

local equivalence of differential forms
and their deformations

東大 理 大島 利雄

§1 序

$\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された^{正則}微分 k -型式の原点での基を $\Omega^{(k)}$ とする. ($k=0$ のとき $\mathcal{O}$ と書き, $k=-1$ のときは vector 場の基と考える.) $\mathcal{O}$ -加群 $\Omega^{(k)}$ には原点を固定する座標変換群 G が作用している. ここでは, 主に $\Omega^{(1)}$ の G -軌道を調べる. 即ち, 局所座標系をとったときの標準型と, それに変換される条件を求める試みであるが, deformation の立場から, 次の §2 の意味で generic なもの (即ち, versal deformation を持つもの) のみを考える.

§5. では, その結果を使って, 接触多様体の中の超曲面について, 同様の考察を行なう.

§2 versal deformation (= V.D.)

定義 $\omega(x) \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(k)}$ の deformation とは, $(\mathbb{C}^l, 0)$ から

$\Omega_{\mathbb{C}^n}^{(k)}$ への解析的写像 $t \mapsto \tilde{\omega}(x; t)$ で, $\tilde{\omega}(x, 0) = \omega(x)$ を満たすもの. 換言すれば, $t \in \mathbb{C}^l$ を parameter とする k -型式で, $t=0$ の時, $\omega(x)$ に一致するもの.

注意 $p: \mathbb{C}^{n+l} \rightarrow \mathbb{C}^l$ を自然な射影とすると, t を parameter とする k -型式とは,

$$\begin{cases} k \geq 1 & \text{は } \Omega_{\mathbb{C}^{n+l}}^{(k)} / \Omega_{\mathbb{C}^{n+l}}^{(k-1)} \cdot p^* \Omega_{\mathbb{C}^l}^{(1)} \\ k = 1 & = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+l}} \\ k = -1 & = (p^* \Omega_{\mathbb{C}^l}^{(1)})^\perp \quad (\subset \Omega_{\mathbb{C}^{n+l}}^{(-1)}) \end{cases}$$

の元と同視される.

定義 $\omega(x) \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(k)}$ の deformations $\tilde{\omega}(x; t)$ から $\tilde{\omega}'(x; t')$ への morphism とは, 下図と下式 とを満たす写像の組 $(\bar{\Phi}, \varphi)$ を言う.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{n+l}, 0) & \xrightarrow{(\bar{\Phi}, \varphi)} & (\mathbb{C}^{n+l'}, 0) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (\mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^{l'}, 0) \end{array} \quad \begin{cases} \bar{\Phi}: (\mathbb{C}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \\ \varphi: (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{l'}, 0) \end{cases}$$

$$(1) \quad x = \bar{\Phi}(x; 0) \quad (\bar{\Phi}(0; t) = 0 \text{ とは限らない.})$$

$$(2) \quad \tilde{\omega}(x; t) = \bar{\Phi}^*(x; t) \tilde{\omega}'(x; \varphi(t)) \quad (t \text{ は parameter})$$

また,

$\mathcal{O}$ -加群としての morphism $(\bar{\Phi}, \varphi, a)$ とは, $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+l}}$ で, (2) の条件を, 次の (2)' に置き換えたもの.

$$(2)' \quad \tilde{\omega}(x; t) = a(x; t) \cdot \bar{\Phi}^*(x; t) \tilde{\omega}'(x; \varphi(t))$$

定義 $\omega(x) \in \Omega^{(k)}$ の deformation $\tilde{\omega}(x; t)$ が versal であるとは (又は, $\mathcal{O}$ -加群として versal であるとは), $\omega(x)$ の任意の deformation $\tilde{\omega}'(x; t')$ に対し, $\tilde{\omega}'$ から $\tilde{\omega}$ への morphism (resp. $\mathcal{O}$ -加群としての morphism) が存在する場合を言う.

以下, ($\mathcal{O}$ -加群としての) versal deformation が存在するための必要十分条件を求めることが目的であるが, それに関して, 次のことが問題になる.

$\mathfrak{m}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の極大 ideal とする ($\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ でないことに注意せよ)

i) $\forall N$ に対し, modulo $\mathfrak{m}^N \Omega^{(k)}$ で考えれば V.D. が存在するが, その時の parameters の数の最小値を $l(N)$ とすれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} l(N) < \infty$$

となるか.

ii) 形式的中級数環 $\hat{\mathcal{O}}$ の中で考えて, V.D. が存在するか. この時の V.D. を $\hat{G}$ -V.D. と呼ぼう. ($G \rightarrow \hat{G}$)

iii) deformation $\tilde{\omega}$ として, $\tilde{\omega} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{m}^N \Omega^{(k)}}$ となるもののみの中で考えた時, ω の V.D. が存在するか. この時の V.D. を G_N -V.D. と呼ぼう.

iv) infinitesimal には, (即ち, $\text{mod } o(|t|)$ で考えたとき) V.D. が存在するか.

ω の V.D. $\tilde{\omega}$ が存在するとき,

v) $\tilde{\omega}$ が good か

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ parameter の空間 $\mathbb{C}^l$ の原点の近傍 U と, それの有限個の disjoint real analytic submanifolds への分割

$U = \bigcup_j U_j$ と, 射影 $\pi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^{m_j}$ が存在して,

" $t_1, t_2 \in U_j, \tilde{\omega}(x; t_2) \in G \cdot \tilde{\omega}(x; t_1) \iff \pi_j(t_1) = \pi_j(t_2)$ "

vi) ω が 性質 (F) を持つか.

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\omega' \equiv \omega \pmod{m^N \Omega^{(k)}}$ ならば ω' も V.D. を持ち, しかも ω' 自身が ω' の G_N -V.D. である.

