

Schrödinger 方程式の解の最大関数についての Besov ノルムによる L_p 評価

福岡誠士 (筑波大学博士課程) (Seiji Fukuma)

村松壽延 (中央大学理工学部) (Hisanobu Muramatsu)

1 序と主要な結果

非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題：

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + F(u, \bar{u}, \nabla_x u, \nabla_x \bar{u}), & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(ただし, $F(u, \bar{u}, \nabla_x u, \nabla_x \bar{u})$ は定数項と 1 次の項を含まない多項式) についてはかなり多くの研究が行われている.

この形の方程式の解の存在を示す一つの方法は, 線型 Schrödinger 方程式の解の最大関数の評価と smoothing effect を基礎とする方法であるが, Besov 空間を使うと, この二つの評価において, 殆ど限界に近くまでの精密な結果が得られる. それにより, 非線型方程式についてもよい結果を得ることができることを報告する.

我々の結果は

定理 $0 < T < \infty$, とし, $I = (0, T)$ とおく. このとき, 正数 $\delta = \delta(T)$ を十分小にとると, 任意の

$$(1.2) \quad u_0 \in B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R}) \cap B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R}), \quad \text{かつ} \quad \max\{\|u_0\|_{B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R})}, \|u_0\|_{B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})}\} \leq \delta,$$

に対して, 積分方程式

$$(1.3) \quad u = e^{it\partial_x^2} u_0(x) + \int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2} F(u(x, s), \partial_x u(x, s), \bar{u}(x, s), \partial_x \bar{u}(x, s)) ds,$$

の解 $u(x, t)$ で, 条件：

$$(1.4) \quad u \in B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I)) \cap B_{1,1}^1(\mathbb{R}; L_\infty(I)) \cap B_{2,1}^{3/2}(\mathbb{R}; L_\infty(I))$$

がただひとつ存在する. ただし, $B_{p,q}^s$ は Besov 空間, $\partial_x = \partial/\partial x$ である.

さらに, u が (1.3) と (1.4) を満たすならば,

$$(1.5) \quad u \in C([0, T]; B_{2,1}^2(\mathbb{R})) \cap C^1((0, T); B_{2,1}^0(\mathbb{R})),$$

$$(1.6) \quad \frac{du}{dt} = i\partial_x^2 u(x, t) + F(u, \partial_x u, \bar{u}, \partial_x \bar{u}),$$

が成立する. ただし, $i\partial_x^2$ は $B_{2,1}^0(\mathbb{R})$ における Schrödinger 群 $\{\exp(it\partial_x^2)\}$ の生成作用素である. この結果と従来の結果を比較して見よう.

Hayashi-Ozawa[7] の結果.

$$(1.7) \quad u_0 \in H^3(\mathbb{R}), \sqrt{1+x^2}u_0 \in H^2(\mathbb{R})$$

ならば, 初期値が u_0 となる (1.6) の解 $u(\cdot)$ で $(0, T)$ で定義され, 条件:

$$(1.8) \quad u \in C_w(0, T; H^3(\mathbb{R})), \text{ and } \sqrt{1+x^2}u \in C([0, T]; H^2(\mathbb{R}))$$

を満たすものがただ一つ存在する. ここで,

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in L_2; (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L_2\} \quad (\text{Sobolev 空間})$$

である. Hayashi-Ozawa は 初期値が小であることを仮定しないで結果を得ている.

Kenig-Ponce-Vega[11] の結果:

$$(1.9) \quad u_0 \in H^{11/2}(\mathbb{R}), \sqrt{1+x^2}u_0 \in H^3(\mathbb{R})$$

でそのノルムが十分小ならば, 初期値が u_0 となる (1.6) の解 $u(\cdot)$ で区間 $(0, T)$ で定義されていて, 条件

$$(1.10) \quad \begin{cases} u \in C([0, T]; H^{11/2}(\mathbb{R})), \\ \sqrt{1+x^2}u \in C([0, T]; H^3(\mathbb{R})), \\ u \in W_\infty^6(\mathbb{R}; L_2([0, T])) \end{cases}$$

を満たすものがただ一つ存在する.

