閉包に対して上の構成を適用し、ガロワ群の部分群での不変体を対応させればよい。対応 $L \mapsto L^\sharp$ が関手であることと圏同値を誘導することが示せる。本論で逆関手 $L \mapsto L^\flat$ の構成が紹介される。これが 0 次元の時の (a), (c) の内容である。

この現象はもっと一般の体、perfectoid 体に一般化できる。 K が perfectoid 体であるとは、非離散的な値群を持つ高さ 1 の非アルキメデス付値を有する完備付値体で p 乗フロベニウス写像 $K^\circ/p \rightarrow K^\circ/p$; $\bar{x} \mapsto \bar{x}^p$ (K° は付値環) が全射になることとする。すると、上の例のように相方の役割をする標数 p の perfectoid 体 $K^\flat$ が存在して、 K 上の有限次拡大体の圏と $K^\flat$ 上のそれとの間に標準的な圏同値が存在することが示せる。(cf. 定理 3.6)。この $K^\flat$ のことを K の tilt と呼ぶ。 K が標数 p ならば $K^\flat$ は K と自然に同一視される。更に K 上の幾何学的対象である perfectoid 空間が定義できる。 K 上の perfectoid 空間 X に対して $K^\flat$ 上の perfectoid 空間 $X^\flat$ が定義される。これを X の tilt と呼ぶ。この対応 $X \mapsto X^\flat$ が K 上の perfectoid 空間の圏と $K^\flat$ 上の perfectoid 空間の圏の間の圏同値を与えるというのが (a) tilting 同値の内容である。更に上の定理は、 X 上のエタールサイトと $X^\flat$ 上のそれとの同型という形で一般化される (cf. 定理 7.6)。一般にエタールサイトはエタールコホモロジーを出力する。 X と $X^\flat$ のエタールサイトの同型からエタールコホモロジーの同型が導かれる。 X のエタールサイト、エタールコホモロジーは X の数論的な性質を内包、反映しているので (c) の様に言うことができる。perfectoid 空間は古典的なリジッド解析空間 ([BGR]) の一般化である Huber の adic 空間の特殊例になっている。Huber の adic 空間論の基本的な事実として、「標準的に定義される X 上の構造前層 $\mathcal{O}_X$ がある有限性の仮定のもとで層になる」という定理がある (cf. 定理 2.10)。これは古典的な Tate の非輪状性定理 ([BGR, §8.2 の Theorem 1]) の一般化である。ところが perfectoid 空間はこの Huber の定理の仮定の有限性をみたまないので、この定理からは構造前層 $\mathcal{O}_X$ が層になるかわからない。実際層になることが上述の tilting 同値の話を使って等標数の場合に帰着するという方針により [Sch, §5] で示される (cf. 定理 6.7)。このテイットの非輪状性定理は関数が良い振る舞いをすることを主張するので、perfectoid 空間はある程度由緒正しい幾何学的対象であることを保証している。これが (b) の意味である。

本稿の節ごとの内容とそれらの相関関係について簡単に述べる。前述通り perfectoid 空間は adic 空間の特殊例であるため、§2 において adic 空間について必要となる事項をまとめた。§3 では perfectoid 空間の基礎体である perfectoid 体 K を導入し、その tilt $K^\flat$ を構成する。その二つの有限エタールサイトが同型であることを主張する [FW] の定理を述べる。§4 では tilting 同値を示すために必要となる almost mathematics について簡単にまとめた。§5 では §2–§4 にもとづいて tilting 同値を証明する。§6 ではテイットの非輪状性定理の perfectoid 版を紹介し、その証明の方針を述べる。§7 では perfectoid 空間のエ

タールサイトを定義する。そして tilt のエタールサイトとの同型が成り立つ事を述べる。本稿の §6, §7 における命題の証明の詳細については原論文 [Sch, §6, §7] を見られたい。

Perfectoid 空間とその応用について [Fo], [Ha], [Sch2], [Sch3], [Sa] などの様々な観点からの優れたサーヴェイ論文がある。そちらも合わせて見られたい。

§2 を執筆する際には、[Hu1], [Hu2] のみならず 2011 年度京都大学数学教室で行われた三枝洋一先生による集中講義「リジッド空間のエタールコホモロジー」の講義ノートが非常に参考になった。玉原整数論集会で行われた perfectoid 空間の勉強会と東京大学で行ったその準備セミナー、京都大学で行われた勉強会が理解に大変役に立ったことも明記しておく。それらのセミナーの発表者・出席者の方々に感謝したい。§5 のテーマについて有益なコメントをしてくれた三原朋樹氏に感謝する。概説講演に推薦して下さった三枝洋一先生、斎藤毅先生、辻雄先生、講演の機会を下さったオーガナイザーの先生方に感謝の意を表したい。説明の書き方を明瞭にするための適切な提言をして下さり、多数の誤りにについても指摘して下さいった本稿の査読者の方に心から謝意を表したい。また編集委員である辻雄先生、高橋浩樹先生、星裕一郎先生から、誤解を招く表現や数学的な誤りについて多数のご指摘・ご指導を頂いた。この場を借りて心からの御礼を申し上げたい。

§ 2. Adic 空間

この節では、perfectoid 空間の土台となる Huber による adic 空間を定義することが目標である。以下、 $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする。

定義 2.1 ([Hu1, §1]). A を位相環とする。

1. A が adic ring である とは、 A のあるイデアル I が存在して、 A の位相が I 進位相であることである。

この I を A の 定義イデアル と呼ぶ。

2. A が f-adic ring である とは、 A の開部分環 A_0 であって相対位相に関して有限生成な定義イデアルを持つ adic ring となるものが存在することとする。f-adic ring A の adic ring である開部分環を A の 定義環 と呼ぶ。

3. 部分集合 $T \subset A$ が bounded である とは、0 の任意の開近傍 U に対して、0 のある開近傍 V が存在して、 $V \cdot T \subset U$ となることである。但し、ここで $V \cdot T$ は $v \cdot t$ ($v \in V, t \in T$) なる形のすべての元で生成される A の加法的部分群のこととする。

4. 元 $x \in A$ が power-bounded である とは、部分集合 $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が 3 の意味で bounded であることとする。 A の power bounded 元全体の集合を A° と書く。

5. a が 位相的冪零元 である とは、0 の任意の開近傍 U に対してある自然数 n が存在して $a^n \in U$ となることとする。 A の位相的冪零元全体のなす集合を $A^{\circ\circ}$ と書く。

6. A が Tate ring である とは、 A が f-adic であって、ある位相的冪零元 $a \in A^\times$ が存在することとする。

A が f-adic ring のとき、上で定義した A° は A の部分環であり、 A の全ての定義環の和であることがわかる (cf. [Hu1, Corollary 1.3 (iii)]). 故に A° は A の開部分環となることがわかる。 A が f-adic であるとき部分環 A_0 に対して、 A_0 が A の定義環であること

と A_0 が開かつ bounded であることが同値である。また f-adic ring の任意の定義環は、有限生成な定義イデアルを持つことが知られている (cf. [Hu1, Proposition 1 (ii), (iii)])。

以下、本稿では常に k は高さ 1 の非自明な非アルキメデス付値 $|\cdot|$ を有する完備付値体とする。また単に非アルキメデス付値体と言え、このようなものを意味する。

例 2.2. k° を k の付値環とし、 $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする。

1. A を有限生成な定義イデアルを持つ adic ring とする。このとき $A^\circ = A$ であって、 A は f-adic である。例えば、 $A = k^\circ$ とする。 $0 < |\varpi| < 1$ なる $\varpi \in k^\circ$ を取ると、 A は定義イデアル (ϖ) を持つ adic ring である。ところで $A^{\circ\circ} = \mathfrak{m}$ であり、位相的に冪零な単元を持たないので k° は Tate ではない。
2. $A = k$ とする。 A° は付値環 k° と一致する。 k° が adic ring であることは 1 でみた。更に、1 のような元 $\varpi \in k^\times$ は位相的冪零なので k は Tate である。また $A^{\circ\circ} = \mathfrak{m}$ が成り立つ。
- 3.

$$k\langle T \rangle = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in k[[T]] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \supset k^\circ\langle T \rangle = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in k\langle T \rangle \mid a_n \in k^\circ \right\}$$

とおく。 $\{\mathfrak{m}^n k^\circ\langle T \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ が 0 の開近傍系をなす位相を $k\langle T \rangle$ に入れてこれを位相環とみなす。 $\varpi \in k^\times$ を $|\varpi| < 1$ なる元とする。すると $\{\varpi^n k^\circ\langle T \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 の開近傍系をなすので $k^\circ\langle T \rangle$ は $k\langle T \rangle$ の adic な開部分環となり、 $k\langle T \rangle$ は f-adic であることがわかる。また $k\langle T \rangle^\circ = k^\circ\langle T \rangle$ が成り立つ。先の ϖ は位相的冪零元であり、 $k\langle T \rangle$ の可逆元でもあるから $k\langle T \rangle$ は Tate である。定義環 $k^\circ\langle T \rangle$ は $k\langle T \rangle$ の位相的冪零な単元 ϖ を含み、かつ $k\langle T \rangle = k^\circ\langle T \rangle[\varpi^{-1}]$ が成り立つことを注意しておく。一般に、Tate な f-adic ring はこれらの性質をみたす (cf. [Hu1, Proposition 1.5])。

4. $A = k\langle T \rangle/(T^2)$ とおく。2 の例と同様に部分環 $A_0 = k^\circ\langle T \rangle/(T^2)$ を使って $\{\mathfrak{m}^n A_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ を 0 の開近傍系とする位相を A に入れる。すると、2 と同じ理由で A_0 は adic な開部分環なので A は f-adic であり、位相的冪零な単元を持つから Tate でもある。

定義 2.3. A を位相環とし、 A^+ をその開部分環とする。

1. 組 (A, A^+) が affinoid ring である とは、 A が f-adic であって、 A^+ は A の中で整閉であり A° に含まれることとする。
2. affinoid ring の間の射 $f: (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ とは、位相環の射 $f: A \rightarrow B$ であって、 $f(A^+) \subset B^+$ をみたすもののこととする。

例 2.4. 1. A を有限生成な定義イデアルを持つ adic ring とする。このとき、 (A, A) は affinoid ring である。

2. (k, k°) は affinoid ring である。

3. 例 2.2.3, 4 の例での組 $(k\langle T \rangle, k^\circ\langle T \rangle)$, $(k\langle T \rangle/(T^2), k^\circ\langle T \rangle/(T^2))$ は共に affinoid ring である。自然な写像 $k \rightarrow k\langle T \rangle$ や $k\langle T \rangle \rightarrow k\langle T \rangle/(T^2)$ は affinoid ring の間の射を定める。

以下では、affinoid ring (A, A^+) が与えられると、位相空間 $X = \text{Spa}(A, A^+)$ が定義でき、この空間上に完備位相環に値を持つ構造前層 $\mathcal{O}_X$ とその部分前層 $\mathcal{O}_X^+$ が定義できることを説明する。

定義 2.5. A を位相環とする。 Γ を全順序付きアーベル群とする。(乗法的に書く。)

1. 写像 $|\cdot|: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ が 付値である とは、次をみたすこととする：任意の元 $x, y \in A$ に対して

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \quad |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \quad |0| = 0, \quad |1| = 1.$$

$\Gamma_{|\cdot|}$ を $\{|a| \mid |a| \neq 0 \in A\}$ が生成する Γ の部分群とし、付値 $|\cdot|$ の値群と呼ぶ。

2. 付値 $|\cdot|: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ が 連続である とは、任意の $\gamma \in \Gamma_{|\cdot|}$ に対して、部分集合 $\{a \in A \mid |a| \leq \gamma\}$ が A の開部分集合であることとする。

3. 全順序付きアーベル群の間の射 $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ とは群の射であって、順序を保つものとする (i.e. 任意の元 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $\gamma_1 \leq \gamma_2 \implies f(\gamma_1) \leq f(\gamma_2)$)。

4. 二つの A 上の付値 $|\cdot|$ と $|\cdot|'$ が 同値である とは、ある全順序付きアーベル群の間の同型射 $f: \Gamma_{|\cdot|} \simeq \Gamma_{|\cdot|'}$ が存在して、 $|a|' = f(|a|)$ ($a \in A$) が成立することとする。 $|\cdot|$ と $|\cdot|'$ が同値であるとき、 $|\cdot| \simeq |\cdot|'$ と書く。

5. 次のように定義する。

$$X = \text{Spa}(A, A^+) = \{ \text{連続な付値 } x: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\} \mid x(A^+) \leq 1 \} / \simeq.$$

慣例的に、 $x \in X$, $a \in A$ に対して、 $x(a)$ のことを $|a(x)|$ と書く。

例 2.6. 1. 例 2.2.3 を考える。任意の $f \in k\langle T \rangle$ に対して $\|f\| = \sup_n \{|a_n|\}$ とおくと、これは $k\langle T \rangle$ 上の付値を定める。これはガウスノルムと呼ばれる (cf. [BGR, §5.1.1])。このノルムによって定まる $k\langle T \rangle$ 上の位相は例 2.2.3 で考えた位相と一致する。また、 $k^\circ\langle T \rangle = \{f \in k\langle T \rangle \mid \|f\| \leq 1\}$ が成り立つ。