§ 3 vector 場 の 場 合.

$v \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(-1)}$ に対し, 次の条件を考える.

(1) $n=1$ で $v \neq 0$

(2) $v(0) \neq 0$

(3) $v(0) = 0$ とする. この時, 線型写像

$$\begin{array}{ccc} T_v: & T_0 \mathbb{C}^n & \longrightarrow T_0 \mathbb{C}^n \\ & \downarrow \omega & \downarrow \omega \\ & w & \longmapsto [v, w] \end{array}$$

が well-defined となるが, その固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ としたとき, $\mathbb{C}$ の原点を通る超平面 H が存在して, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は H で区切られた 2 つの領域の 1 方にもみ存在するようにできる。

定理 (1) または (2) または (3) が成立すれば, v は good で性質 (F) を持つ V.D. が存在する。逆に (1) ~ (3) のいずれもが成立しなければ, v は $\hat{\mathcal{O}}$ -加群としての $\hat{G}_1$ -V.D. を (従って, 単に V.D. を) 持たない。

v が V.D. を持つかどうかということは, Gv の元に関して同じだから, Gv が V.D. を持つかどうかと言ってもよい。 $\mathcal{O}$ -加群として考えるときは, Gv の代わりに $G(\mathcal{O}^x v)$ を考えればよい。 ($\mathcal{O}^x \equiv \{f \in \mathcal{O} ; f(0) \neq 0\}$)

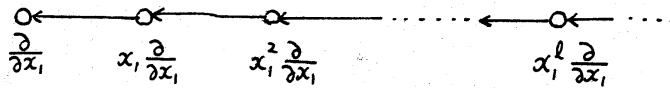
$Gv_1 \neq Gv_2$ の時 (又は $G\mathcal{O}^x v_1 \neq G\mathcal{O}^x v_2$ の時)

$$\textcircled{v_1} \longleftarrow \textcircled{v_2}$$

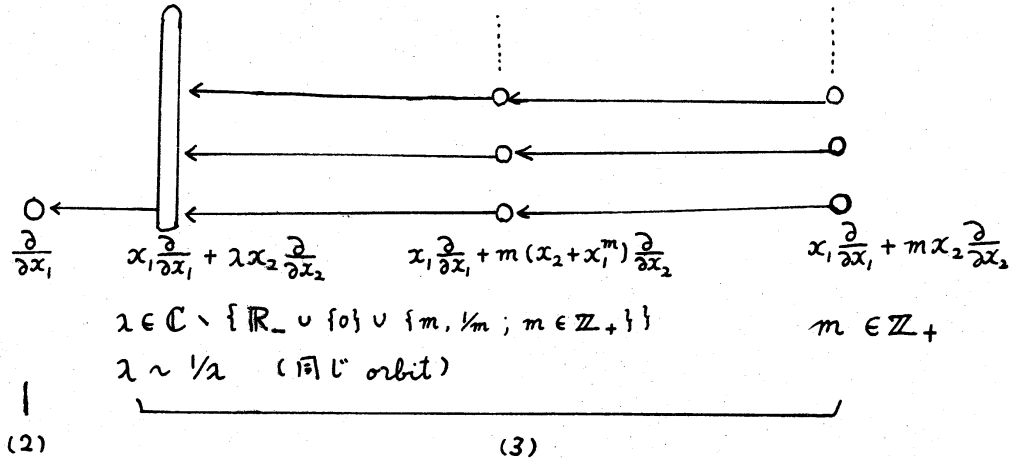
とは, v_2 の (十分小さな) deformation に Gv_1 の元 (resp. $G\mathcal{O}^x v_1$ の元) が現われることを示す。

そこで, $n=1, 2$ の場合, $\mathcal{O}$ -加群としての V.D. が存在する場合の $G\mathcal{O}^x$ -軌道の代表点をすべて図示すれば, ($\mathcal{O}$ -加群として, でない場合も大体同じ)。

$n = 1$ の場合 (1) の条件)



$n = 2$ の場合



G_2 -V.D. について, 詳しくは略すが, 次の例を見よ.

$n = 2$ で, $v = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}$ $a_1(0) = a_2(0) = 0$

T_v の固有値が, λ_1 と $-\lambda_2$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}_+$) とする.

(1) $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$ なら, $\hat{G}_2$ -V.D. を持つ.

(2) $\exists C > 0$ s.t. $C|\lambda_2/\lambda_1 - n/m| \geq m^{-C}$ ($\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$)

ならば, 性質 (F) を持つ G_2 -V.D. が存在する.

(3) (1) であって, 性質 (F) を持つ G_2 -V.D. が存在しない場合がある.

(4) $\lambda_1 = \lambda_2$ となる場合. を考えよう.

このとき, v は次のものの $\hat{G}^0$ -orbit になる.

$$w_{d,c} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 (1 + (x_1 x_2)^d + C(x_1 x_2)^{2d}) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(1 \leq d \leq \infty, C \sim 1-C)$$

このとき, $d < \infty$ ならば $v \in \hat{G} w_{d,c}$ であっても,

$v \in G w_{d,c}$ であるとは限らない. 例えば,

$$G w_{d,c} \ni x_1 (1 + \varepsilon x_1 (x_1 x_2)^m) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 (1 + (x_1 x_2)^d + C(x_1 x_2)^{2d}) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(\varepsilon \neq 0, m \gg 0)$$

§4 1-form の場合

定義 $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{cases} k = 2l \text{ (even)} & \text{の時, } \omega^k \equiv d\omega \wedge \dots \wedge d\omega \quad l\text{回} \\ k = 2l+1 \text{ (odd)} & \text{の時, } \omega^k \equiv \omega \wedge \omega^{k-1} \end{cases}$$

定理 $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき,

• $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(1)}$ が θ -加群として V.D. を持つ

$\Leftrightarrow$

$$(1) \quad \omega^{n-1}(0) \neq 0$$

または

$$(2) \quad \omega^{n-1}(0) = 0, \quad \omega^n(0) \neq 0 \quad \text{かつ}$$

$v_\omega d\omega = \omega$ を満たす $\exists! v \in \Omega^{(-1)}$ が V.D. を持つ.