任意の正数 ε について,

$$H^{s+\varepsilon} \subset B_{2,1}^s \subset H^s, \quad \{f; \sqrt{1+x^2}f \in H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R})\} \subset B_{1,1}^s$$

であるから, 我々は初期値の正則性 (微分可能性) の条件をかなり改良している. 「初期値が小」と条件をとるのが今後の課題である.

2 Besov 空間における積

念のため, Besov 空間の定義を述べる:

$$(2.1) \quad \varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp} \varphi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| < 1\},$$

$$(2.2) \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{4} < |\xi| < 1\},$$

$$(2.3) \quad C_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi) \leq C_2, \quad \varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi) (j \geq 1)$$

ただし, C_1 と C_2 は正定数である, にとり, $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n; X)$ を

$$(2.4) \quad \begin{cases} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; X), \\ u * \check{\varphi}_j \in L_p(\mathbb{R}^n; X), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \{2^{js} \|u * \check{\varphi}_j\|_{L_p}\}_{j \geq 0} \in \ell_q \end{cases}$$

と定義する. ただし,

$$(2.5) \quad \check{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1} \varphi(x) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} \varphi(\xi) d\xi,$$

$u * v(x) := \int u(x-y)v(y)dy$ である. ノルムを

$$(2.6) \quad \|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n; X)} := \|\{2^{js} \|u * \check{\varphi}_j\|_{L_p}\}_{j \geq 0}\|_{\ell_q}$$

で定義する. Besov 空間は Sobolev 空間の実補間空間として定義することもできる. また, 差分によって, 定義することもできる.

Besov 空間において, 積の評価について, 次の結果を用いる:

定理 2.1. $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, \theta > 0$ とし, X, X_1 と X_2 を Banach 空間であって, 積: $X_1 \times X_2 \mapsto X; (u, v) \mapsto u \cdot v$ で条件:

$$(2.7) \quad \|u \cdot v\|_X \leq c \|u\|_{X_1} \cdot \|v\|_{X_2}$$

を満たすものが定義されていると仮定する. さらに,

$$(2.8) \quad p \leq p_1, p_2, r_1, r_2 \leq \infty, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

を仮定する. このとき,

$$(2.9) \quad \|fg\|_{B_{p,q}^\theta(\mathbb{R}^n; X)} \leq C \{ \|f\|_{B_{p_1,q}^\theta(\mathbb{R}^n; X_1)} \cdot \|g\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n; X_2)} + \|f\|_{L_{r_1}(\mathbb{R}^n; X_1)} \cdot \|g\|_{B_{r_2,q}^\theta(\mathbb{R}^n; X_2)} \},$$

が成立する.

これを示すのには, 差分 Δ_y に関する等式:

$$\begin{aligned}\Delta_y\{f(x)g(x)\} &= f(x+y)\Delta_y g(x) + \Delta_y f(x)g(x), \\ \Delta_y^3\{f(x)g(x)\} &= \{\Delta_y^2 f(x+y) + 2\Delta_y^2 f(x)\}g(x+3y) \\ &\quad - 3\Delta_y^2 f(x)g(x+2y) + f(x)\{\Delta_y^2 g(x) \\ &\quad + 2\Delta_y^2 g(x+y)\} - 3f(x+2y)\Delta_y^2 g(x+y), \\ \Delta_y^5\{f(x)g(x)\} &= \{\Delta_y^3 f(x+2y) + 3\Delta_y^3 f(x+y) + 6\Delta_y^3 f(x)\}g(x+5y) \\ &\quad - 5\{\Delta_y^3 f(x+y) + 3\Delta_y^3 f(x)\}g(x+4y) \\ &\quad + 10\Delta_y^3 f(x)g(x+3y) + f(x)\{\Delta_y^3 g(x) + 3\Delta_y^3 g(x+y) \\ &\quad + 6\Delta_y^3 g(x+2y)\} - 5f(x+y)\{\Delta_y^3 g(x) \\ &\quad + 3\Delta_y^3 g(x+2y)\} + 10f(x+2y)\Delta_y^3 g(x+2y)\end{aligned}$$