2. 例 2.2.4 を考える。

$$\|a + bT\| = \max\{|a|, |b|\} \quad (a + bT \in A)$$

とおく。これは A 上のノルム (i.e. 任意の $f, g \in A$ に対して

$$(2.1) \quad \|f + g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}, \quad \ker \|\cdot\| = \{0\}, \quad \|1\| \leq 1, \quad \|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

をみたす) を定める。このノルムは power-multiplicative (i.e. $\|a^n\| = \|a\|^n$ ($a \in A, n \in \mathbb{N}$)) でない。故に付値ではない。ところでこのノルムで定まる A 上の位相は例 2.2.4 の位相と一致する。 $A_0 = k^\circ\langle T \rangle / (T^2) = \{f \in A \mid \|f\| \leq 1\}$ が成り立つ。また $A^\circ = k^\circ + kT$ が容易に確かめられる。よって A° は bounded でない。このことより、 A° 自体は A の定義環とはならない。

次に、 X の位相を定義する。イデアル $(f_1, \dots, f_n) \subset A$ が開であるような $f_1, \dots, f_n, g \in A$ に対して、 X の部分集合を

$$(2.2) \quad U \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |g(x)| \neq 0 \ (1 \leq i \leq n)\}$$

と定義する。 $U \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle$ とも書く。この形の部分集合を rational subset と呼ぶ。容易にわかるように、有限個の rational subset の交わりは再び rational subset になる。

一般に位相空間 X が spectral 空間である とは以下の条件 (i)-(iii) をみたすこととする。

(i) 準コンパクトである。

(ii) 以下の性質をみたすような X の準コンパクト開部分集合からなる部分集合族 $\mathcal{F}$ が存在する。任意の有限個の部分集合 $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ に対して $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{F}$ をみたし、かつ X の位相は $\mathcal{F}$ で生成される。

(iii) 任意の閉部分集合が唯一つの生成点 (generic point) を持つ。

一般に位相空間 X が quasi-separated であるとは、二つの準コンパクトな開部分集合の交わりが準コンパクトになることである。spectral 空間は準コンパクトかつ quasi-separated ($\because$ (ii)) かつ T_0 空間 ($\because$ (iii)) である。

元の設定に戻り、 $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ の場合に $\mathcal{F}$ として X の rational subset の全体を考えると X は spectral 空間になることが知られている (cf. [Hu1, Theorem 3.5])。affinoid ring の射 $f: (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ は位相空間の間の射 $\mathrm{Spa} f: \mathrm{Spa}(B, B^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(A, A^+)$ を誘導する。 $\hat{A}, \hat{A}^+$ をそれぞれ位相環 A, A^+ の完備化とする。すると、組 $(\hat{A}, \hat{A}^+)$ は再び affinoid ring になる。これを (A, A^+) の完備化と呼ぶ。標準写像 $(A, A^+) \rightarrow (\hat{A}, \hat{A}^+)$ が誘導する $\mathrm{Spa}(\hat{A}, \hat{A}^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(A, A^+)$ は同相になり、rational subset を rational subset に移すことが知られている ([Hu1, Proposition 3.9])。affinoid ring (A, A^+) が完備であるとは標準写像 $(A, A^+) \rightarrow (\hat{A}, \hat{A}^+)$ が同型なこととする。

次に構造前層 $\mathcal{O}_X$ の話に移る。これを定義するためには次の普遍性が必要である。

命題 2.7 ([Hu2, Proposition 1.3]). $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ とする。各 rational subset $U \subset X$ に対して、次の普遍性をみたす完備な affinoid ring $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ が存在する。

(i) $u: (A, A^+) \rightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ が存在して、 $\mathrm{Im}(\mathrm{Spa} u) \subset U$ をみたす。

(ii) (B, B^+) を完備な affinoid ring とする。任意の

$$f: (A, A^+) \rightarrow (B, B^+): \text{affinoid ring の射} \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{Spa} f) \subset U$$

に対して、唯一つの affinoid ring の射 $g: (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \rightarrow (B, B^+)$ が存在して、図式

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) & \xrightarrow{g} & (B, B^+) \\ u \uparrow & \nearrow f & \\ (A, A^+) & & \end{array}$$

が可換である。

A の定義環 A_0 を一つ固定する。その定義イデアル I も一つ固定する。rational subset $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ を考える。rational subset U の表示

$$U = U \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle$$

を一つ固定する。環 $A\left[\frac{1}{g}\right]$ に

$$\left\{ I^n A_0 \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

を 0 の開近傍系とする位相を入れて位相環とみなす。この位相環を $A\left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}\right]$ と書く。この環の部分環 $A^+\left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}\right]$ の $A\left[\frac{1}{g}\right]$ における整閉包を B と書く。すると、組 $\left(A\left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}\right], B\right)$ は affinoid ring である。これの完備化を

$$(2.3) \quad \left(A \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle, \widehat{B} \right)$$

と書く。(2.3) を $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ の定義とする。この組が上の普遍性をみたすことが示せる (cf. [Hu2, Lemma and definition (i) in §1]). 故にこの組は、最初に固定した (A_0, I) や U の表示の取り方によらないことがわかる。rational subset の間の包含 $V \subset U$ は上の普遍性により、affinoid ring の射

$$(2.4) \quad (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \rightarrow (\mathcal{O}_X(V), \mathcal{O}_X^+(V))$$

を誘導する。一般の開集合 $W \subset X$ に対しては

$$\mathcal{O}_X(W) = \varinjlim_{U \subset W: \text{rat. sub.}} \mathcal{O}_X(U), \quad \mathcal{O}_X^+(W) = \varinjlim_{U \subset W: \text{rat. sub.}} \mathcal{O}_X^+(U)$$

とおく。これらに逆極限位相を入れて完備位相環とみなす。すると任意の開集合の包含 $W \subset W'$ に対して (2.4) を使って自然な位相環の射 $\mathcal{O}_X(W') \rightarrow \mathcal{O}_X(W)$ を得る。以上の構成により、完備位相環に値を取る前層 $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_X^+$ が定義できた。

前層 $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+$ の点 $x \in X$ における茎 (stalk) をそれぞれ

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U: x \text{ の開近傍}} \mathcal{O}_X(U), \quad \mathcal{O}_{X,x}^+ = \varinjlim_{U: x \text{ の開近傍}} \mathcal{O}_X^+(U)$$

と定義する。付値 x は付値 $v_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \Gamma_x \cup \{0\}$ を誘導する。すると、次のことがわかる。環 $\mathcal{O}_{X,x}$ は局所環であって極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ は

$$(2.5) \quad \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| = 0\}$$

で与えられる。また $\mathcal{O}_{X,x}^+$ も局所環であって、その極大イデアルを $\mathfrak{m}_x^+$ と書けば次が成立する。

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_{X,x}^+ &= \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| \leq 1\}, \\ \mathfrak{m}_x^+ &= \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| < 1\}. \end{aligned}$$

全ての開集合 $U \subset X$ に対して

$$(2.7) \quad \mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f(x)| \leq 1 \ (x \in U)\}$$

が成り立つ (cf. [Hu2, Proposition 1.6])。 x における剰余体を $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ で定義する。記述 (2.7) により、もし $\mathcal{O}_X$ が層であるならば $\mathcal{O}_X^+$ は層になることがわかる。 $\mathcal{O}_{X,x}$ に付値 v_x から誘導される位相を入れると、明らかに v_x は連続付値になる。

定義 2.8. A を Tate ring とする。 $\hat{A}$ をその完備化とする。

このとき、 A が 強ネーター環 (strongly Noetherian) である とは、任意の整数 $n \geq 0$ に対して $\hat{A}[[T_1, \dots, T_n]]$ の部分環

$$A\langle T_1, \dots, T_n \rangle = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \mid a_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow 0 \ \left(\sum_{j=1}^n i_j \rightarrow \infty \right) \right\}$$

(cf. [Hu2, p.524]) がネーター環であることとする。

例 2.9. A が古典的な affinoid k -algebra (cf. [BGR, §6.1.1 の Definition 1]) のときには A は強ネーター環である。

Adic 空間への Tate の非輪状性定理の一般化として Huber により次の定理が知られている。

定理 2.10 ([Hu2, Theorem 2.2]). affinoid ring (A, A^+) を考える。 A がネーター環である定義環を持つ、或は A が強ネーター環であるとする。このとき、 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}$ は層になる。

以上で affinoid ring (A, A^+) から位相空間 $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ とその上の構造前層 $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X^+$ を定義した。また各点 $x \in X$ に対して、その茎上の付値 v_x を定義した。以下、慣例的に v_x を $|\cdot(x)|$ と書く。以上述べたことを模式的にまとめると

affinoid ring $(A, A^+) \rightsquigarrow (\text{位相空間 } X = \mathrm{Spa}(A, A^+), \text{前層 } \mathcal{O}_X, \text{連続付値の族 } |\cdot(x)| \ (x \in X))$ 。

- 定義 2.11** ([Sch, Definition 2.6]).
1. A を位相環とし位相環の射 $k \rightarrow A$ を持つとき、 A を 位相的 k 代数 と呼ぶ。
 2. 位相的 k 代数 A が Tate k -algebra である とは、その相対位相が ϖ 進位相と一致するある開部分環 A_0 を持つこととする。
 3. (A, A^+) が affinoid k -algebra である とは、 A が Tate k -algebra であって、 (A, A^+) が affinoid ring であることとする。

注. A を位相的 k 代数とする。このとき、定義 2.1.6 の意味で Tate であることと定義 2.11.2 の意味で Tate k -algebra であることは同値である。また affinoid ring (A, A^+) に対して、affinoid ring の射 $(k, k^\circ) \rightarrow (A, A^+)$ を持つことと定義 2.11.3 の意味で (A, A^+) が affinoid k -algebra であることは同値である。

目標であった adic 空間の定義を述べる。

定義 2.12. k 上の圏 (V_k) を定義する。この圏の対象を三つ組

$$(X, \mathcal{O}_X, |\cdot(x)| \mid (x \in X))$$

とする。但し、以下をみたす: $(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間であって、 $\mathcal{O}_X$ は完備位相的 k 代数に値を取る層である。また、全ての $x \in X$ に対して付値 $|\cdot(x)|: f \mapsto |f(x)|$ ($f \in \mathcal{O}_{X,x}$) を備えている。 (V_k) の対象の間の射 $X \rightarrow Y$ は、位相空間の射 $f: X \rightarrow Y$ と位相的 k 代数に値を取る層の射 $\varphi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の組であって、更に付値に関する次の整合性をみたす。任意の $x \in X$ に対して、 φ により誘導される k 代数の射 $\varphi_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ が付値の同値 $v_{f(x)} \simeq v_x \circ \varphi_x$ をみたす。 (V_k) の対象であって、ある affinoid k -algebra (A, A^+) に付随する $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ と同型になるとき、それを k 上の affinoid adic 空間と呼ぶ。また、 (V_k) の対象で局所的に affinoid adic 空間と同型なものを k 上の adic 空間と呼ぶ。 k 上の adic 空間の射を (V_k) の射と定める。

注. 1. X を k 上の adic 空間とする。このとき、affinoid adic 空間における局所環の極大イデアルの記述 (2.5) より任意の点 $x \in X$ に対してその局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアルは

$$\{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| = 0\}$$

と一致する。 $\mathcal{O}_X$ の部分層 $\mathcal{O}_X^+$ を各開集合 $U \subset X$ 上

$$\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f(x)| \leq 1 \ (x \in U)\}$$

と定める。(2.6) により $\mathcal{O}_{X,x}^+$ の極大イデアルは

$$\{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| < 1\}$$

に一致する。

2. X, Y を k 上の adic 空間とする。このとき、 $(f, \varphi): X \rightarrow Y$ を adic 空間の射とすると $\varphi(\mathcal{O}_Y^+) \subset f_*\mathcal{O}_X^+$ が成り立ち、 $(f, \varphi): (X, \mathcal{O}_X^{(+)}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y^{(+)})$ は局所環付き空間の射を誘導する。これは 1 の記述と (V_k) の射の定義における φ_x の付値との整合性から従う。ある種の逆が成り立つ ([Hu2, Proposition 2.1 (iii)]).