• $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(1)}$ が V.D. を持つ.

$\Leftrightarrow$

$$(1)' \quad \omega^{(n-1)}(0) \neq 0, \quad \omega^{(n)}(0) \neq 0$$

または.

$$(1)'' \quad \omega^{(n-1)}(0) \neq 0 \quad \text{で,} \quad \omega^{(n)}(\overbrace{\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}}^{n \text{ 個}}) = \mathcal{O}f$$

または $(f \in \mathcal{O})$ と置いたとき, $f(0) = 0, df(0) \neq 0$.

(2) これは前頁の(2)と同じ。

$n = 2l - 1 \quad (l \geq 1)$ のとき.

• $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^n}^{(1)}$ が V.D. を持つ. ($\mathcal{O}$ -加群として V.D. を持つ)
としても同じ

⇐

$$1) \quad \omega^{(n)}(0) \neq 0$$

または

$$2) \quad \omega^{(n)}(\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}) = \mathcal{O}f \quad \text{としたとき,} \quad f(0) = 0, df(0) \neq 0$$

$$\omega^{(n-2)}|_{\{f=0\}}(0) \neq 0$$

または,

$$3) \quad \omega^{(n)}(\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}) = \mathcal{O}f \quad \text{としたとき,} \quad f(0) = 0, df(0) \neq 0$$

かつ, $\omega(0) = 0, \omega^{(n-1)}|_{\{f=0\}}(0) \neq 0$ で,

$i_v(dw|_{\{f=0\}}) = \omega|_{\{f=0\}}$ を満たす $\exists! v \in \Omega_{\mathbb{C}^{n-1}}^{(-1)}$ が

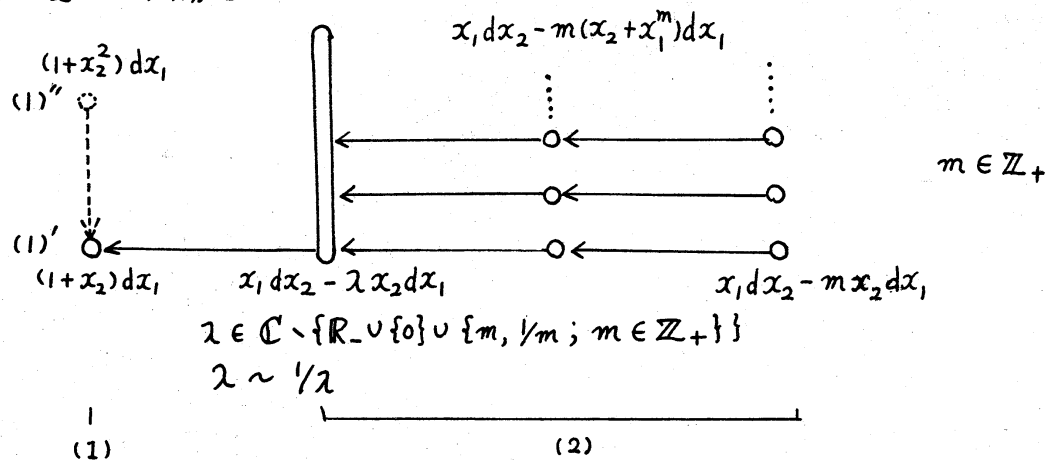
V.D. を持つ.

(ここで, $\Rightarrow$ も成立すると思われる。)

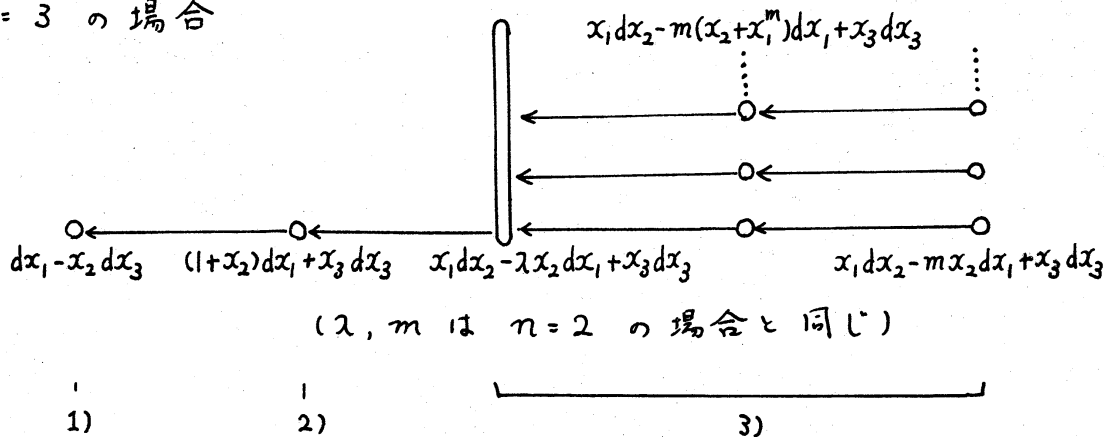
さらに, 上のいずれの条件 (1) ~ 3) が成立する場合でも, その ($\mathcal{O}$ -加群としての) V.D. は good で, 性質 (F) を持つ.