などおよび Hölder の不等式, それに Besov 空間の特徴付けの定理

定理 2.2. s を正数, $k > s$ を正整数, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ とする. このとき, $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n; X)$ となるための必要十分条件は

$$(2.10) \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n; X), \quad \| |y|^{-s} \Delta_y^k f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n; X)} \in L_q(\mathbb{R}_y^n, |y|^{-n} dy)$$

である.

を用いる.

3 Schrödinger 方程式の最大関数

$$(3.1) \quad S: f \rightarrow u(t, x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\xi + ih(t,\xi)} f(y) dy d\xi$$

と定義する. 特に, $h(t, \xi) = t|\xi|^2$ のとき, (3.1) の u は Schrödinger 方程式

$$(3.2) \quad \frac{du}{dt} = -i\Delta u, \quad u(0, x) = f(x)$$

の解である.

定理 3.1. σ を正数, $1 \leq q \leq \infty$, $I = (0, 1)$ とする. $h(t, \xi)$ が無限回微分可能で, 条件

$$(3.3) \quad \left| \frac{\partial^k h(t, \xi)}{\partial t^k} \right| \leq c_k (1 + |\xi|^{k\gamma}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

ただし, c_k は t と ξ に依存しない定数, を満たすとき, (3.1) で定義した作用素 S は関数空間 $B_{2,q}^{\gamma\sigma}(\mathbb{R}^n)$ から関数空間 $B_{2,q}^{\sigma}(I; L_2(\mathbb{R}^n))$ への線型有界作用素である.

この定理は, σ が正整数で $q = 2$ の場合を Parseval の等式と,

$$B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'; \hat{f}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

により示し, 一般の場合を線型作用素の補間定理を使って証明する.

Besov 空間の定義と Minkowski の不等式より分かる包含関係:

補題 3.1. $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{R}$ について,

$$(3.4) \quad B_{p,1}^{\sigma}(I; L_p(\mathbb{R}^n)) \subset L_p(\mathbb{R}^n; B_{p,1}^{\sigma}(I))$$

と埋蔵定理 $B_{2,1}^{1/2}(I) \subset L_{\infty}(I)$ により,

$$(3.5) \quad B_{2,1}^{1/2}(I; L_2(\mathbb{R}^n)) \subset L_2(\mathbb{R}^n; B_{2,1}^{1/2}(I)) \subset L_2(\mathbb{R}^n; L_{\infty}(I))$$

を得るから, 定理 3.1 より,

定理 3.2. 定理 3.1 の条件の下で, S は $B_{2,1}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ から $L_2(\mathbb{R}^n; L_{\infty}(I))$ への線型有界作用素である. すなわち,

$$(3.6) \quad \left\| \left\{ \sup_{t \in I} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\xi + ih(t,\xi)} f(y) dy d\xi \right| \right\} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_{2,1}^{1/2}(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する.

これは Carbery[3] と Cowling[5] にある結果の若干の一般化である.

1次元で $h(t, \xi) = |\xi|^a$ の場合についてはさらに詳しい結果が得られる:

定理 3.3. $a > 1$ のとき

$$(3.7) \quad \left\| \left\{ \sup_{t \in I} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\xi + i|\xi|^a} f(y) dy d\xi \right| \right\} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_{2,1}^{an/4}(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する.

この定理は Sjölin[19] の結果の Besov 空間による精密化である. すなわち, Sjölin[19] によると, $a > 1$, $s > an/4$ のとき,

$$(3.8) \quad \left\| \left\{ \sup_{t \in I} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\xi + i|\xi|^a} f(y) dy d\xi \right| \right\} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する.

$s > an/4$ のとき, $H^s \subset B_{2,1}^{an/4}$ であるから, (3.7) より (3.8) が直接示せる.