3. [Sch, §2] における adic 空間の射の定義では局所環付き空間の射であることを課している。上の 2 で述べたようにその性質はここで紹介した Huber の定義から従うので、本稿では Huber の論文に従った。

注. 古典的なリジッド解析空間や形式スキーム、Berkovich 空間と adic 空間の関係については [Hu2, §4] と [Sch, Theorem 2.24] を見られたい。

例 2.13. $|\varpi| < 1$ をみたす元 $\varpi \in k^\times$ を取る。

1. $\mathrm{Spa}(k^\circ, k^\circ)$ は k° 上の自明付値と非自明な付値 $|\cdot|$ の同値類の二点からなる。但し、自

明付値とは可逆元を 1 に送り、そうでない元は 0 に送る付値とする。 $\mathrm{Spa}(k, k^\circ) = \{x \in \mathrm{Spa}(k^\circ, k^\circ) \mid |\varpi(x)| \neq 0\}$ は k 上の非自明な付値の同値類の一点だけからなる。

2. 例 2.4.3 で挙げた affinoid ring $(k\langle T \rangle, k^\circ\langle T \rangle)$ に付随する affinoid adic 空間

$$\mathbb{D}_k^1 = \mathrm{Spa}(k\langle T \rangle, k^\circ\langle T \rangle)$$

を考える。例 2.9 と定理 2.10 により、 $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k^1}$ は層になる。 $\mathbb{D}_k^1$ は、古典的なリジッド解析空間で言うところの半径 1 の閉円板の adic 空間における対応物である。実際、これらの古典的な点達 (classical point) は自然に $\mathbb{D}_k^1$ の点と見なし得る。即ち、 $|\alpha| \leq 1$ なる $\alpha \in \widehat{k}$ に対して

$$|\cdot|_\alpha: k\langle T \rangle \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; f \mapsto |f(\alpha)|$$

とおけばこれは $k\langle T \rangle$ 上の付値を定める。また、Berkovich 空間の点も全て含んでいる。Berkovich 空間では高さ 1 の付値だけを考えていたのに対して、adic 空間では高さが一般の付値を考えている。詳しくは $\mathbb{D}_k^1$ は五種類の点から成っており、[Hu4, Example 5.2] や [Sch, Example 2.20] に詳しい説明があるのでそちらを見られたい。

3. $k^\circ[[T]]$ に (ϖ, T) 進位相を入れて、位相環とみなす。すると、例 2.4.1 にあるように、組 $(k^\circ[[T]], k^\circ[[T]])$ は affinoid ring となる。 $X = \mathrm{Spa}(k^\circ[[T]], k^\circ[[T]])$ とおく。以下、これに自然に k 上の adic 空間の構造を持たせることが出来ることを説明する。次の部分集合を考える。

$$Y = \{x \in \mathrm{Spa}(k^\circ[[T]], k^\circ[[T]]) \mid |\varpi(x)| \neq 0\}.$$

自然な affinoid ring の射 $f: (k^\circ, k^\circ) \rightarrow (k^\circ[[T]], k^\circ[[T]])$ から誘導される射 $\mathrm{Spa} f$ の Y への制限は

$$Y \rightarrow \mathrm{Spa}(k, k^\circ)$$

を誘導する。各自然数 n に対して X の rational subset $U \left\langle \frac{\varpi, T^n}{\varpi} \right\rangle$ を考える。定義により、これは Y の部分集合であり、次が成り立つ：

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U \left\langle \frac{\varpi, T^n}{\varpi} \right\rangle.$$

$U \left\langle \frac{\varpi, T^n}{\varpi} \right\rangle$ は $\mathrm{Spa}(k\langle \frac{T^n}{\varpi} \rangle, k^\circ\langle \frac{T^n}{\varpi} \rangle)$ と自然に同一視出来て、 k 上の affinoid adic 空間と思える。よって、 Y は k 上の adic 空間とすることが出来る。これは準コンパクトではない。また affinoid adic 空間でもない。 Y は古典的なリジッド解析空間における k 上の半径 1 の開円板の adic 空間における対応物である。

§ 3. Perfectoid 体

定義 3.1. K を完備非アルキメデス付値体とする。剰余標数を p とする。このとき、 K が perfectoid 体 であるとは、 K の値群が離散的でなく、フロベニウス写像 $\Phi: K^\circ/p \rightarrow K^\circ/p$ が全射になることとする。

注. 以下、標数 p の環 A に対して A 上のフロベニウス写像と言ったら常に p 乗写像 $A \mapsto A; x \mapsto x^p$ のことを意味し、 Φ と書く。

例 3.2. 非アルキメデス局所体は値群が離散的なので perfectoid 体ではない。一方、 $\widehat{\mathbb{Q}_p}$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$ はすべて perfectoid 体である。また、標数 p の完備非アルキメデス付値体 K が perfectoid 体であることと完全体であることは同値である。序論の $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ も perfectoid 体である。

以下では、perfectoid 体に対する tilt を定義する。

命題 3.3 ([Sch, Lemma 3.4]). K を perfectoid 体とする。 $|p| \leq |\varpi| < 1$ なる元 $\varpi \in K^\times$ を取る。 $\varpi \mid p$ より p 乗写像は全射環準同型 $\Phi: K^\circ/\varpi \rightarrow K^\circ/\varpi$ を引き起こす。
(i) 射影 $K^\circ \rightarrow K^\circ/\varpi$ は、次の積構造を保つ同相写像を誘導する。

$$(3.1) \quad \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \xleftarrow{\sim} \varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ.$$

但し、両辺には逆極限位相を入れている。この同型と第一射影 $\varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ \rightarrow K^\circ$ の合成で写像

$$(3.2) \quad (\cdot)^\sharp: \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \rightarrow K^\circ$$

を得る。

(ii) ある元 $\varpi^b \in \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$ が存在して、 $|(\varpi^b)^\sharp| = |\varpi|$ をみたす。

$$K^b = \left(\varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \right) \left[(\varpi^b)^{-1} \right]$$

とおく。すると、同相 (3.1) の延長であり積を保つ同相

$$(3.3) \quad K^b \xleftarrow{\sim} \varprojlim_{x \mapsto x^p} K$$

が存在する。再び第一射影 $\varprojlim_{x \mapsto x^p} K \rightarrow K$ との合成で写像 $K^b \rightarrow K$ を得る。これと付値 $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ との合成 $|\cdot|^b$ は K^b 上の付値を定める。すると、この付値に関して K^b は標数 p の perfectoid 体である。 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^b$ をそれぞれ K° , K^{b° の極大イデアルとする。すると次の自然な同型が存在する。

$$K^{b^\circ} = \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi, \quad K^{b^\circ}/\varpi^b \simeq K^\circ/\varpi, \quad K^{b^\circ}/\mathfrak{m}^b \simeq K^\circ/\mathfrak{m}.$$

定義 3.4. 上記の標数 p の perfectoid 体 K^b を K の tilt と呼ぶ。

例 3.5. $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$, $K^b = \widehat{\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})}$ とおく。整合的な 1 の p^n 乗根の系 $\{\zeta_{p^n}\}_{n=1}^\infty$ を取る。すると、同型

$$K^\circ/p = \mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]/p \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[[t^{1/p^\infty}]]/t = K^{b^\circ}/t; \quad \zeta_{p^n} - 1 \mapsto t^{1/p^n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つので、 K^b は K の tilt である。 $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ の tilt は $\widehat{\mathbb{F}_p((t))}$ と同型になる。

注. K を標数 p の perfectoid 体とする。 $0 < |\varpi| < 1$ なる $\varpi \in K^\times$ を取る。標準同型 $K^\circ \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$; $x \mapsto (x, x^{1/p}, \dots)$ が成り立つので、このことから K の tilt は K と同型であることがわかる。

ここでは上の命題の細かい証明を与えることはやめて写像 (3.1) の逆写像、(3.2) と ϖ^b の構成だけ与えておく。順序が逆になるが写像 (3.2)

$$(\cdot)^\sharp: \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \rightarrow K^\circ; x \mapsto x^\sharp$$

を先に定義する。左辺の元 $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ を取る。各非負整数 n に対して $\bar{x}_n$ の K° への持ち上げ x_n を取る。列 $\{x_n^{p^n}\}_{n=0}^\infty$ を考えると仮定 $|p| \leq |\varpi|$ によりこれがコーシー列になることが示せて、完備性より K° に極限を持つ。その極限を $x^\sharp$ とおく。これは持ち上げの取り方によらないことが容易にわかる。

次に $\varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$ 上のフロベニウス写像は全単射であることを見よう。全射性は明らか。単射性を確かめる。元 $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$ に対して $x^p = (\bar{x}_0^p, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ だから $x^p = 0$ から $x = 0$ が従う。これより、 $\varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$ は完全環 (i.e. フロベニウス写像が全単射になること) である。任意の元 $x \in \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$ と正の整数 m に対して、 x の p^m 乗根がこの環に唯一つ存在する。それを x^{1/p^m} と書く。写像 $(\cdot)^\sharp$ を用いて (3.1) の逆写像を

$$\varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \rightarrow \varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ; x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, (x^{1/p^2})^\sharp, \dots)$$

で定義する。最後に ϖ^b の取り方を説明する。 K の値群が p -可除であること (cf. [Sch, Lemma 3.2]) から、ある ϖ_1 が存在して $|\varpi_1|^p = |\varpi|$ が成立する。すると $\varpi \in K^\times$ だから ϖ_1 は K°/ϖ の零でない元 ϖ_1 を定める。フロベニウス写像 $\Phi: K^\circ/\varpi \rightarrow K^\circ/\varpi$ は全射であったから、以下のような列

$$(3.4) \quad (0, \overline{\varpi_1}, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi$$

が取れる。これを ϖ^b とすると写像 (3.2) の構成から題意の性質をみたすことがわかる。勿論 ϖ^b の取り方は一意的でないし、 $(\varpi^b)^\sharp$ は ϖ と必ずしも一致しない。単元倍ずれる可能性がある。同型 $\varprojlim_{\Phi} K^\circ/\varpi \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ$ が同型 $K^b \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{x \mapsto x^p} K$ に延びることは容易にわかり、これより K^b が体であり、命題の主張に現れる $|\cdot|^b$ が付値を定めることも確かめられる。

ところで ϖ を任意にとると K にその p^n 乗根が存在するとは限らない。 ϖ を $(\varpi^b)^\sharp$ で取り替えて始めから K には p^n 乗根の系 $\{\varpi^{1/p^n}\}_{n=0}^\infty$ が存在すると仮定することがよくある。また、以上の構成は序論で紹介した例を自然に拡張していることを確認されたい。

Fontaine-Wintenberger のノルム体の理論 ([FW]) で知られていたことが perfectoid 体についても成立する。

定理 3.6 ([Sch, Theorem 3.7]). K を perfectoid 体とする。

(i) L を K の有限次拡大体とする。 L には K 上の有限次元ベクトル空間としての自然な

位相を考える。このとき、 L は perfectoid 体となる。

(ii) K 上有限次拡大体のなす圏から K^b 上有限次拡大体のなす圏への tilting 関手 $L \mapsto L^b$ は、圏同値を誘導する。更に、 $[L : K] = [L^b : K^b]$ が成立する。

§ 4. Almost mathematics

アーベル圏 $\mathcal{A}$ の空でない充満部分圏 $\mathcal{B}$ がセール部分圏であるとは、 $\mathcal{A}$ における任意の短完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

に対して、次の同値性が成り立つこととする。

$$A, C \in \mathcal{B} \iff B \in \mathcal{B}.$$

任意のセール部分圏は空でないから $\mathcal{A}$ の零対象 $0_{\mathcal{A}}$ を含む。アーベル圏 $\mathcal{A}$ とそのセール部分圏 $\mathcal{B}$ が与えられると、商圏 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ が定義出来る。それを簡単に復習する。 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ の対象を $\mathcal{A}$ の対象として定義する。 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ の任意の対象 X, Y に対して、 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ における X から Y への射を以下で定める。

$$(4.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X, Y) = \varinjlim_{X' \subset X, Y' \subset Y \text{ s.t. } X/X', Y'/Y \in \mathcal{B}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y').$$

すると、 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ はアーベル圏になることが知られている。射の定義 (4.1) と $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$ より、自然な完全関手 $\Pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}; A \mapsto A$ が得られる。商圏 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ は次の普遍性をみたす。任意のアーベル圏 $\mathcal{C}$ と全ての $B \in \mathcal{B}$ に対して $F(B) = 0_{\mathcal{C}}$ をみたす完全関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ が与えられるとき、関手 $\bar{F}: \mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ が唯一つ存在して、図式

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ \Pi \downarrow & \nearrow \bar{F} & \\ \mathcal{A}/\mathcal{B} & & \end{array}$$

が可換になる。

完全関手 Π のことを 局所化関手 (localization functor) と呼ぶ。

定義 4.1. K を perfectoid 体とする。その付値環を K° とし、 $\mathfrak{m}$ を K° の極大イデアルとする。

K° 加群 M が almost zero 対象である とは、 $\mathfrak{m}M = 0$ をみたすこととする。

almost mathematics では almost zero 対象のずれを無視して考えるというのが基本的なアイデアである。基本文献は [GR] である。

補題 4.2. 1. $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ が成立する。

2. K° 加群の圏を $K^\circ\text{-mod}$ と書く。 $K^\circ\text{-mod}$ の部分圏 $\mathcal{B}$ を almost zero 対象からなる部分圏とする。すると、 $\mathcal{B}$ はセール部分圏である。

証明. 1. K は perfectoid 体なのでその値群は p -可除である ([Sch, Lemma 3.2]). 故に零でない任意の元 $x \in \mathfrak{m}$ に対して付値が $|x|^{1/p}$ に等しい元 y を取ると、 $|x| < |y| < 1$ となる。すると、 $y, x/y \in \mathfrak{m}$ なので $x = (x/y)y \in \mathfrak{m}^2$ がわかる。

2. $K^\circ\text{-mod}$ における短完全列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

を考える。 $M', M'' \in \mathcal{B}$ と仮定する。この仮定と短完全列より $\mathfrak{m}^2 M = 0$ がわかり、1 より $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ なので $M \in \mathcal{B}$ がわかる。逆に $M \in \mathcal{B}$ と仮定する。この仮定と上の短完全列より $\mathfrak{m}M' = 0, \mathfrak{m}M'' = 0$ が容易に確かめられる。よって題意が従う。 $\square$

上述の商圏の話と補題 4.2 から $K^{\circ a}\text{-mod} = K^\circ\text{-mod} / \mathcal{B}$ が定義出来る。局所化関手 $K^\circ\text{-mod} \rightarrow K^{\circ a}\text{-mod}$ による K° 加群 M の像を M^a と書く。