さて, §3 におけると同様, 上の条件が成立する場合の orbits の代表点を図示しよう.

$n = 2$ の場合



$n = 3$ の場合



§5 接触多様体の超曲面

$X = (\mathbb{C}^{2n+1}, \omega; 0)$ を接触多様体の原点での芽とする。
(即ち, $\omega^{(2n+1)}(0) \neq 0$, $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{2n+1}}^{(1)}$ である)

V を $f = 0$ (f は square free) で定義された原点を通る X の超曲面とする。また, G_c を、原点を固定する X の接触変換群とする (即ち, $G_c = \{\psi \in G; \psi^* \omega \in \mathcal{O} \omega\}$).

§2 におけると同様、この場合も V の V.D. という概念が定義できる。即ち、 $f \in \Omega_{\mathbb{C}^{2n+1}}^{(0)}$ の deformations を考え、それらの間の morphism とは Θ -加群としての morphism (ψ, φ, a) で、 $\psi(x, t)$ がすべての t に関して接触変換となっているものを言うことにすればよい。(この場合も $\psi(0; t) = 0$ は要請しない。)

定理 V が V.D. を持つ。

$\Leftrightarrow V$ が非特異で、 $\omega|_V$ が V.D. を持つ。 ($\omega|_V \in \Omega_V^{(1)} = \Omega_{\mathbb{C}^{2n}}^{(1)}$)

さらに、次の定理が成立するので、V.D. を持つ超曲面の G_C -orbits の分類は完全に分かる。

定理

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{原点を通る } X \text{ の非特異超} \\ \text{曲面 } V \text{ の } G_C\text{-orbits} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_V: V \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^{2n}, 0) \text{ とみなし} \\ \text{た時の } \varphi_V^{-1*}(\omega|_V) \text{ 達の} \\ G'\Theta'^X\text{-orbits} \end{array} \right\}$$

$$\left(\hookrightarrow \{ \Omega_{\mathbb{C}^{2n}}^{(1)} \text{ の } G'\Theta'^X\text{-orbits} \} \right)$$

但し、 G' は $\mathbb{C}^{2n}$ の原点を固定する座標変換群で、 $\Theta' = \Omega_{\mathbb{C}^{2n}}^{(0)}$ 。

さて、 (V_1, V_2) を、 X の原点を通る超曲面の組とする。
このときも、 (V_1, V_2) の V.D. が定義される。即ち、

$(f_1(x), f_2(x))$ の deformations $(\tilde{f}_1(x, t), \tilde{f}_2(x, t))$ を考えて、
それらの間の morphism とは、 $\mathcal{O}$ -加群としての morphism
 $(\varpi_1, \varphi_1, \alpha_1)$ と $(\varpi_2, \varphi_2, \alpha_2)$ の組で、

$$\begin{cases} \varpi_1 = \varpi_2, & \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varpi_1(x; t) \text{ は } \forall t \text{ に関し接触変換となるもの} \end{cases}$$

を言えばよい。

$n \geq 2$ とする。

定理 (V_1, V_2) は性質 (F) を持つ V.D. が存在する。

$\Leftrightarrow (V_1, V_2)$ は性質 (F) を持つ infinitesimal $G_{C,N}$ -V.D.

が存在する。 ($N \in \mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow (V_1, V_2) \in G_C(\{x_1=0\}, \{p_1=0\})$

(但し、 (p, x, z) は $\omega = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ となる正準座標系)

$\Leftrightarrow "V_1 = \{f=0\}, V_2 = \{g=0\}, \{f, g\}(0) \neq 0"$ と書ける。
 $\uparrow$ Poisson bracket

上の定理は、回折現象の方程式の標準型に関連した次の予想 (佐藤先生による。[1], [3] を参照せよ) の deformation の立場からの反例を与えていることに注意しよう。

" X の原点を通る非特異超曲面の組 (V_1, V_2) で、次の条件を満たすものは、1つの G_C -orbit を構成している。即ち、

$V_i = \{f_i = 0\} \quad i=1, 2$ と定義されていて、

$\{f_1, f_2\}(0) = 0, df_1 \wedge df_2(0) \neq 0, \{f_1, \{f_1, f_2\}\}(0) \neq 0, \{f_2, \{f_1, f_2\}\}(0) \neq 0$ "

この定理は次の命題から容易に従う。

命題 $P^*X \ni (x; \xi dx_\infty)$ の点 $x_0^* = (0; dx_n \infty)$ の近傍で定義された2つの hypersurfaces $(n = \dim X \geq 3)$

$$\begin{cases} V_1 = \{\xi_1 = 0\} \\ V_{2,t} = \{\xi_1 \xi_n^{-1} + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 + h(x, \xi) t = 0\} \end{cases}$$

を考える。 ($t \in \mathbb{C}$ は0の近傍を動く parameter)

$g(\lambda) = \sum_{j \geq 0} C_j \lambda^j$ が次の条件を満たすとする。

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|C_j|} < \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{j! |C_j|} = \infty$$

この時、

$$\begin{aligned} h &= (\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial x_1})(x_1 x_2^l g(\xi_2/\xi_n)) \\ &= x_2^l (x_1 g'(\xi_2/\xi_n) - g(\xi_2/\xi_n)) \end{aligned}$$

とおくと、任意の正整数 l に対し、次の条件を満たす Φ_t が存在しない (実際には、modulo $o(|t|)$ でも)

・ Φ_t は t を正則 parameter とする P^*X の接触変換である。

・ $\Phi_t(V_1) = V_1, \quad \Phi_t(V_{2,t}) = V_{2,0}, \quad \Phi_0(x_0^*) = x_0^*$