なお, Sjölin[19] は $n = 1$ のとき, $s < 1/4$ については (3.8) は成立しないことを示している. $s = 1/4$ については (3.8) は成立しないと思われる (まだ証明できていないが). $n = 2$ については, $h(t, \xi) = |\xi|^2$ の場合に (3.6) よりよい結果が Moyua-Varga-Vega[13] により報告されている.

L_p 評価については

定理 3.4. $a > 1$, $I = (0, 1)$, $0 \leq p \leq \infty$ のとき,

$$(3.9) \quad \sigma := \min \left\{ \frac{1}{2} + (n-1) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right|, \frac{n}{4} + \frac{n}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| \right\},$$

とおくと,

$$(3.10) \quad \left\| \left\{ \sup_{t \in I} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\xi + i|\xi|^a} f(y) dy d\xi \right| \right\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_{p,1}^{a\sigma}(\mathbb{R}^n)},$$

が成立する.

これを証明するには, $p = 1$ の場合と $p = \infty$ の場合を示し, $p = 2$ の場合の結果 (定理 3.3) と合わせ線型作用素の補間定理を使えばよい. 最大関数は線型作用素ではないが, (3.9) を最大関数の L_p 評価とは考えないで, 線型作用素

$$(3.11) \quad f \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\xi + i|\xi|^a} f(y) dy d\xi$$

が $B_{p,1}^{a\sigma}(\mathbb{R}^n)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$ への作用素としての有界性を示す不等式と見ることにより線型作用素の補間定理が使えるのである. Littlewood-Paley 理論を, 最大関数と見ないで, L_2 値の L_p 関数と見ると, 線型作用素の補間定理を使って, 見通しよく証明できるのと同様である. 定理 3.5 と Besov 空間の定義を使い次の定理が分かる:

定理 3.5. $a > 1$, $0 < T < \infty$, $I = (0, T)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, そして θ を実数とすると,

$$(3.12) \quad \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\xi + it|\xi|^a} f(y) d\xi dy \right\|_{B_{p,q}^\theta(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^{\theta+a\sigma}(\mathbb{R}^n)}.$$

ただし, σ は (3.9) で定義した正数である.

また, 容易に, 定理 3.6. a, I, p, q, σ を定理 3.5 と同じとし, θ を実数とする. このとき,

$$(3.13) \quad \left\| \int_0^t ds \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\xi + i(t-s)|\xi|^a} f(y, s) d\xi dy \right\|_{B_{p,q}^\theta(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))} \\ \leq C \|f(x, s)\|_{B_{p,q}^{\theta+a\sigma}(\mathbb{R}^n; L_p(I))}.$$

4 smoothing effect

加藤敏夫先生 [8] による KdV 方程式の smoothing effect についての結果以来, かなり多くの研究があるが, ここでは以下の我々の結果に関係する不等式を示す. Kenig-Ponce-Vega[9] は,

$$(4.1) \quad \sup_x \|\partial_x^{1/2} e^{it\partial_x^2} f\|_{L_2(R_t)} \leq C \|f\|_{L_2(R)},$$

を示している. Kenig-Ponce-Vega はさらに, [11] において,

$$(4.2) \quad \sup_x \left\| \int_0^s \partial_x e^{i(t-s)\partial_x^2} F(\cdot, s) ds \right\|_{L_2(R_t)} \leq C \|F\|_{L_1(R_x; L_2(R_t))},$$

を示して, 1 次元の非線型 Schrödinger 方程式の small data に対する初期値問題の時間的局所解の存在に応用した. これらの結果を Besov 版をつくと,

定理 4.1. σ を実数, $0 < T < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, とすると,

$$(4.3) \quad \|e^{it\partial_x^2} f\|_{B_{\infty,q}^{\sigma+1/2}(R_x; L_2([0,T]))} \leq C \|f\|_{B_{2,q}^{\sigma}(R)}.$$