補題 4.3. 任意の K° 加群 M, N に対して

$$(4.3) \quad \text{Hom}_{K^{\circ a}\text{-mod}}(M^a, N^a) = \text{Hom}_{K^\circ\text{-mod}}(\mathfrak{m} \otimes_{K^\circ} M, N)$$

が成り立つ。

証明. 商圏の射の定義 (4.2) から従う。 $\square$

注. $K\text{-mod}$ における射 $f: X \rightarrow Y$ が誘導する射 $f^a: X^a \rightarrow Y^a$ が $K^a\text{-mod}$ で同型、単射、全射になるとき、それぞれ f は almost に同型、単射、全射であると言うことがある。

$X, Y \in K^{\circ a}\text{-mod}$ に対して $X = M^a, Y = N^a$ と書いて

$$(4.4) \quad X \otimes Y = (M \otimes_{K^\circ} N)^a \in K^{\circ a}\text{-mod}$$

と定義する。これは M, N の取り方によらず well-defined である。以下の命題 4.4 により、上の定義 (4.4) で $M = X_*, N = Y_*$ と取って $X \otimes Y$ を定義してもよいことがわかる。

命題 4.4 ([Sch, Proposition 4.6]). 以下のように関手を定義する。

$$K^{\circ a}\text{-mod} \rightarrow K^\circ\text{-mod}; M \mapsto M_* = \text{Hom}_{K^{\circ a}\text{-mod}}(K^{\circ a}, M).$$

すると、この関手は局所化関手 $(\cdot)^a: K^\circ\text{-mod} \rightarrow K^{\circ a}\text{-mod}$ の右随伴関手である。 $M \in K^{\circ a}\text{-mod}$ に対して、随伴写像 $(M_*)^a \rightarrow M$ は同型である。また $M \in K^\circ\text{-mod}$ に対して、 $(M^a)_* = \text{Hom}_{K^\circ\text{-mod}}(\mathfrak{m}, M)$ が成立する。

注. 局所化関手 $(\cdot)^a$ は完全関手である。 $(\cdot)_*$ が左完全関手であることは定義からすぐわかる。任意の $K^{\circ a}$ 加群 M に対して関手 $M \otimes (\cdot)$ は右完全である。これを確かめてみよう。 $K^{\circ a}\text{-mod}$ における完全列

$$N_1 \rightarrow N_2 \xrightarrow{g} N_3 \rightarrow 0$$

に対して $(\cdot)_*$ を施すと

$$N_{1*} \rightarrow N_{2*} \xrightarrow{g_*} N_{3*}$$

は完全である。 $i = 2, 3$ に対して随伴写像が導く同型 $(N_{i*})^a \xrightarrow{\sim} N_i$ を通じて、 g は g_*^a と同一視できる。 g は全射だったから、 g_* の余核は almost zero 対象である。完全列

$$(4.5) \quad N_{2*} \xrightarrow{g_*} N_{3*} \rightarrow \text{Coker } g_* \rightarrow 0$$

を考える。明らかに $M_* \otimes_{K^\circ} \text{Coker } g_*$ は almost zero 対象である。 $M \otimes N_i = (M_* \otimes_{K^\circ} (N_i)_*)^a$ ($i = 2, 3$) であった。そこで (4.5) に $(M_* \otimes_{K^\circ} (\cdot))^a$ を施すと、関手 $(\cdot)^a$ の完全性より $1 \otimes g: M \otimes N_2 \rightarrow M \otimes N_3$ が全射であるとわかる。

以下、 $(M_*)^a$ を単に M_*^a と書くことがある。局所化関手 $N \mapsto N^a$ は

$$K^{\circ a}\text{-mod} \rightarrow K^\circ\text{-mod}; M \mapsto M_! = \mathfrak{m} \otimes M_*$$

という関手を左随伴関手に持つことが知られている。以上より、関手 $N \mapsto N^a$ と $M \mapsto M_*$ は共に左随伴を有するので逆極限と可換であることがわかる。

テンサーアーベル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, U, u)$ を考える。但し、 U は単位対象で $u: U \xrightarrow{\sim} U \otimes U$ や $\nu_A: U \otimes A \xrightarrow{\sim} A$ といった射が備わっている。また元を入れかえる操作に対応する射 $\psi_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ なども公理に入っている。煩雑なのでテンサーアーベル圏の公理を思い出すことはしない。詳しくは [DM] などを見られたい。

補題 4.5. (4.4) で与えられる $\otimes$ に関して、圏 $K^{\circ a}\text{-mod}$ はテンサーアーベル圏になる。

$\mathcal{C}$ における抽象的な環対象やその上の加群対象などを以下定義する ([GR, §2.2.6])。 A が $\mathcal{C}$ における commutative unitary monoid であるとは、積構造に対応する射 $\mu_A: A \otimes A \rightarrow A$ と単位元に対応する射 $1_A: U \rightarrow A$ が与えられており、次の三つの図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \mu_A} & A \otimes A \\ \mu_A \otimes \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ \psi_{A,A} \downarrow & \nearrow \mu_A & \\ A \otimes A & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U \otimes A & \xrightarrow{1_A \otimes \text{id}_A} & A \otimes A \\ & \searrow \nu_A & \downarrow \mu_A \\ & \cong & A \end{array}$$

が可換となることとする。

定義 4.6. 1. テンサーアーベル圏 $K^{\circ a}\text{-mod}$ における commutative unitary monoid を $K^{\circ a}$ -algebra と呼ぶ。

2. A を $K^{\circ a}$ -algebra であるとする。このとき、 M が A 加群である とは、 $M \in K^{\circ a}\text{-mod}$ であって射 $\sigma_{M/A}: A \otimes M \rightarrow M$ が与えられていて次の図式

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes \text{id}_M} & A \otimes M & & A \otimes A \otimes M \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \sigma_{M/A}} A \otimes M \\ & \searrow \nu_M \cong & \downarrow \sigma_{M/A} & & \downarrow \mu_A \otimes \text{id}_M \\ & & M & & A \otimes M \xrightarrow{\sigma_{M/A}} M \\ & & & & \downarrow \sigma_{M/A} \end{array}$$

が可換となることとする。

A が $K^{\circ a}$ -algebra のとき、(4.3) の同一視を通じて A_* は自然に K° -algebra の構造を有する。 $A\text{-mod}$ を A 加群の圏とすると、(4.4) と同様に $\otimes_A$ が定義でき、それに関してテンサーアーベル圏になる。故に上述と同様にして A -algebra の概念も定義出来る。

定義 4.7. A を $K^{\circ a}$ -algebra とする。 M は A 加群とする。

1. M が 平坦である とは、

$$M \otimes_A (\cdot): A\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}; N \mapsto M \otimes_A N$$

が完全関手になることとする。

2. R を K° -algebra とし、 N を R 加群とする。このとき、 $M = N^a$ が 有限生成である (resp. 有限表示である) とは、任意の $\epsilon \in \mathfrak{m}$ に対してある有限生成 (resp. 有限表示) R 加群 N_ϵ と R 加群の射 $f_\epsilon: N_\epsilon \rightarrow N$ が存在して、この核と余核が ϵ 倍で消えることとする。

R を K° -algebra とする。次の関手を定義する。

$$R^a\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}; M \mapsto M_* = \text{Hom}_{R^a}(R^a, M).$$

定義 4.8. A を $K^{\circ a}$ -algebra とする。 B を A -algebra とする。 $\mu: B \otimes_A B \rightarrow B$ を B の積構造とする。

1. 構造射 $A \xrightarrow{1} B$ が 不分岐である とは、ある元 $e \in (B \otimes_A B)_*$ が存在して、 $e^2 = e$, $\mu_*(e) = 1$ かつ全ての $x \in \ker(\mu)_*$ に対して、 $xe = 0$ となることとする。

2. 構造射 $A \xrightarrow{1} B$ が エタールである とは、それが不分岐であって、 B が A 上平坦であることとする。

3. $A \xrightarrow{1} B$ が 有限エタールである とは、2 の意味でエタールであって、 B が A 加群として定義 4.7.2 の意味で有限表示であることとする。有限エタールな A -algebra の成す圏を A_{fet} と書く。

[Sch] の論文において、次の Faltings の定理は tilting 同値性を証明する上で重要な役割を果たす。しかし、[Sch, Remark 5.19] によれば、tilting 同値性の証明において almost mathematics を回避する方法もあるようである。tilting 同値性の一方方向の関手については後で明示的記述が系 5.9 で与えられる。

定理 4.9 (Faltings). A を $K^{\circ a}$ -algebra とする。 A は $K^{\circ a}$ 上平坦であつて、 ϖ 進完備である (i.e. $A \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n A/\varpi^n$) とする。すると、関手

$$A_{\text{fet}} \rightarrow (A/\varpi)_{\text{fet}}; B \mapsto B/\varpi$$

は圏同値を誘導する。また、任意の $B \in A_{\text{fet}}$ は $K^{\circ a}$ 上平坦かつ ϖ 進完備になる。

§5. Perfectoid algebra と tilting 同値

以下では K は perfectoid 体として、 $|p| \leq |\varpi| < 1$ なる元 $\varpi \in K^\times$ を固定する。§3 の後半で注意した様に必要ならば ϖ を取り替えて p^n 乗根の系 $\{\varpi^{1/p^n}\}_{n=0}^\infty$ が K の中に存在するとしてよい。

定義 5.1. 1. R が perfectoid K -algebra である とは、 R がバナッハ K 代数であつて、 R° が開かつ bounded でフロベニウス写像 $R^\circ/\varpi \rightarrow R^\circ/\varpi$ が全射であることとする。 perfectoid K -algebra の間の射は、連続な K 代数の射のこととする。この圏を $K\text{-Perf}$ とかく。

2. $K^{\circ a}$ -algebra R が perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra である とは、 $K^{\circ a}$ 上平坦かつ ϖ 進完備であり、フロベニウス写像 $\Phi: R/\varpi^{1/p} \rightarrow R/\varpi$ が同型になることとする。 perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra の間の射は、 $K^{\circ a}$ -algebra の射であるとする。この圏を $K^{\circ a}\text{-Perf}$ と書く。

3. $K^{\circ a}/\varpi$ -algebra R が perfectoid $K^{\circ a}/\varpi$ -algebra である とは、 $K^{\circ a}/\varpi$ 上平坦であつて、フロベニウス写像 $\Phi: R/\varpi^{1/p} \rightarrow R$ が同型であることとする。 perfectoid $K^{\circ a}/\varpi$ -algebra の間の射は、 $K^{\circ a}/\varpi$ -algebra の間の射であるとする。この圏を $(K^{\circ a}/\varpi)\text{-Perf}$ と書く。

注. k を完備非アルキメデス付値体とする。 k 代数 A 上の k 代数ノルム $\|\cdot\|$ とは (2.1) に加えて $\|a \cdot 1_A\| \leq |a|$ ($a \in k$) が成り立つものである。例 2.6 の二つのノルムは共に $\|a \cdot 1_A\| = |a|$ ($a \in k$) をみたすので k 代数ノルムである。 バナッハ k 代数 とは完備な k 代数ノルムを持つ k 代数のことである (cf. [BGR, §3.1.1 の Definition 1])。

補題 5.2. R を perfectoid K -algebra とする。このとき、 R は定義 2.11.2 の意味で Tate K -algebra であり、 R° は R の定義環である。また、 $R = R^\circ[\varpi^{-1}]$ が成立する。

証明. R 上の K 代数ノルム $\|\cdot\|$ を一つ固定する。開部分環 $R_0 = \{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$ を考えると、これの位相は ϖ 進位相と一致する。よつて、adic な開部分環 R_0 を持つから R は f-adic である。 ϖ は R の位相的幂零な可逆元だから Tate K -algebra である。仮定より R° は開かつ bounded な部分環であり、 R は f-adic なので R° は R の定義環である (cf. [Hu1, Proposition 1 (ii)])。最後の主張は [Hu1, Proposition 1.5] より従う。 $\square$

例 5.3. 1. 環の射を

$$\tau: K^\circ[T_1, \dots, T_n] \rightarrow K^\circ[T_1, \dots, T_n]; f(T_1, \dots, T_n) \mapsto f(T_1^p, \dots, T_n^p)$$

と定義する。順極限 $\varinjlim_{\tau} K^{\circ}[T_1, \dots, T_n]$ を $K^{\circ}[T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}}]$ とおく。

$$K^{\circ}[T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}}] = \bigcup_{m=0}^{\infty} K^{\circ}[T_1^{1/p^m}, \dots, T_n^{1/p^m}]$$

とも書ける。更に

$$\begin{aligned} K^{\circ}\langle T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}} \rangle &= K^{\circ}[\widehat{T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}}}] \\ &\subset K\langle T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}} \rangle = K^{\circ}\langle T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}} \rangle[\varpi^{-1}] \end{aligned}$$

とおく。後者の環を以下 R とかく。 R の任意の元 f は具体的には次のように書ける。

$$f = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}[1/p]_{\geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n}.$$

但し、以下の条件をみたす。 $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in K$ で、任意の自然数 N に対して $|c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}| > |\varpi|^N$ をみたす組 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}[1/p]_{\geq 0})^{\oplus n}$ は有限個である。そこで、

$$\|f\| = \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}[1/p]_{\geq 0})^{\oplus n}} |c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}|$$