証明 次の正準変換を考える。

$$\begin{cases} \xi_1 \leftarrow \xi_1 \xi_n^{-1/3}, & \xi_2 \leftarrow \xi_2 \xi_n^{-2/3}, & \xi_3 \leftarrow \xi_3, \dots, \xi_n \leftarrow \xi_n \\ x_1 \leftarrow x_1 \xi_n^{1/3}, & x_2 \leftarrow x_2 \xi_n^{2/3}, & x_3 \leftarrow x_3, \dots, x_n \leftarrow x_n + (\frac{1}{3} x_1 \xi_1 + \frac{2}{3} x_2 \xi_2) / \xi_n \end{cases}$$

これにより,

$$V_1 = \{\xi_1 = 0\}, \quad V_2 = \{\xi_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + h'(x, \xi)t = 0\}.$$

(h' はもとの座標系で $2/3$ 次同次, $h' = \xi_n^{2/3} h$ である)

$\Phi_t: (\xi, x) \rightarrow (\eta, y)$ で, 条件を満たすものが存在すると仮定しよう. $\Phi_0 = \text{id.}$ としてよい. ($\Phi_t \rightarrow \Phi_0^{-1} \cdot \Phi_t$)

恒等変換の近くの正準変換の generating function Ω_t は次の様に表わせる.

$$\begin{cases} \Omega_t = \Omega'_t(\xi, y) - \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \\ \Omega'_t = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j + U(\xi, y, t) \cdot t, & U = \sum_{j \geq 0} U_j(\xi, y) t^j \\ \begin{cases} \eta_j = \frac{\partial \Omega'_t}{\partial y_j} = \xi_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \cdot t \\ x_j = \frac{\partial \Omega'_t}{\partial \xi_j} = y_j + \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \cdot t \end{cases} & (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

以後, 独立変数として, (ξ, y, t) をとる.

$\Phi_t(V_1) = \{\eta_1 = 0\}$ であるから, $\frac{\partial \Omega'_t}{\partial y_1} \Big|_{\xi_1=0} = 0$. 従って,

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} \Big|_{\xi_1=0} = 0.$$

また, $\Phi_t(V_{2,t}) = \{\eta_1 + \frac{1}{2}y_1^2 + y_2 = 0\}$ であるから,

$$\begin{aligned} & \xi_1 + \frac{1}{2}(y_1 + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} t)^2 + (y_2 + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} t) + h(y + \frac{\partial U}{\partial \xi} t, \xi) t \\ &= (1 + \varphi t) (\xi_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} t + \frac{1}{2}y_1^2 + y_2) \end{aligned}$$

ここで, $\varphi(\xi, y, t) = \sum_{j \geq 0} \varphi_j(\xi, y) t^j$ とおこう.

これから, 次の式を得る.

$$(2) \quad -\frac{\partial U}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - (\xi_1 + \frac{1}{2} y_1^2 + y_2) \varphi$$

$$= -\frac{t}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} \right)^2 - h'(y + \frac{\partial U}{\partial \xi} t, \xi) + t \varphi \frac{\partial U}{\partial y_1}$$

さらに, $\tau_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} y_1^2$, $\tau_2 = \xi_2 + y_1$, $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$
 という座標変換 (= 正準変換) を考えると.

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_1 - \frac{1}{2} z_1^2, & \xi_2 = \tau_2 - z_1, & y_1 = z_1, & y_2 = z_2 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_2} = -(-\frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}) \end{cases}$$

従って, (2) の左辺は $-\frac{\partial U}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2) \varphi$

U_k, φ_k の満たすべき式は, (1), (2) より

$$\begin{cases} (1)_k & \frac{\partial U_k}{\partial y_1} \Big|_{\xi_1=0} = 0 \\ (2)_k & -\frac{\partial U_k}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2) \varphi_k = \{(U_j, \varphi_j)_{0 \leq j \leq k-1} \text{ により決まる函数} \} \end{cases}$$

特に, $k=0$ のときは,

$$\begin{cases} (1)_0 & \frac{\partial U_0}{\partial y_1} \Big|_{\xi_1=0} = 0 \\ (2)_0 & -\frac{\partial U_0}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2) \varphi_0 = -h'(y, \xi) \end{cases}$$

以下, $y_3, \dots, y_n, \xi_3, \dots, \xi_n$ という変数は含まれていても,
 書かないことにする.

今, $h'(y, \xi) = \frac{\partial}{\partial z_1} f(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2)$ とすると (2)₀, (1)₀ より

$$\begin{aligned} U_0 &= f(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2) - (\tau_1 + z_2) \varphi_0(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2) - \varphi_1(z_2, \tau_1, \tau_2) \\ \text{かつ} \\ U_0 &= \varphi_2(y_2, \xi_2) + \varphi_3(y_1, y_2, \xi_1, \xi_2) \cdot \xi_1 \end{aligned}$$

と表わせることがわかる. 従って,

$$f = (\tau_1 + z_2) \varphi_0 + \varphi_1(z_2, \tau_1, \tau_2) + \varphi_2(y_2, \xi_2) + \xi_1 \varphi_3$$

さらに, $\xi_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2} y_1^2$ とおくと,

$$f(y_1, -\frac{1}{2}y_1^2, \frac{1}{2}y_1^2, z_2+y_1) = \varphi_1(-\frac{1}{2}y_1^2, \frac{1}{2}y_1^2, z_2+y_1) + \varphi_2(-\frac{1}{2}y_1^2, z_2)$$

ここで, $F(y_1, z_2) = f(y_1, -\frac{1}{2}y_1^2, \frac{1}{2}y_1^2, z_2+y_1)$ とおけば,

$$(3) \quad F(y_1, z_2) = \varphi_1(y_1^2, z_2+y_1) + \varphi_2(y_1^2, z_2)$$

と表わせるはずであり, 逆に F が右辺の形に表わせれば,

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ が存在して (φ_1, φ_3 は前頁の形)

$$U_0 = f - (T_1 + z_2) \cdot \varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \cdot z_1$$

となる.