定理 4.2. σ を実数, $0 < T < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, とすると,

$$(4.4) \quad \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2} F(\cdot, s) ds \right\|_{B_{\infty,q}^{\sigma+1}(R_x; L_2([0,T]))} \leq C \|F\|_{B_{1,q}^{\sigma}(R_x; L_2([0,T]))}.$$

になる. Besov 空間は Sobolev 空間の実補間空間であるから, これらの結果は, と Kenig-Ponce-Vega の結果より, 補間により得られる. しかし, Kenig-Ponce-Vega による不等式 (4.2) の証明は偏微分方程式

$$(4.5) \quad \partial_t u = i\partial_x^2 u(x,t) + \varepsilon u + F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

の初期条件: $u(x,0) = 0$ の下での解の ε に関して一様な評価を使い, どうもわかりにくいので, 我々は直接の証明を与えた.

なお, homogeneous Besov 空間 $B_{\infty,q}^{\sigma}$ を使えば $T = \infty$ についても定理と同じ形の不等式が得られる.

5 局所解の存在

局所解の存在の証明の要点を述べよう. 簡単のため, 方程式は

$$(5.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = i\partial_x u + (\partial_x u)^2, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

とする. これを積分方程式

$$(5.2) \quad u = e^{it\partial_x^2} u_0(x) + Q(u, u)(x, t)$$

に変換する. ただし, $Q(f, g)$ は

$$(5.3) \quad Q(f, g)(x, t) := \int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2} \{ \partial_x f(x, s) \cdot \partial_x g(x, s) \} ds.$$

と定義する. これを空間

$$(5.4) \quad Z := B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I)) \cap B_{1,1}^1(\mathbb{R}; L_\infty(I)) \cap B_{2,1}^{3/2}(\mathbb{R}; L_\infty(I))$$

で解こう. この空間のノルムを

$$(5.5) \quad \|u\|_Z := \max\{ \|u\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))}, \|u\|_{B_{1,1}^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))}, \|u\|_{B_{2,1}^{3/2}(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \}.$$

で定義する. また, 初期値の空間のノルムを

$$(5.6) \quad \|u_0(x)\|_{B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R}) \cap B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})} := \max\{ \|u_0(x)\|_{B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R})}, \|u_0(x)\|_{B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})} \}.$$

と定める. $u_0 \in B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R}) \cap B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})$ にとると, 定理 3.5 と定理 4.1 により,

$$(5.7) \quad \|e^{it\partial_x^2} u_0\|_Z \leq C_0 \|u_0\|_{B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R}) \cap B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})}.$$

をうる. 写像 $\Phi(u)$ を

$$(5.8) \quad u = e^{it\partial_x^2} u_0(x) + Q(u, u)(x, t)$$

と定義し, この写像が不動点をもつことをしめせば (5.2) の解の存在が分かる. 定理 2.1 と定理 3.6 と定理 4.2 を組み合わせると,

定理 5.1. $0 < T < \infty$, $I = (0, T)$ とし, Q を (5.3) で定義するとき,

$$(5.9) \quad \|Q(f, g)\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \leq C \{ \|f\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \cdot \|g\|_{W_1^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \\ + \|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \cdot \|g\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \},$$

$$(5.10) \quad \|Q(f, g)\|_{B_{1,1}^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \leq C \{ \|f\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \cdot \|g\|_{W_1^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \\ + \|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \cdot \|g\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \},$$

$$(5.11) \quad \|Q(f, g)\|_{B_{2,1}^{3/2}(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \leq C \{ \|f\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \cdot \|g\|_{W_2^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \\ + \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \cdot \|g\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))} \}.$$

$$+ \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}; L_\infty(I))} \cdot \|g\|_{B_{\infty,1}^3(\mathbb{R}; L_2(I))},$$

が成立する.