と定めると、これは R 上の K 代数ノルムになる。すると、 $R^{\circ} = K^{\circ}\langle T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}} \rangle = \{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$ で、これは開かつ bounded となる。順極限 $\varinjlim_{\Phi} K^{\circ}/\varpi[T_1, \dots, T_n]$ を $K^{\circ}/\varpi[T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}}]$ とかく。すると R°/ϖ は自然に $K^{\circ}/\varpi[T_1^{1/p^{\infty}}, \dots, T_n^{1/p^{\infty}}]$ と同一視できるから、フロベニウス写像 $\Phi: R^{\circ}/\varpi \rightarrow R^{\circ}/\varpi$ は全射である。故に R は perfectoid K -algebra である。これは perfectoid K -algebra の典型例であり、古典的な Tate K 代数 $K\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ の perfectoid 空間での類似物になっている (cf. [Sch, Proposition 5.20])。

2. 例 2.2.4 の例で $k = K$ とする。例 2.6.2 に述べたことから A° は bounded にならないので A は perfectoid K -algebra にはならない。一般に perfectoid K -algebra R は被約である。何故ならば、もし仮に零でない冪零元 $a \in R$ があるとすると、 $Ka \subset R^{\circ}$ となり、これは R° が bounded であることに矛盾するからである。よって、 A が perfectoid K -algebra の構造を持ち得ないことがわかる。

3. $K\langle T^{1/p^{\infty}} \rangle$ のイデアル $(T^{1/p^n})_{n \geq 0}$ を考える。これは有限生成でないので、 $K\langle T^{1/p^{\infty}} \rangle$ はネーター環でないことを注意しておく。 $K\langle T^{1/p^{\infty}} \rangle / (T^{1/p^n})_{n \geq 0}$ は K と同型で perfectoid K -algebra と見なし得る。一方で、 $K\langle T^{1/p^{\infty}} \rangle / (T)$ は被約でないので perfectoid K -algebra にはなり得ない。

ここで tilting 同値の構成を述べる。そのために、以下の四つの関手 $\spadesuit, \spadesuit^b, \clubsuit, \clubsuit^b$ を導入する。

$$(5.1) \quad K\text{-Perf} \xrightarrow{\spadesuit} K^{\circ a}\text{-Perf} \xrightarrow{\clubsuit} (K^{\circ a}/\varpi)\text{-Perf} \simeq (K^{\flat a}/\varpi^{\flat})\text{-Perf} \xleftarrow{\clubsuit^b} K^{\flat a}\text{-Perf} \xleftarrow{\spadesuit^b} K^{\flat}\text{-Perf}.$$

中央の圏同値は命題 3.3 における同型 $K^\circ/\varpi \simeq K^{\circ a}/\varpi^b$ から誘導される。 $\spadesuit$ と $\clubsuit$ は次で与えられる：

$$(5.2) \quad \spadesuit: K\text{-Perf} \rightarrow K^{\circ a}\text{-Perf}; R \mapsto R^{\circ a},$$

$$(5.3) \quad \clubsuit: K^{\circ a}\text{-Perf} \rightarrow (K^{\circ a}/\varpi)\text{-Perf}; R^{\circ a} \mapsto R^{\circ a}/\varpi.$$

これらの関手が well-defined であることは非自明だが、そうであるとして暫く話を進める。関手 $\spadesuit, \clubsuit$ は圏同値を誘導することが知られている。 $\spadesuit$ が圏同値であることは後に示す。 $\clubsuit$ が圏同値であることを示すためには almost mathematics の理論と cotangent complex の理論を使う。この証明については本稿では紹介しない。 $\spadesuit^b$ と $\clubsuit^b$ は上の K を K^b で取り替えて得られる関手である。(5.1) で得られる圏同値 $K\text{-Perf} \simeq K^b\text{-Perf}$ を tilting 同値 と呼ぶ。また任意の perfectoid K -algebra R に対してこの圏同値による像 R^b を R の tilt と呼ぶ。 R を R^b の untilt ということもある。

以下では $\spadesuit$ が well-defined であることまた圏同値を誘導することを示す。

補題 5.4 ([Sch, Proposition 5.6]). R が perfectoid K -algebra ならば、 $R^{\circ a}$ は perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra である。

証明. 局所化関手 $(\cdot)^a: M \mapsto M^a$ は左随伴関手を持つので逆極限と可換である。また定義 4.1 の直前に述べたように、この関手は完全である。関手 $R^{\circ a} \otimes (\cdot)$ が右完全であることは既に述べた (cf. 命題 4.4 の直後の注)。任意の $K^{\circ a}$ 加群 M に対して $R^{\circ a} \otimes M = (R^\circ \otimes_{K^\circ} M_*)^a$ であり、関手 $(\cdot)_*$ は左完全であるので、 R° が K° 上平坦ならば $R^{\circ a}$ も $K^{\circ a}$ 上平坦である。 R° が ϖ 進完備であるならば

$$R^{\circ a} \xrightarrow{\sim} \left(\varprojlim_n R^\circ/\varpi^n \right)^a \simeq \varprojlim_n R^{\circ a}/\varpi^n$$

なので $R^{\circ a}$ も ϖ 進完備であることがわかる。故に R° が K° 上平坦かつ ϖ 進完備であることを示せば $R^{\circ a}$ もそうであることがわかる。 $R^\circ \subset R$ で R は ϖ 捻れがないので R° もそうであるから、 R° は K° 上平坦である。 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ($a_n \in R^\circ$) を ϖ 進位相におけるコーシー列とすると R° が bounded であることから、それは R° の完備 K 代数ノルムに関してもコーシー列であるとわかる。よって、 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は収束するから ϖ 進完備であるとわかる (cf. 定義 5.1 の直後の注)。最後にフロベニウス写像 $\Phi: R^\circ/\varpi^{1/p} \rightarrow R^\circ/\varpi$ が同型を誘導することを示す。全射性は R が perfectoid K -algebra なので定義から明らかである。単射性を示す。 R°/ϖ において $\bar{y}^p = 0$ が成り立つと仮定する。ある $x \in R^\circ$ が存在して $y^p = x\varpi$ と書ける。すると $x = (y/\varpi^{1/p})^p \in R^\circ$ より、 $y/\varpi^{1/p}$ も power-bounded なので $z = y/\varpi^{1/p} \in R^\circ$ とおくと、 $R^\circ/\varpi^{1/p}$ において $\bar{y} = \varpi^{1/p}z = 0$ がわかる。□

補題 5.5.

$$\heartsuit: K^{\circ a}\text{-Perf} \rightarrow K\text{-Perf}; A \mapsto A_*[\varpi^{-1}]$$

は関手を定める。更に、 $(A_*[\varpi^{-1}])^\circ = A_*$ が成立する。

証明. $R = A_*[\varpi^{-1}]$ が perfectoid K -algebra になることを示す。 $a \in A_*$ に対して

$$(5.4) \quad \|a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varpi|^{\sup\{k | a^k \in \varpi^n A_*\}/n}$$

とおき、 R に自然に延長すると、これは R 上の power-multiplicative な K 代数ノルムを定める。これに関して R はバナッハ K 代数となる。フロベニウス写像 $\Phi: A_*/\varpi^{1/p} \rightarrow A_*/\varpi$ が同型になることを示す。単射性を示す。 $x \in A_*$ かつ $x^p \in \varpi A_*$ と仮定して $x \in \varpi^{1/p} A_*$ を示せばよい。 A は perfectoid K^{oa} -algebra であり $A_*^a \xrightarrow{\sim} A$ だから Φ は almost に単射である。故に任意の $\epsilon \in \mathfrak{m}$ に対して $\epsilon x \in \varpi^{1/p} A_*$ である。[Sch, Lemma 5.3 (ii)] によって

$$(5.5) \quad A_* = \{z \in R \mid \epsilon z \in A_* \ (\epsilon \in \mathfrak{m})\}$$

が成り立つので、 $y = x/\varpi^{1/p} \in R$ は任意の $\epsilon \in \mathfrak{m}$ に対し $\epsilon y \in A_*$ をみたすから、 $y \in A_*$ がわかる。よって、 $x \in \varpi^{1/p} A_*$ が示された。

次に全射性を示す。仮定より Φ は almost に全射であるから

$$(5.6) \quad \mathfrak{m}((A_*/\varpi)/\text{Im } \Phi) = 0$$

が成立する。まず合成写像

$$(5.7) \quad A_*/\varpi^{1/p} \xrightarrow{\Phi} A_*/\varpi \xrightarrow{\text{can.}} A_*/\mathfrak{m}A_*$$

が全射になると仮定して、 Φ が全射であることを示す。任意の元 $x \in A_*$ を取る。この仮定より、ある $z \in A_*$, $\epsilon \in \mathfrak{m}$, $a \in A_*$ が存在して、 $z^p = x + \epsilon a$ と書ける。 $\bar{a} \in A_*/\varpi$ を考えると (5.6) より、 $\bar{\epsilon} \bar{a} \in \text{Im } \Phi$ がわかる。故にある $y \in A_*$ が存在して、 $\epsilon a \equiv y^p \pmod{\varpi A_*}$ となる。 A_*/ϖ においては p が零なので $(z - y)^p \equiv x \pmod{\varpi A_*}$ を得る。故に、 Φ の全射がわかる。

次の主張を示す。

$$(5.8) \quad a \in R, \ a^p \in A_* \implies a \in A_*.$$

$R = A_*[\varpi^{-1}]$ より $\varpi^{k/p} a \in A_*$ なる自然数 $k \geq 1$ が存在する。すると Φ の単射性より $(\varpi^{k/p} a)^p \in \varpi A_*$ から $\varpi^{k/p} a \in \varpi^{1/p} A_*$ が出る。よって、 $\varpi^{(k-1)/p} a \in A_*$ を得る。この議論を繰り返すと、 $a \in A_*$ を得る。これより (5.8) が示せた。

さて、(5.7) の全射性を示す。 $x \in A_*$ を取る。(5.6) より、ある $y \in A_*$ が存在して、

$$(5.9) \quad y^p \equiv \varpi^{1/p} x \pmod{\varpi A_*}$$

が成立する。 $z = y/\varpi^{1/p^2} \in R$ とおくと (5.9) により、 $z^p \equiv x \pmod{\varpi^{(p-1)/p} A_*}$ を得る。特に $z^p \equiv x \pmod{\mathfrak{m}A_*}$ を得る。 $z^p \in A_*$ だから (5.8) により、 $z \in A_*$ がわかる。よって (5.7) の全射性を得る。

最後に $R^\circ = A_*$ を示す。ノルム (5.4) について任意の $a \in A_*$ に対して $\|a\| \leq 1$ であるから、 $A_* \subset R^\circ$ がわかる。逆に $x \in R^\circ$ を取る。 R° は bounded で A_* は開だから任意の $\epsilon \in \mathfrak{m}$ に対して、ある自然数 $n \geq 1$ が存在して $(\epsilon x)^{p^n} \in A_*$ となる。故に (5.8) より $\epsilon x \in A_*$ がわかる。よって (5.5) から題意を得る。 $\square$

命題 5.6.

$$\heartsuit \circ \spadesuit \simeq \text{id}, \quad \spadesuit \circ \heartsuit \simeq \text{id}$$

が成立する。特に、 $\spadesuit$ は圏同値を誘導する。

証明. $\heartsuit \circ \spadesuit \simeq \text{id}$ を示す。 $R \in K\text{-Perf}$ に対して、 $R \simeq (R^{\circ a})_*[\varpi^{-1}]$ を示せばよい。随伴写像 $R^{\circ} \rightarrow (R^{\circ a})_*$ は関手 $(\cdot)^a$ で送ると同型になるので almost に同型である。これに $(\cdot) \otimes_{K^{\circ}} K$ すると同型 $R \simeq (R^{\circ a})_*[\varpi^{-1}]$ を得る。

次に、 $\spadesuit \circ \heartsuit \simeq \text{id}$ を示す。命題 4.4 により、 $A \in K\text{-Perf}$ に対し、

$$A \xrightarrow{\sim} A_*^a = (A_*[\varpi^{-1}])^{\circ a}$$

が成立するから題意が従う。 $\square$

定理 5.7. 圏同値 $K\text{-Perf} \simeq K^b\text{-Perf}$ が成り立つ。この圏同値を tilting 同値 と呼ぶ。

証明. 関手 $\spadesuit$ が圏同値を誘導することは命題 5.6 において既にみた。 $\clubsuit$ が圏同値を引き起こすことの証明は省略するがそれを認めると題意が従う。 $\square$

以下では tilting 同値をより具体的に理解するために Fontaine による明示的な構成との比較を行う。

$$K\text{-Perf} \rightarrow K^b\text{-Perf}; R \mapsto R^b$$

と書く。 $A = R^{\circ a}$ とおく。

$$(5.10) \quad A^b = \varprojlim_{\Phi} A/\varpi$$

とおく。すると、 $K^{b \circ a} = \left(\varprojlim_{\Phi} K^{\circ}/\varpi \right)^a = \varprojlim_{\Phi} K^{\circ a}/\varpi$ という同一視を通じて A^b を $K^{b \circ a}$ 加群とみなすことが出来る。

命題 5.8. 自然な同型

$$(5.11) \quad A_*/\varpi \simeq A_*^b/\varpi^b, \quad A_*^b \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} A_*$$