以下, 2変数の問題となるので, y, z の suffix は略す.

与えられた F に対し, (3) の形の表示を求めよう. そのために

$F(y, z)$ が単項式の場合をまず調べる.

$$\begin{aligned} \circ \quad z^k y^{2N+1-k} &= \sum_{j=0}^N a_{k, 2N+1-k, j} (z+y)^{2j+1} y^{2(N-j)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^N b_{k, 2N+1-k, j} z^{2j+1} y^{2(N-j)} \quad (0 \leq k \leq 2N+1) \end{aligned}$$

$\cdot 2(N+1) - (2N+2) = 0$ だから $a_{k, 2N+1-k, j}, b_{k, 2N+1-k, j}$ は

唯一に定まる. (存在は後で示される.)

$$\begin{aligned} \circ \quad z^k y^{2N-k} &= \sum_{j=0}^N a_{k, 2N-k, j} (z+y)^{2j} y^{2(N-j)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^N b_{k, 2N-k, j} z^{2j} y^{2(N-j)} \quad (0 \leq k \leq 2N) \end{aligned}$$

$\cdot 2(N+1) - (2N+1) = 0$ だから $a_{k, 2N-k, j}, b_{k, 2N-k, j} (j \geq 1)$

は唯一に定まり, $a_{k, 2N-k, 0} + b_{k, 2N-k, 0}$ も決まる.

(存在については, 次を示す)

$$a_{k, 2i+1, j} = a_{k, 2i-1, j} = \cdots = a_{k, 1, j} \equiv a_{k, j} \quad \text{とおく.}$$

$$b_{k, 2i+1, j} = b_{k, 2i-1, j} = \cdots = b_{k, 1, j} \equiv b_{k, j}$$

同様に,

$$a_{k,2i,j} = a_{k,0,j} = 0, \quad b_{k,2i,j} = b_{k,0,j} = \delta\left[\frac{k}{2}\right].j$$

とすればよい.

$a_{k,j}$ と $b_{k,j}$ は次式を満たす様に定めればよい.

$$(4)_1 \quad \xi^{2k-1} = \sum_{0 \leq j \leq k} a_{2k-1,j} (\xi+1)^{2j} + \sum_{0 \leq j \leq k} b_{2k-1,j} \xi^{2j}$$

$$(4)_2 \quad \xi^{2k-2} = \sum_{0 \leq j \leq k-1} a_{2k-2,j} (\xi+1)^{2j+1} + \sum_{0 \leq j \leq k-1} b_{2k-2,j} \xi^{2j+1}$$

$$(4)_1 \quad \text{に} \quad 2k \int_0^{\xi} \cdot d\xi \quad \text{を} \quad \text{ほ} \quad \text{こ} \quad \text{す} \quad \text{と},$$

$$\begin{aligned} \xi^{2k} &= \sum \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j} (\xi+1)^{2j+1} + \sum \frac{2k}{2j+1} b_{2k-1,j} \xi^{2j+1} \\ &\quad - \sum \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j} \end{aligned}$$

$$(4)_2 \quad \text{に} \quad (2k-1) \int_0^{\xi} \cdot d\xi \quad \text{を} \quad \text{ほ} \quad \text{こ} \quad \text{す} \quad \text{と}$$

$$\begin{aligned} \xi^{2k-1} &= \sum \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j} (\xi+1)^{2j+2} + \sum \frac{2k-1}{2j+2} b_{2k-2,j} \xi^{2j+2} \\ &\quad - \sum \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j} \end{aligned}$$

よって, $a_{k,j}$, $b_{k,j}$ 達を次式で決めればよいことがわかる.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{2k,j} &= \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j}, & a_{0,0} &= 1, \\ b_{2k,j} &= \frac{2k}{2j+1} b_{2k-1,j}, & b_{0,0} &= -1, \\ a_{2k-1,j} &= \frac{2k-1}{2j} a_{2k-2,j-1} & \text{for } j \geq 1, \\ b_{2k-1,j} &= \frac{2k-1}{2j} b_{2k-2,j-1} & \text{for } j \geq 1, \\ a_{2k-1,0} &= - \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2j+1} a_{2k-1,j} = - \sum_{j \geq 1} \frac{2k-1}{2j(2j+1)} a_{2k-2,j-1} \\ b_{2k-1,0} &= - a_{2k-1,0} - \sum_{j \geq 0} \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j}. \end{aligned} \right.$$

従って,

$$\begin{aligned} a_{2k,j} &= \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j} = \frac{2k(2k-1)}{(2j+1)2j} a_{2k-2,j-1} = \dots \\ &= \frac{(2k)!}{(2k-2j)!(2j+1)!} a_{2(k-j),0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k,0} &= 2k a_{2k-1,0} = - \sum_{j \geq 1} \frac{(2k)(2k-1)}{(2j)(2j+1)} a_{2k-2,j-1} = - \sum_{j \geq 1} a_{2k,j} \\ &= - \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{(2k)!}{(2k-2j)!(2j+1)!} a_{2(k-j),0} \end{aligned}$$