を証明できる. この定理と (5.7) により,

$$\|\Phi(u)\|_Z \leq C_0 \|u_0\|_{B_{2,1}^{5/2}(\mathbb{R}) \cap B_{1,1}^{3/2}(\mathbb{R})} + C_1 \|u\|_Z^2,$$

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_Z &\leq \|Q(u, u-v)\|_Z + \|Q(u-v, v)\|_Z \\ &\leq C_1 \{\|u\|_Z + \|v\|_Z\} \|u-v\|_Z, \end{aligned}$$

が分かる. よって, 初期値が十分小ならば Φ が縮小写像であることがわかり, したがって, 不動点が存在する.

積分方程式 (5.1) の解の微分可能性を示すには,

補題 5. 1. (Pazy[15] p.107 Theorem 2.4.) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を Banach 空間 X における線型作用素の C_0 -半群とし, A をその生成作用素とする. $0 < T < \infty$ とし, $f(t) \in C((0, T); \mathcal{D}(A)) \cap L_1([0, T]; X)$ と仮定する. このとき,

$$(5.12) \quad g(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds \in C^1((0, T); X) \cap C((0, T); \mathcal{D}(A)),$$

$$(5.13) \quad \frac{dg}{dt} = f(t) + Ag(t) \quad \text{for } t \in (0, T),$$

である.

を使えばよい.

参考文献

- [1] J. Berge and J. Löfström, Interpolation Spaces, an introduction, Springer, 1976.
- [2] J. Bourgain, A remark on Schrödinger operators, Israel J. Math., 77(1992), 1-16.
- [3] A. Carbery, Radial Fourier multipliers and associated maximal functions, in: Recent Progress in Fourier Analysis, Proc. Seminar on Fourier Analysis held at El Escorial, Spain, 1983, North-Holland Math. Stud. 111. North-Holland, 1985, 49-56.

- [4] L. Carleson, Some analytic problems related to stational mechanics, in Euclidean Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math. 779(1979), Springer, 55-45.
- [5] M. Cowling, Pointwise behaviour of solutions to Schrödinger equations, in Harmonic Analysis, Proc. Conf. Cortona, Italy, 1982, Lecture Notes in Math. 992(1983), Springer, 83-90.
- [6] B. E. J. Dahlberg and C. E. Kenig, A note on the almost everywhere behaviour of solutions to the Schrödinger equation, in Harmonic Analysis, Proc. Conf. Univ. of Minnesota, Minneapolis, Lecture Notes in Math. 908(1982), Springer, 205-209.
- [7] N. Hayashi and T. Ozawa, Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, Diff. Int. Eq., Vol. 7, 1994, pp. 453-461.
- [8] T. Kato, On the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Applied Math. 8(1983), 93-128.
- [9] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, Indiana Univ. Math. J., 40(1991), 33-69.
- [10] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, J. Amer. Math. Soc. 4(1994), 323-347.
- [11] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 10, 1993, pp. 255-288.
- [12] C. E. Kenig and Ruiz, A strong type $(2,2)$ estimates for the maximal operator associated to the Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc. 280(1983), 239-245.
- [13] A. Moyua, A. Vargas and L. Vega, Schrödinger maximal function and restriction properties of the Fourier transform, preprint.
- [14] 村松壽延, 補間空間論と線型作用素, 紀伊国屋書店 (1985).

- [15] A. Pazy, Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.
- [16] E. Prestini, Radial functions and regularity of solutions to the Schrödinger equation, Monatsh. Math. 109(1990), 135-143.
- [17] P. Sjölin, Convolution with oscillating kernel, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 45-55.
- [18] P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equation, Duke Math. J. 55(1987), 699-715.
- [Sjö3] P. Sjölin, Radial function and maximal estimates for solutions to the Schrödinger equation, J. Austral Math. Soc., 59(1995), 134-142.
- [19] P. Sjölin, Global maximal estimates for solutions to the Schrödinger equation, Studia Math. 110(2)(1994), 105-114.
- [20] H. Triebel, Complex interpolation and Fourier multipliers for the space $B_{p,q}^s$ and $F_{p,q}^s$ of Besov-Hardy-Sobolev type: The case $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, Math. Z., 176(1981), 495-510.
- [21] L. Vega, Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data, Proc. Amer. Math. Soc., 103(1988), 874-878.