が存在する。 A^b は perfectoid $K^{b \circ a}$ -algebra である。

証明. 同型 (5.11) を示すためには、以下の同一視を使う。

$$(5.12) \quad A_*^b = \left(\varprojlim_{\Phi} A/\varpi \right)_* \simeq \varprojlim_{\Phi} (A/\varpi)_* \simeq \varprojlim_{\Phi} A_*/\varpi.$$

最後の同一視で $\Phi: (A/\varpi)_* \rightarrow (A/\varpi)_*$ の像が A_*/ϖ に一致することを使っている。但しこれは非自明である (cf. [Sch, Proposition 5.17 の証明])。あとは perfectoid 体の場合と同様に示せるので省略する。

$A^\flat$ が perfectoid $K^{\flat\circ a}$ -algebra であることを示そう。随伴写像 $(A^\flat)^a \rightarrow A^\flat$ が同型であり関手 $(\cdot)^a$ が完全関手で逆極限と可換なので、題意を示すためには $A_*^\flat = \varprojlim_{\Phi} A_*/\varpi$ が $K^{\flat\circ}$ 上平坦であって、 $\varpi^\flat$ 進完備でありフロベニウス写像 $\Phi^\flat: A_*^\flat/(\varpi^\flat)^{1/p} \rightarrow A_*^\flat/\varpi^\flat$ が同型であることを示せばよい。まず平坦性を示す。(3.4) を思い出すと

$$\varpi^\flat = \left(0, \overline{\varpi^{1/p}}, \overline{\varpi^{1/p^2}}, \dots\right) \in K^{\flat\circ}$$

である。 $A_*^\flat$ に非自明な $\varpi^\flat$ 捻れが無いことを示せば十分である。そこで $\varpi^\flat x = 0$ として $x = 0$ を示す。 $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ と書く。

$$\varpi^\flat x = \left(0, \overline{\varpi^{1/p}x_1}, \overline{\varpi^{1/p^2}x_2}, \dots\right) = 0$$

なので任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\varpi^{1/p^n}x_n \in \varpi A_*$ であることがわかる。よって $x_n \in \varpi^{(p^n-1)/p^n} A_*$ である。任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n+1}^p \in (\varpi^{(p^{n+1}-1)/p^n} A_* \text{ の } A_*/\varpi \text{ における像}) = \{0\}$$

となり、 $\bar{x}_n = 0$ がわかるので $x = 0$ が示せた。

$\varpi^\flat$ 進完備であることを示す。 $A_*^\flat$ におけるコーシー列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を考える。 $x_n = (\bar{x}_{1,n}, \bar{x}_{2,n}, \dots)$ と書くと、任意の i に対して n を十分大きくすると $\bar{x}_{i,n}$ は一定になる。それを c_i とかくと、元 $c = (c_1, c_2, \dots) \in A_*^\flat$ が定まる。 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は c に収束することがわかるので示せた。

最後にフロベニウス写像 $\Phi^\flat: A_*^\flat/(\varpi^\flat)^{1/p} \rightarrow A_*^\flat/\varpi^\flat$ が同型になることを示す。次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} A_*^\flat/(\varpi^\flat)^{1/p} & \xrightarrow{\Phi^\flat} & A_*^\flat/\varpi^\flat \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ A_*/\varpi^{1/p} & \xrightarrow{\Phi} & A_*/\varpi. \end{array}$$

縦の射は (5.11) の一つ目の同型である。補題 5.5 において下段のフロベニウス写像は既に同型であることを示したので、上の可換図式より $\Phi^\flat$ が同型もわかる。□

以上より、欲しかった以下の $R^\flat$ の明示的記述を得る。

系 5.9.

$$(5.13) \quad R^\flat \simeq \left(\varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi\right)[(\varpi^\flat)^{-1}], \quad R^{\flat\circ} \simeq \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi$$

と書ける。

証明. 同型 (5.11) の一つ目に完全関手 $(\cdot)^a$ を施すと同型 $A/\varpi \simeq A^b/\varpi^b$ が得られる。補題 5.5 における $\heartsuit$ の $\flat$ 版として関手 $\heartsuit^b$ を

$$\heartsuit^b: K^{b \circ a}\text{-Perf} \rightarrow K^b\text{-Perf}; B^b \mapsto B_*^b[(\varpi^b)^{-1}]$$

と定める。命題 5.6 と同様に、 $\heartsuit^b$ は $\spadesuit^b$ の逆関手である。また補題 5.5 の $\flat$ 版として

$$(5.14) \quad (A_*^b[(\varpi^b)^{-1}])^\circ = A_*^b$$

が成り立つ。tilting 同値の定義から

$$(5.15) \quad R^b = \heartsuit^b(A^b) = A_*^b[(\varpi^b)^{-1}]$$

を得る。(5.12) より、

$$(5.16) \quad A_*^b \simeq \varprojlim_{\Phi} A_*/\varpi$$

が成り立つ。 $A = R^{\circ a}$ とおいたことを思い出そう。命題 5.6 の一つ目より、 $(R^{\circ a})_*[\varpi^{-1}] \simeq R$ が成り立つ。この同型に $(\cdot)^\circ$ を施すと、補題 5.5 の後半の主張より同型 $A_* = (R^{\circ a})_* \simeq R^\circ$ を得る。これより (5.16) は次の形に書ける。

$$(5.17) \quad A_*^b \simeq \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi.$$

よって (5.15) より最初の主張を得る。(5.15) に $(\cdot)^\circ$ を施すと、(5.14) より $R^{b \circ} = A_*^b$ を得る。よって、二つ目の主張は (5.17) から従う。□

同型 (5.13) において特に $R = K$ としてみれば、これは命題 3.3 の tilt の構成と同じ形をしているので自然な構成であるとわかる。

R^b の完備 K 代数ノルムを少し別のやり方で構成する。(5.11) の二つ目の同型の自然な延長として次の同型が成立する。

$$R^b \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} R.$$

この表示より tilting 同値は ϖ の取り方によらないことがわかる。この同型と第一射影 $\varprojlim_{x \mapsto x^p} R \rightarrow R$ との合成で積構造と両立する写像

$$(5.18) \quad (\cdot)^\sharp: R^b \rightarrow R$$

が得られる。 R 上の完備ノルム $\|\cdot\|$ を使って、 R^b には $\|f\|_b = \|f^\sharp\|$ ($f \in R^b$) により、完備ノルム $\|\cdot\|_b$ が定義出来る。このノルムの構成法は再び、命題 3.3 での K^b 上の付値の構成の自然な一般化である。

次に perfectoid K -algebra 上有限エタールな代数からなる圏を調べたい。 R を perfectoid K -algebra とする。その上の有限エタール代数の圏を R_{fet} と書く。

以下の二つの命題は almost mathematics の帰結の一つである。

次の定理は標数 $p > 0$ の場合の almost purity theorem と呼ばれる定理で Faltings により示された。

(i) S は perfectoid K -algebra である。 (ii) $S^{\circ a}$ は $R^{\circ a}$ 上有限エタールである。

$$(5.19) \quad \begin{array}{ccccccc} R_{\text{fet}} & \xleftarrow{(1)} & R_{\text{fet}}^{\circ a} & \xrightarrow[\cong]{(2)} & (R^{\circ a}/\varpi)_{\text{fet}} & \xrightarrow{\cong} & (R^{b \circ a}/\varpi^b)_{\text{fet}} \\ \downarrow \scriptstyle (a) & & \downarrow \scriptstyle (b) & & \downarrow \scriptstyle (c) & & \downarrow \scriptstyle (c)^b \\ K\text{-Perf} & \xrightarrow[\cong]{\spadesuit} & K^{\circ a}\text{-Perf} & \xrightarrow[\cong]{\clubsuit} & (K^{\circ a}/\varpi)\text{-Perf} & \xrightarrow{\cong} & (K^{b \circ a}/\varpi^b)\text{-Perf}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (R^{b \circ a}/\varpi^b)_{\text{fet}} & \xleftarrow[\cong]{(2)^b} & R_{\text{fet}}^{b \circ a} & \xleftarrow[\cong]{(1)_b} & R_{\text{fet}}^b \\ \downarrow \scriptstyle (c)^b & & \downarrow \scriptstyle (b)^b & & \downarrow \scriptstyle (a)^b \\ (K^{b \circ a}/\varpi^b)\text{-Perf} & \xleftarrow[\cong]{\clubsuit^b} & K^{b \circ a}\text{-Perf} & \xleftarrow[\cong]{\spadesuit^b} & K^b\text{-Perf}. \end{array}$$
$$\begin{aligned}
(1): R_{\text{fet}}^{\circ a} &\rightarrow R_{\text{fet}}; B \mapsto B_*[\varpi^{-1}], & (1)^b: R_{\text{fet}}^b &\rightarrow R_{\text{fet}}^{b \circ a}; S^b \mapsto S^{b \circ a}, \\
(2): R_{\text{fet}}^{\circ a} &\rightarrow (R^{\circ a}/\varpi)_{\text{fet}}; S \mapsto S/\varpi, & (2)^b: R_{\text{fet}}^{b \circ a} &\rightarrow (R^{b \circ a}/\varpi^b)_{\text{fet}}; S^b \mapsto S^b/\varpi^b, \\
(a)^b: R_{\text{fet}}^b &\rightarrow K^b\text{-Perf}; S^b \mapsto S^b, \\
(b): R_{\text{fet}}^{\circ a} &\rightarrow K^{\circ a}\text{-Perf}; S \mapsto S^b, & (b)^b: R_{\text{fet}}^{b \circ a} &\rightarrow K^{b \circ a}\text{-Perf}; S^b \mapsto S^b, \\
(c): (R^{\circ a}/\varpi)_{\text{fet}} &\rightarrow (K^{\circ a}/\varpi)\text{-Perf}; S \mapsto S, \\
(c)^b: (R^{b \circ a}/\varpi^b)_{\text{fet}} &\rightarrow (K^{b \circ a}/\varpi^b)\text{-Perf}; S^b \mapsto S^b.
\end{aligned}$$

ここで、 $(a)^\flat$ と $(1)_\flat$ の well-definedness は定理 5.11 の (i) と (ii) よりそれぞれわかる。 $(1)_\flat$ は (1) と類似の逆関手を持つので圏同値を誘導する。 (c) , $(c)^\flat$ の well-definedness は命題 5.10 より従う。 (2) , $(2)^\flat$ が圏同値であることは定理 4.9 より従う。 (1) の well-definedness はエタールの定義を直接確かめることでわかる。結果的に (b) , $(b)^\flat$ が well-defined だとわかる。上の図式の上段を逆に辿って忠実充満関手 $F: R_{\text{fet}}^\flat \rightarrow R_{\text{fet}}$ を得る (cf. [Sch, Theorem 5.25])。これを定理として述べておこう。

定理 5.12 ([Sch, Theorem 5.25]). 次の性質をみたす忠実充満関手 $F: R_{\text{fet}}^b \rightarrow R_{\text{fet}}$ が存在する。これの本質的像 (essential image) は R 上有限エタールな perfectoid K -algebra S で $S^{\circ a}$ も $R^{\circ a}$ 上有限エタールであり、 $F(S^b) \simeq S$ をみたすものの全体である。

この関手 F が圏同値になることはもっと一般の枠組みで示されることになるがこれが [Sch] の主定理の一つ ([Sch, Theorem 7.12]) である。一つ目の図式の破線になっている関手 (a) の存在は標数零での almost purity 定理を示す事でわかる。言い換えると S を R 上有限エタールとしたとき、 S が perfectoid K -algebra であることが非常に非自明であり、関手 (a) の存在はこの時点ではわからない (cf. 定理 7.4.3)。

§ 6. Perfectoid 空間とタイトの非輪状性定理

この節ではいよいよ perfectoid 空間を定義する。前節に引き続き K は perfectoid 体とする。 K° や $\mathfrak{m}$ は前節の通りとする。 K^b は K の tilt としその付値環を $K^{b\circ}$ とし、極大イデアルを $\mathfrak{m}^b$ と書く。

定義 6.1. affinoid K -algebra (R, R^+) が perfectoid affinoid K -algebra であるとは、 R が perfectoid K -algebra であることとする。

補題 6.2. 1. $\mathfrak{m}R^\circ \subset R^+ \subset R^\circ$ が成り立つ。
2. R° は R の中で整閉である。 R^+ が R で整閉であることと R^+ が R° で整閉であることは同値である。

証明. 主張 1 を示す。包含関係 $R^+ \subset R^\circ$ は affinoid ring の定義に含まれている。 $\mathfrak{m}R^\circ \subset R^+$ を示す。まず $R^{\circ\circ} \subset R^+$ を示す。 $x \in R^{\circ\circ}$ を取る。 R^+ は開なのである自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x^n \in R^+$ と出来る。よって x は R^+ 上整であり、 $R^+ \subset R^\circ$ は整閉だから $x \in R^+$ がわかる。 $\mathfrak{m}R^\circ \subset R^{\circ\circ}$ より主張 1 が従う。

主張 2 を示す。二つ目の主張は一つ目の主張より直ちに従う。よって一つ目を示す。 $a \in R$ を R° 上の整元とする。ある自然数 N が存在して $R^\circ[a] = R^\circ + R^\circ a + \cdots + R^\circ a^N$ と書ける。これと R° が bounded より $R^\circ[a]$ は bounded である。 R° は開だから $R^\circ[a] = \bigcup_{x \in R^\circ[a]} (x + R^\circ)$ は明らかに R の開部分環である。よって、定義 2.1 直後の段落で述べたことから $R^\circ[a]$ は R の定義環である。 R° はすべての定義環の合併であるから $R^\circ[a] \subset R^\circ$ である。よって $a \in R^\circ$ を得る。□