$|a_{2k,0}|$ の $k \rightarrow \infty$ での漸近的挙動を調べたい。そのため,

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{2k,0} \quad \text{とおくと,} \quad (c_0 = 1)$$

$$(6) \quad c_k = \frac{1}{3!} c_{k-1} - \frac{1}{5!} c_{k-2} + \frac{1}{7!} c_{k-3} - \dots - \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_0$$

$$\text{さらに, } d_k = c_{k-1} / c_k \quad \text{とおくと.}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1/6 & d_1 = 6 & , & d_5 = 9.841 \dots \\ c_2 = 7/360 & d_2 = 60/7 = 8.75 \dots & , & d_6 = 9.8625 \dots \\ c_3 = 31/(6^3 \times 70) & d_3 = 294/31 = 9.48 \dots & , & d_7 = 9.8678 \dots \\ c_4 = 127/(6^3 \times 2800) & d_4 = 1240/127 = 9.76 \dots & , & \vdots \end{cases}$$

帰納法により, $9 \leq d_k \leq 11$ ($k \geq 3$) を示す.

(実際は, $d_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi^2 = 9.8696 \dots \Rightarrow$ "演習問題")

$d_1 = 6$, $d_2 = 60/7 < 11$ であり, d_3, d_4 は不等式を満たす. そこで, $k \geq 5$ とすると, 帰納法の仮定より,

$$0 \leq \sum_{j \geq 5} \frac{c_{k-j}}{(2j+1)!} \leq \frac{c_{k-4}}{9!} \sum_{j \geq 5} \frac{9!}{(2j+1)!} (11)^{j-4} \leq \frac{c_{k-4}}{9!} \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = \frac{c_{k-4}}{9 \cdot 9!}$$

ここで, (6) を用いれば,

$$\begin{aligned}
 C_k &= \sum_{j \geq 1} \frac{-(-1)^j}{(2j+1)!} C_{k-j} \geq \frac{C_{k-1}}{3!} - \frac{C_{k-2}}{5!} + \frac{C_{k-3}}{7!} - \frac{C_{k-4}}{9!} + \frac{C_{k-4}}{9 \cdot 9!} \\
 &\geq \frac{C_{k-1}}{3!} - \frac{C_{k-2}}{5!} + \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9} \frac{11}{9!} \right) C_{k-3} \quad (\Leftarrow d_{k-3} \leq 11) \\
 &\geq \frac{1}{3!} - \left(\frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9} \frac{11}{9!} \right) 9 \right) C_{k-2} \quad (\Leftarrow d_{k-2} \geq 9) \\
 &\geq \left(\frac{1}{3!} - 11 \left(\frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9} \frac{11}{9!} \right) 9 \right) \right) C_{k-1} \quad (\Leftarrow d_{k-1} \leq 11) \\
 &\geq \frac{1}{11} C_{k-1}
 \end{aligned}$$

最後の不等式は,

$$\begin{aligned}
 11 \left(\frac{1}{3!} - 11 \left(\frac{1}{5!} - 9 \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9} \frac{11}{9!} \right) \right) \right) &= \frac{11}{3!} - \frac{11^2}{5!} + \frac{9 \cdot 11^2}{7!} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 11^3}{9 \cdot 9!} - 1 \\
 &= -\frac{121+120-220}{5!} + \frac{1089}{7!} - \frac{11^3 \times 10}{9!} = \frac{1089-21 \times 42}{7!} - \frac{13310}{9!} \\
 &= \frac{207 \times 72 - 13310}{9!} > 0 \quad \text{からでる。}
 \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}
 C_k &\leq \frac{C_{k-1}}{3!} - \frac{C_{k-2}}{5!} + \frac{C_{k-3}}{7!} - \frac{C_{k-4}}{9!} + \frac{C_{k-4}}{9 \cdot 9!} \\
 &\leq \frac{C_{k-1}}{3!} - \frac{C_{k-2}}{5!} + \left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9} \frac{6}{9!} \right) C_{k-3} \quad (\Leftarrow d_{k-3} \geq 6) \\
 &\leq \frac{C_{k-1}}{3!} - \left(\frac{1}{5!} - 11 \left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9} \frac{6}{9!} \right) \right) C_{k-2} \quad (\Leftarrow d_{k-2} \leq 11) \\
 &\leq \left(\frac{1}{3!} - 9 \left(\frac{1}{5!} - 11 \left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9} \frac{6}{9!} \right) \right) \right) C_{k-1} \quad (\Leftarrow d_{k-1} \geq 9) \\
 &\leq \frac{C_{k-1}}{9}
 \end{aligned}$$

最後の不等式は,

$$\begin{aligned}
 9 \left(\frac{1}{3!} - 9 \left(\frac{1}{5!} - 11 \left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9} \frac{6}{9!} \right) \right) \right) - 1 &= \frac{9}{3!} - \frac{9^2}{5!} + \frac{9^2 \cdot 11}{7!} - \frac{8 \cdot 6 \cdot 9^2 \cdot 11}{9 \cdot 9!} - 1 \\
 &= \frac{180-81-120}{5!} + \frac{891}{7!} - \frac{66}{7!} = \frac{891-21 \times 42-66}{7!} = -\frac{57}{7!} < 0
 \end{aligned}$$

よりわかる。

従って, 帰納法から, $9 \leq d_k \leq 11$ ($k \geq 3$) を得る。

よって, $1/11 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{C_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{C_k} \leq 1/9$ となるので

$$1/\sqrt{11} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k,1}|/k!} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k,1}|/k!} \leq 1/3$$

(実際は, $1/\pi$ に収束する)

これから, 容易に命題を得る.

証明 終り.

参考文献

証明は, 最後の命題を除いて省略した. "条件" が満たされた場合の V.D. の存在証明は, [2] の Theorem 1.4, ²¹⁾ Theorem 2.16, ²¹⁾ [3] の定理 3.1 の証明と同様の方法が使える. "条件" が満たされなければ V.D. が存在しないことの証明は, 面倒で, 余り重要とは思われないので, 最後の命題の証明のみ挙げた.

[1] 柏原正樹, 河合隆裕; 単一特性的でない場合の浜田の定理について, 教理研講究録, 226 (1975), 105-113.

[2] 大島利雄; singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A, 21 (1974), 43-83.

[3] ———; 微分形式の特異点について, 教理研講究録, 227 (1975), 97-108.

補足

p11 にある問題 " " の (deformation の立場からでない) 実際の反例について.

$$(df_1 \wedge df_2(0) \neq 0 \Rightarrow \omega \wedge df_1 \wedge df_2(0) \neq 0 \text{ と訂正してください})$$

P^*Y ($\ni (x_0, \dots, x_n; \sum_{i=0}^n \xi_i dx_i \alpha)$) の点 $p = (0; dx_n \alpha)$ の近傍で定義された3つの hypersurfaces ($n+1 = \dim X \geq 4$)

$$\begin{cases} W_1 = \{ \xi_1 = 0 \} \\ W_2 = \{ \xi_1 \xi_n^{-1} + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 = 0 \} \\ W_2' = \{ \xi_1 \xi_n^{-1} + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 + h(x_1, x_2, \xi_2/\xi_n) \cdot (\xi_0/\xi_n) = 0 \} \end{cases}$$

を考える。但し, h は p12 に与えた形とする。このとき, p の近傍で定義された解析的接触変換 Ψ で,

$$\Psi(W_1) = W_1, \quad \Psi(W_2) = W_2', \quad \Psi(p) = p$$

を満たすものは存在しない。

証明 次の正準変換

$$\begin{cases} \xi_1 \leftarrow \xi_1 \xi_n^{-2/3}, & \xi_2 \leftarrow \xi_2 \xi_n^{-2/3}, & \xi_n \leftarrow \xi_n \\ x_1 \leftarrow x_1 \xi_n^{2/3}, & x_2 \leftarrow x_2 \xi_n^{2/3}, & x_n \leftarrow x_n + (\frac{1}{2} x_1 \xi_1 + \frac{2}{3} x_2 \xi_2) / \xi_n \end{cases}$$

を考えれば,

$$W_1 = \{ \xi_1 = 0 \}$$

$$W_2 = \{ \xi_1 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 = 0 \}$$

$$W_2' = \{ \xi_1 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 + \hat{h}(x_1, x_2, \xi_2, \xi_n) \cdot \xi_0 = 0 \}$$

となる。これらに対し、条件を満たす正準変換 Ψ が、点 $\hat{p} = (0; 0, \dots, 0, 1)$ の近傍で存在しないことを言えばよい。

もし、 $\Psi: (x, \xi) \mapsto (y, \eta)$ が存在したとする。このとき、変換 Ψ の 1 次近似を見れば、条件から

$$\begin{cases} \xi_1 \leftrightarrow C_1 \eta_1 & (C_1 \neq 0) \\ x_1 \leftrightarrow \frac{1}{C_1} y_1 + (\text{y}_1 \text{ を含まぬ項}) \\ x_2 \leftrightarrow C_2 y_2 + (C_2 - C_1) \eta_1 & (C_2 \neq 0) \end{cases}$$

がわかるので、 $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}(\hat{p}) \neq 0$ を得る。従って、適

当な indices の集合 $J \subset \{0, 3, 4, \dots, n\}$ に関する基本正準

変換
$$x_j \rightarrow \begin{cases} x_j & j \notin J \\ \xi_j & j \in J \end{cases}, \quad \xi_j \rightarrow \begin{cases} \xi_j & j \notin J \\ -x_j & j \in J \end{cases}$$

と、indices $\{0, 3, 4, \dots, n\}$ の中での indices をとりかえる変換とを（これらの変換は、 W_1, W_2 を変えないことに注意せよ）考えることにより、

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\hat{p}) \neq 0, \quad \frac{\partial(y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_0, x_1, \dots, x_n)}(\hat{p}) \neq 0$$

が満たされていると考えてよい。よって、独立変数として

(y, ξ) が選べ、generating function Ω として

$$\begin{cases} \Omega = \Omega'(y, \xi) - \sum_{j=0}^n x_j \xi_j \\ \eta_j = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_j}(y, \xi), \quad x_j = \frac{\partial \Omega'}{\partial \xi_j}(y, \xi) \quad (0 \leq j \leq n) \end{cases}$$

をとれる。 W_1, W_2, W_2' は, η_0, x_0 を含まない式で定義されていることに注意しよう。 $t \in \mathbb{C}$ に対して

$$\Omega'_t = \Omega'(0, y_1, \dots, y_n, t, \xi_1, \dots, \xi_n) \text{ とおけば}$$

$$\eta_j = \partial \Omega'_t / \partial y_j, \quad x_j = \partial \Omega'_t / \partial \xi_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

は, t を解析的助変数とする正準変換 $\Phi_t^{-1} : (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ を定め, それは

$$\begin{cases} V_1 = \{ \xi_1 = 0 \} \\ V_{2,t} = \{ \xi_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + \hat{h}(x_1, x_2, \xi_2, \xi_n) \mid t = 0 \} \end{cases}$$

とおいたとき, $\Phi_t(V_1) = V_1$, $\Phi_t(V_{2,t}) = V_{2,0}$, $\Phi_0(\hat{p}') = \hat{p}'$ を満たす。(但し, $\hat{p}' = (0; 0, \dots, 0, 1)$). 以下の証明は, p13 以下と全く同じでよい。