注. 一般に、 A が f-adic ring ならば A° が A の中で整閉であることが示せる。

例 6.3. 例 5.3.1 の記号の通りとする。 $R = K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle$ とすると、 $R^\circ = K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle$ であって、補題 6.2.2 より R° は R の中で整閉な開部分環である。また R は Tate K -algebra である。故に組

$$\left(K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle, K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle \right)$$

は perfectoid affinoid K -algebra である。

前節の (5.18) で写像 $(\cdot)^\sharp: R^\flat \rightarrow R$ を定義したことを思い出す。

補題 6.4 ([Sch, Lemma 6.2]). perfectoid affinoid K -algebra の圏を $K\text{-AffPerf}$ と書く。すると、自然な圏同値 $K\text{-AffPerf} \simeq K^\flat\text{-AffPerf}$; $(R, R^+) \mapsto (R^\flat, R^{\flat+})$ が存在する。写像 $(\cdot)^\sharp: R^\flat \rightarrow R$ は同型 $R^{\flat+}/\varpi^\flat \simeq R^+/\varpi$ を誘導し、また $R^{\flat+} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^+$ が成立する。

証明. $R^{(b)\circ}$ の整閉な開部分環 $R^{(b)+}$ は $R^{(b)+} \mapsto R^{(b)+}/\mathfrak{m}^{(b)}$ により、 $R^{(b)\circ}/\mathfrak{m}^{(b)}$ の整閉な部分環と一対一対応する。この対応は tilting 同値と両立的なので題意を得る。□

定義 6.5. perfectoid affinoid K -algebra (R, R^+) に対して補題 6.4 の $(R^\flat, R^{\flat+})$ を (R, R^+) の tilt と呼ぶ。

注. (R, R^+) を $(R^\flat, R^{\flat+})$ の untilt と言ったりする場合もある。また $\flat$ 付きで議論した後に tilting の操作をたどって $\flat$ 無しで同等のことが主張出来る場合に、「untilting する」などと言ったりする。

例 6.6. perfectoid affinoid K -algebra

$$(R, R^+) = \left(K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle, K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle \right)$$

の tilt は

$$(R^\flat, R^{\flat+}) = \left(K^\flat\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle, K^{\flat\circ}\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle \right)$$

である。例 5.3.1 で見たように $R^{(b)\circ}/\varpi \simeq (K^{(b)\circ}/\varpi^{(b)})[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]$ であり、 $K^\circ/\varpi \simeq K^{\flat\circ}/\varpi^\flat$ だったから、同型 $R^\circ/\varpi \simeq R^{\flat\circ}/\varpi^\flat$ が得られる。これと tilting 同値の構成から $(R^\flat, R^{\flat+})$ は (R, R^+) の tilt であるとわかる (cf. [Sch, Proposition 5.20])。

この節の主定理を述べる。 (R, R^+) を perfectoid affinoid K -algebra とする。 $X = \text{Spa}(R, R^+)$, $X^\flat = \text{Spa}(R^\flat, R^{\flat+})$ とおく。

定理 6.7 ([Sch, Theorem 6.3]). (5.18) の写像 $(\cdot)^\sharp: R^\flat \rightarrow R$ を使って、写像 $\flat: X \rightarrow X^\flat$; $x \mapsto x^\flat$ を $|f(x^\flat)| = |f^\sharp(x)|$ ($f \in R^\flat$) により定める。

(i) この写像 $\flat$ は同相写像である。 X の全ての rational subset のなす集合を $\mathcal{R}_X$ と書き、 $X^\flat$ の全ての rational subset のなす集合を $\mathcal{R}_{X^\flat}$ と書く。 $U \in \mathcal{R}_X$ に対して $U^\flat$ を U の写像 $\flat$ による像とすると $U^\flat \in \mathcal{R}_{X^\flat}$ となる。更に、写像 $\mathcal{R}_X \rightarrow \mathcal{R}_{X^\flat}$; $U \mapsto U^\flat$ は全単射になる。

(ii) 任意の $U \in \mathcal{R}_X$ に対して、組 $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$, $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ はそれぞれ perfectoid affinoid K -algebra, perfectoid affinoid $K^\flat$ -algebra である。

更に、 $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ は $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ の tilt である。

(iii) $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X^\flat}$ は共に層である。

(iv) 正の整数 i に対してコホモロジー $H^i(X, \mathcal{O}_X^+)$ は almost zero 対象である。

この定理は perfectoid 空間論の基礎を成す重要なものであるが、紙幅の都合上証明を細かく解説出来ない。ここでは、証明の大雑把な流れを紹介するにとどめる。(i), (ii) を先に示してそれらを使って (iii) 以降を示す。 $\flat: X \rightarrow X^\flat$ による rational subset の逆像は rational subset であることが容易に確かめられて、写像 $\flat$ は連続写像であることがわかる。最初に、任意の rational subset $U^\flat \subset X^\flat$ に対して、 $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ が perfectoid affinoid $K^\flat$ -algebra であることを示す。 $U^\flat$ の写像 $\flat: X \rightarrow X^\flat$ による逆像を $U^\sharp$ と書く。組 $(\mathcal{O}_X(U^\sharp), \mathcal{O}_X^+(U^\sharp))$ が perfectoid K -algebra であり、その tilt が $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ に同型であることを tilting 同値を使って示す。その証明は [Sch, Lemma 6.4] で与えられている。以下、この証明の概略を述べる。 $U^\flat$ の表示 (2.2) を取る。

$$U^\flat = U \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle.$$

但し、 $f_i, g \in R^{\flat\circ}$ となるように取る。すると、

$$U^\sharp = U \left\langle \frac{f_1^\sharp, \dots, f_n^\sharp}{g^\sharp} \right\rangle$$

と書ける事が容易にわかる。ところで、 $\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat)$ や $\mathcal{O}_X(U^\sharp)$ の定義 (2.3) を見ても、これらの環が perfectoid algebra であるかどうか判然としない。そこで、より perfectoid 的な構成から出来る別の環と比較することで、perfectoid algebra であることを示す。

一般に F を標数 p の perfectoid 体とすると、任意の perfectoid F -algebra S について S° は完全環になる。これを示そう。 S は perfectoid だから任意の正の整数 n に対して $\Phi_n: S^\circ \rightarrow S^\circ/\varpi^{pn}; x \mapsto \bar{x}^p$ は全射である。 $a \in S$ に対して $a^p \in S^\circ$ ならば $a \in S^\circ$ となるので、 Φ_n の核は $\varpi^n S^\circ$ であることがわかる。よって、全単射 $S^\circ/\varpi^n \xrightarrow{\sim} S^\circ/\varpi^{pn}$ を得る。これの n に関する逆極限を取れば、 S° の ϖ 進完備性から S° 上の p 乗フロベニウス写像の全単射性が従う。

上の事実から非負整数 m と $f \in R^{\flat\circ}$ に対して、 $R^{\flat\circ}$ には f の p^m 乗根が唯一つ存在する。それを f^{1/p^m} と書く。これの $(\cdot)^\sharp: R^\flat \rightarrow R$ による像を $f^{\sharp 1/p^m}$ と書くことにする。

元 $\frac{f^{\sharp 1/p^m} (g^{\sharp 1/p^m})^{p^m-1}}{g^\sharp} \in R \left[\frac{1}{g^\sharp} \right]$ を $\left(\frac{f^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^m}$ と書く。二つの部分環

$$\begin{aligned} R^{\flat\circ} \left[\left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right] &= \bigcup_{m=0}^{\infty} R^{\flat\circ} \left[\left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^m}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^m} \right] \subset R^\flat \left[\frac{1}{g} \right], \\ R^\circ \left[\left(\frac{f_1^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^\infty} \right] &= \bigcup_{m=0}^{\infty} R^\circ \left[\left(\frac{f_1^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^m}, \dots, \left(\frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^m} \right] \subset R \left[\frac{1}{g^\sharp} \right] \end{aligned}$$

を考える。これらの ϖ^b 進完備化と ϖ 進完備化をそれぞれ

$$R^{b\circ}(U^b) = R^{b\circ} \left\langle \left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle,$$

$$R^\circ(U^\sharp) = R^\circ \left\langle \left(\frac{f_1^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle$$

と書く。このとき、 $R^{b\circ}(U^b)^a$ が perfectoid $K^{b\circ a}$ -algebra であることが比較的容易にわかる。次の二つの環

$$R^{b,\circ} \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right], \quad R^\circ \left[\frac{f_1^\sharp}{g^\sharp}, \dots, \frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right]$$

の ϖ^b 進完備化と ϖ 進完備化をそれぞれ

$$R^{b,\circ} \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle, \quad R^\circ \left\langle \frac{f_1^\sharp}{g^\sharp}, \dots, \frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right\rangle$$

と書く。構成より、これらはそれぞれ $\mathcal{O}_{X^b}(U^b)$, $\mathcal{O}_X(U^\sharp)$ の部分環である。このとき、次の包含関係

$$(6.1) \quad \begin{aligned} R^{b\circ} \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle &\subset R^{b\circ}(U^b) \subset R^b \left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g} \right\rangle = \mathcal{O}_{X^b}(U^b), \\ R^\circ \left\langle \frac{f_1^\sharp}{g^\sharp}, \dots, \frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right\rangle &\subset R^\circ(U^\sharp) \subset R \left\langle \frac{f_1^\sharp}{g^\sharp}, \dots, \frac{f_n^\sharp}{g^\sharp} \right\rangle = \mathcal{O}_X(U^\sharp) \end{aligned}$$

が成り立つことを示す。これより

$$(6.2) \quad \mathcal{O}_{X^b}(U^b) = R^{b\circ}(U^b)[(\varpi^b)^{-1}] \xrightarrow{\sim} (R^{b\circ}(U^b)^a)_*[(\varpi^b)^{-1}]$$

がわかり、 $R^{b\circ}(U^b)^a$ が perfectoid $K^{b\circ a}$ -algebra であることと補題 5.5 より、 $\mathcal{O}_{X^b}(U^b)$ が perfectoid K^b -algebra である事が従う。更に $(\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$ が perfectoid affinoid K^b -algebra であることも示せる。(6.2) に $(\cdot)^{\circ a}$ を施すと補題 5.5 より同型

$$(6.3) \quad R^{b\circ}(U^b)^a \simeq \mathcal{O}_{X^b}(U^b)^{\circ a}$$

もわかる。もし $R^\circ(U^\sharp)^a$ が perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra であると仮定すれば、(6.1) の二つ目の包含関係を使って上と同様の議論をすることで $(\mathcal{O}_X(U^\sharp), \mathcal{O}_X^+(U^\sharp))$ が perfectoid affinoid K -algebra である事が示せる。そこで、 $R^\circ(U^\sharp)^a$ が perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra であることを示し、 $(\mathcal{O}_X(U^\sharp), \mathcal{O}_X^+(U^\sharp))$ の tilt が $(\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$ であることを示す。これは以下のような流れで示される。 (S, S^+) を $(\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$ の untilt とする。自然な perfectoid affinoid K^b -algebra の間の射

$$(R^b, R^{b,+}) \rightarrow (\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$$

の untilt を考えると、perfectoid affinoid K -algebra の間の射

$$(R, R^+) \rightarrow (S, S^+)$$

を得る。これが誘導する adic 空間の間の射 $\mathrm{Spa}(S, S^+) \rightarrow X$ は $U^\sharp$ を経由することがわかり、命題 2.7 より affinoid K -algebra の間の射

$$(\mathcal{O}_X(U^\sharp), \mathcal{O}_X^+(U^\sharp)) \rightarrow (S, S^+)$$

を得る。これが誘導する $K^{\circ a}$ -algebra の間の射

$$\mathcal{O}_X(U^\sharp)^{\circ a} \rightarrow S^{\circ a}$$

と (6.1) の下段から誘導される $K^{\circ a}$ -algebra の間の射 $R^\circ(U^\sharp)^a \rightarrow \mathcal{O}_X(U^\sharp)^{\circ a}$ との合成により

$$R^\circ(U^\sharp)^a \rightarrow S^{\circ a}$$

という $K^{\circ a}$ -algebra の間の射を得る。これが $K^{\circ a}/\varpi$ -algebra としての同型

$$(6.4) \quad R^\circ(U^\sharp)^a/\varpi \xrightarrow{\sim} S^{\circ a}/\varpi$$

を誘導することを示す。これを示すときに、tilting 同値と (6.3) を使う。構成より $R^\circ(U^\sharp)$ が K° 上平坦かつ ϖ 進完備なことは明らかである。よって、同型 (6.4) より $R^\circ(U^\sharp)^a$ は perfectoid $K^{\circ a}$ -algebra であることがわかる。これより同型 $\mathcal{O}_X(U^\sharp)^{\circ a} \simeq R^\circ(U^\sharp)^a$ がわかり、 $\mathcal{O}_X(U^\sharp)$ の tilt が $\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat)$ であることが従う。このことから $(\mathcal{O}_X(U^\sharp), \mathcal{O}_X^+(U^\sharp))$ の tilt が $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ であることも従う。

次に、 R が $K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle$ の場合に任意の $f \in R$ が定める関数

$$X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto |f(x)|$$

をある意味で近似するような $\tilde{f} \in R^\flat$ を構成する (cf. [Sch, Lemma 6.5 and Corollary 6.7 (i)]). この近似定理を使うと X のすべての rational subset は $X^\flat$ の rational subset の写像 $\flat$ による逆像となることが示せる。このことと X が T_0 空間であることから写像 $\flat$ の単射性が従う。全射性を示すために各点 $x^\flat \in X^\flat$ に対して剰余体の完備化 $\widehat{k(x^\flat)}$ が perfectoid 体であることを示す。体とその上の付値に関する untilting を使うと全射性がわかる。([Sch, Proposition 3.6 and Corollary 6.7 (iii)]). 以上のように、 $\flat$ が同相であることと、 X のすべての rational subset が逆像の形で書けることを使って (ii) が完全に示せる。以上の議論で (i), (ii) を証明する。

(iii), (iv) は K が正標数の場合に perfectoid K -algebra を古典的な affinoid K -algebra の極限で書いておいて古典的な Tate の非輪状性定理 (Tate's acyclicity theorem) に帰着させる。あとは (ii) と untilting を使って標数零のときに示す (cf. [Sch, Proposition 6.10 から Proposition 6.14 迄の議論]).

系 6.8. (R, R^+) を perfectoid affinoid K -algebra とすると、 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ は K 上の affinoid adic 空間を定める。

証明. 定理 6.7 (iii) より従う。 $\square$

定義 6.9. (R, R^+) を perfectoid affinoid K -algebra とする。

1. $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ を K 上の affinoid perfectoid 空間 と呼ぶ。
2. X を K 上の adic 空間とする。 X が局所的に affinoid perfectoid 空間と同型ならば、 X を K 上の perfectoid 空間 と呼ぶ。

例 6.10. 1. K 上の affinoid perfectoid 空間

$$\mathrm{Spa}\left(K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle, K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty} \rangle\right)$$

は半径 1 の closed polydisk の perfectoid 版である。これを半径 1 の perfectoid closed polydisk と呼ぶこともある。

2. $K^\circ[[T^{1/p^\infty}]]$ の (ϖ, T) 進完備化を $K^\circ[[T^{1/p^\infty}]]$ とかく。この環に (ϖ, T) 進位相を入れて位相環とみなす。 $\mathrm{Spa}(K^\circ[[T^{1/p^\infty}]], K^\circ[[T^{1/p^\infty}]])$ の開部分集合

$$X = \left\{ x \in \mathrm{Spa}\left(K^\circ[[T^{1/p^\infty}]], K^\circ[[T^{1/p^\infty}]]\right) \mid |\varpi(x)| \neq 0 \right\}$$

を考えると、自然な連続写像 $X \rightarrow \mathrm{Spa}(k, k^\circ)$ がある。例 2.13 のように

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U \left\langle \frac{\varpi, T^n}{\varpi} \right\rangle$$

と rational subset の和集合で書くと、各 rational subset $U \left\langle \frac{\varpi, T^n}{\varpi} \right\rangle$ は K 上の affinoid perfectoid 空間 $\mathrm{Spa}\left(K\left\langle \left(\frac{T^n}{\varpi}\right)^{1/p^\infty} \right\rangle, K^\circ\left\langle \left(\frac{T^n}{\varpi}\right)^{1/p^\infty} \right\rangle\right)$ と同一視することで、 X に K 上の perfectoid 空間の構造を入れることができる。これは半径 1 の開円板の perfectoid 版である。

定義 6.11. X を K 上の perfectoid 空間とする。 $K^\flat$ 上の adic 空間 $X^\flat$ が X の tilt である とは、全ての perfectoid affinoid K -algebra (R, R^+) に対して関手的な同型

$$\mathrm{Hom}_{(V_K)}(\mathrm{Spa}(R, R^+), X) \simeq \mathrm{Hom}_{(V_{K^\flat})}(\mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+}), X^\flat)$$

が成立することである。但し、 (V_K) , $(V_{K^\flat})$ は定義 2.12 で定義された圏とする。

adic 空間 X を単に位相空間と見なしたものを $|X|$ と書く。

命題 6.12. 任意の perfectoid 体 K 上の perfectoid 空間 X は同型を除いて唯一つの tilt $X^\flat/K^\flat$ を有する。更に同相写像 $\flat: |X| \simeq |X^\flat|$; $x \mapsto x^\flat$ が存在する。任意の部分集合 $U \subset X$ に対して写像 $\flat$ の像を $U^\flat$ と書く。更に各 affinoid adic 空間 $U \subset X$ に対して組 $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$, $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ はそれぞれ perfectoid affinoid K -algebra, perfectoid affinoid $K^\flat$ -algebra であって、 $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ の tilt は $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ である。

証明. この主張は定理 6.7 を貼り合わせて証明できる。唯一性は tilt の定義から従う。 $\square$

§ 7. エタール位相

定義 7.1. K は perfectoid 体とする。

1. perfectoid affinoid K -algebra の間の射 $(R, R^+) \rightarrow (S, S^+)$ が 有限エタールである とは、 S が R 上有限エタールであって、 S^+ が R^+ の整閉包であることとする。
2. K 上の perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が 有限エタールである とは、ある Y の affinoid perfectoid 空間による開被覆 $\bigcup_{i \in I} U_i$ があって $V_i = f^{-1}(U_i)$ が affinoid perfectoid 空間であって $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U_i$ が 1 の意味で有限エタールであることとする。
3. K 上の perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が エタールである とは、各点 $x \in X$ に対して x の開近傍 U と $f(x)$ の開近傍 V が存在して制限 $f|_U: U \rightarrow V$ が次のように分解することとする：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & W \\ & \searrow f|_U & \downarrow \bar{f} \\ & & V, \end{array}$$

ここで $\bar{f}$ は 2 の意味で有限エタールで、 j は開埋め込みであるとする。

注. adic 空間のエタール射の概念については [Hu3] も見られたい。

定義 7.2. 1. perfectoid affinoid K -algebra の間の射

$(R, R^+) \rightarrow (S, S^+)$ が 強有限エタールである とは、有限エタールであって $S^{\circ a}$ が $R^{\circ a}$ 上有限エタールであることとする。

2. K 上の perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が 強有限エタールである とは、ある Y の affinoid perfectoid 空間による被覆 $\bigcup_{i \in I} U_i$ があって $V_i = f^{-1}(U_i)$ が affinoid perfectoid 空間であって $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U_i$ が 1 の意味で強有限エタールであることとする。
3. K 上の perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が 強エタールである とは、各点 $x \in X$ に対して x の開近傍 U と $f(x)$ の開近傍 V が存在して制限 $f|_U: U \rightarrow V$ が次のように分解することとする：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & W \\ & \searrow f|_U & \downarrow \bar{f} \\ & & V, \end{array}$$

ここで $\bar{f}$ は 2 の意味で強有限エタールで、 j は開埋め込みであるとする。

命題 7.3 ([Sch, Proposition 7.6]). K 上の perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が強有限エタールであるとする。このとき、任意の $V \subset Y$ に対して、逆像 $U = f^{-1}(V)$ は

affinoid perfectoid であって、誘導される射

$$(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \rightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$$

が定義 7.2.1 の意味で強有限エタールである。

この命題は以下の定理 7.4 の証明で使われるがその証明の詳細は述べられない。tilting 同値を使って標数 p の場合に帰着する。更に標数 p の場合には局所ネーターな adic 空間に関する類似の命題に帰着することで示される。

標数に関係なく almost purity 定理が成立する。

定理 7.4 ([Sch, Theorem 7.9]). (R, R^+) を perfectoid affinoid K -algebra とする。 $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ とおく。その tilt を $X^\flat$ と書く。

1. 任意の開 affinoid perfectoid 空間 $U \subset X$ に対して、 U 上の強有限エタール被覆の圏を U_{stfet} と書く。 $\mathcal{O}_X(U)$ 上の有限エタール代数の成す圏を $\mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{fet}}$ とおく。このとき、関手 $U_{\mathrm{stfet}} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{fet}}; V \mapsto \mathcal{O}_V(V)$ は忠実充満である。
2. この関手が圏同値を誘導する。
3. 任意の有限エタール射 $R \rightarrow S$ に対して、 S は perfectoid であり、 $S^{\circ a}$ は $R^{\circ a}$ 上有限エタールである。

K を perfectoid 体とする。次の関手の合成

$$K^\circ\text{-mod} \rightarrow K^{\circ a}\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}$$

を考える。前者は $N \mapsto N^a$ で後者は $(\cdot) \otimes_{K^\circ} K$ から誘導される関手とする。真ん中の圏が almost mathematics に現れる圏であった。真ん中の圏は生成ファイバーと整モデルの圏の中間に位置している。この意味で真ん中の圏はほとんど整モデル (almost integral model) を扱っている圏だと思えることができる。perfectoid 空間の場合には生成ファイバーで成り立つことが自動的にほとんど整モデルの圏でも成り立つという哲学がある ([Sch, p.18 の中央辺りの文章])。上の定理もこの哲学の一つの顛れである。例えば、affinoid perfectoid 空間 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ の強有限エタール被覆の定義においては生成ファイバーの条件 ($R \rightarrow S$ が有限エタールである) に加えてほとんど整モデルの情報 ($S^{\circ, a}$ が $R^{\circ, a}$ 上有限エタール) も付いていたが、この定理の一つ目の主張により、生成ファイバーの情報から自動的にほとんど整モデルに関する情報が出てしまう。定理 7.4 の主張は全て定理 5.12 と命題 7.3 から従う。但し、二つ目の主張では定理 3.6 と tilting 同値を使う。

定理 7.4.3 によって、可換図式 (5.19) の左端の破線で書いていた関手 $(a): R_{\mathrm{fet}} \rightarrow K\text{-Perf}; S \mapsto S$ の存在がわかり、定理 5.12 の忠実充満関手 $R_{\mathrm{fet}}^\flat \rightarrow R_{\mathrm{fet}}$ が圏同値を導くことがわかる。

定義 7.5. X を K 上の perfectoid 空間とする。 X のエタールサイトを X 上エタールな perfectoid 空間の成す圏 X_{et} と位相的な被覆の組として定義する。

定理 7.4 より、サイトの定義をみたすことがわかる。perfectoid 空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ が与えられると、サイトの射 $f: X_{\text{et}} \rightarrow Y_{\text{et}}$ が誘導される。主定理を述べる。

定理 7.6 ([Sch, Theorem 7.12]). X を K 上の perfectoid 空間として $K^{\flat}$ 上の perfectoid 空間 $X^{\flat}$ をその tilt とする。すると tilt を対応させる関手はサイトの同型 $X_{\text{et}} \simeq X_{\text{et}}^{\flat}$ を誘導する。

一般にサイトがあると位相空間の場合の層と同様にしてサイト上の層の概念が定まる。特に先ほど定義した perfectoid 空間上のエタールサイト X_{et} を考える。 X_{et} 上のアーベル群に値を持つ層の圏から大域切断を取るというアーベル群の成す圏への関手 $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ を考える。この関手は左完全関手なので、任意の整数 i に対してこの関手の i 次右導来関手を考えることができる。それを $H^i(X_{\text{et}}, \mathcal{F})$ と書く。定理 7.6 は直ちに次を導く。

系 7.7. 記号を定理 7.6 の通りとする。 $\mathcal{F}$ を X_{et} 上のアーベル群に値を持つ層とする。定理 7.6 におけるサイトの同型と $\mathcal{F}$ から誘導される $X_{\text{et}}^{\flat}$ 上のアーベル群に値を持つ層を $\mathcal{F}^{\flat}$ とおく。このとき、全ての整数 $i \geq 0$ に対して同型

$$H^i(X_{\text{et}}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X_{\text{et}}^{\flat}, \mathcal{F}^{\flat})$$

が成り立つ。

参考文献

- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [DM] P. Deligne and J.S. Milne, *Tannakian categories*, in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, volume 900 of Lecture Notes in Mathematics, 1982, 101–228.
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids, d'après Peter Scholze*, Séminaire Bourbaki, 2011-2012, Astérisque 352, 509-534, Exp. No. 1057 (2013).
- [FW] J.-M. Fontaine and J.-P. Wintenberger, *Extensions algébrique et corps des normes des extensions*, APF des corps locaux. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **288**(8): A441–A444, 1979.
- [GR] O. Gabber and L. Ramero, *Almost ring theory*, volume 1800 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Ha] S. Hattori, *Ramification theory and perfectoid spaces — a survey*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **53** (2015), 47–63.
- [Hu1] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. **212**, no. 3 (1993), 455–477.
- [Hu2] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217**, no. 4 (1994), 513–551.
- [Hu3] R. Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E 30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

- [Hu4] R. Huber, *Swan representations associated with rigid analytic curves*, J. reine angew. Math. **537** (2001), 165–234.
- [Ito] T. Ito, *Perfectoid 空間論の整数論への応用*, to appear in this volume.
- [Sa] T. Saito, *Perfectoid spaces and the weight-monodromy conjecture, after Peter Scholze*, Acta Mathematica Vietnamica **39** Issue 1 (2014), 55–68.
- [Sch] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), 245–313.
- [Sch2] P. Scholze, *Perfectoid spaces: A survey*, Current developments in mathematics Volume 2012, International Press, 193–227 (2013).
- [Sch3] P. Scholze, *Perfectoid Spaces and their Applications*, Proceedings of the ICM 2014.