

超幾何微分方程式の群について

大々保謙 = 郎

§ 1 記号と仮定

n 連立線型一階常微分方程式系

$$(t-B) \frac{dX}{dt} = AX$$

を考へる。 A, B は共に $n \times n$ 定数行列, X は n ベクトル。 B は (n, n) 要素以外は全部零, (n, n) 要素は 1。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1}, a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} a_{j,n} = 1, \quad a_{kk} = a_k \\ \text{と 因 合 する。} \end{array} \right)$$

仮定 $1^\circ \quad a_j \not\equiv 0 \pmod{1}$

$2^\circ \quad a_j - a_k \not\equiv 0 \pmod{1} \quad j \neq k$

$3^\circ \quad a_j: \text{real},$

$4^\circ \quad \det(\rho_j - A) = 0 \quad \rho_1, \dots, \rho_n: \text{real}$

$$\rho_j - \rho_k \not\equiv 0$$

$5^\circ \quad \rho_j - a_k \not\equiv 0$

§2. 主要定理

定理1. $\sum p_j = \sum \alpha_k$ (Fuchs の関係式)

定理2.

$$x_k(t) = t^{\alpha_k} \sum_{m=0}^{\infty} g_k(m) t^m, \quad g_k(0) = \overbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^k$$

($k=1, 2, \dots, n-1$)

$$x_n(t) = (t-1)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) (t-1)^m, \quad g_n(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

は一次独立な解で, $D = \{ |t| < 1 \} \cap \{ |t-1| < 1 \}$ のコンパクトな連結部分集合とすると

$$\det(x^1, \dots, x^n)(t) = \frac{\prod_k P(\alpha_k + 1)}{\prod_j P(\rho_j + 1)} t^{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j} (t-1)^{\alpha_n} \quad (t \in D)$$

定理3. $X(t) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ を基本解とすると, X に属する

$t=0$ における circuit matrix M_0 , $t=1$ におけるそれと M_1 とする

と, $c_1', c_1'', \dots, c_{n-1}', c_1'', \dots, c_{n-1}'' \in \mathbb{C}$ 適当な定数として

$$M_0 = \begin{pmatrix} e_1, 0, \dots, 0 & c_1'(e_1-1) \\ 0 & e_2, \dots, 0 & c_2'(e_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{n-1} & c_{n-1}'(e_{n-1}-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1''(e_{n-1}) & c_2''(e_{n-1}) & \dots & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

と表す。

定理 4. $X(k)$ に適当な対角形定数行列をかけた基本解とすると

$$c_j' = 1$$

$$c_j'' = \gamma_j = - \frac{\prod_k \sin \pi (p_k - p_j)}{\sin \pi a_n \cdot \sin \pi a_j \cdot \prod_{k \neq j, n} \sin \pi (a_k - a_j)}$$

とすれば M_0, M_1 は MONODROMY 群の生成元である。

系. $\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j = 1 - \prod_k \left(\frac{\sin \pi p_k}{\sin \pi a_k} \right)$

注意, a_k, p_j が real とすれば $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ も real である。

定理 5. エルミート行列 T と

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & & & -1 \\ -1 & \alpha_2 & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\alpha_k = \frac{1 + \sum \gamma_j}{r_k} - 1 \right)$$

とすると $T = M_j T M_j^*$ ($j=0,1$)。かつ T は定数倍を除いて一意に定まる。

定理 6. MONODROMY 群が有限である条件

$$(1) \quad n \leq 2, \quad (2) \quad \alpha_k + 1 - n \geq 0$$

§3. 定理2の証明.

新しいパラメータ μ を導入 (1) のかわりに

$$(2) \quad (t-B) \frac{dx}{dt} = (A+\mu)x$$

特異性 $t^{a_{kk}+\mu}$ を持つ解 $x_k(t, \mu)$ を

$$x_k(t, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} g_k(m, \mu) t^{a_{kk}+\mu+m}$$

によって定義する。但し, $g_k(0, \mu) = g_k(0)$ とおく。(2) の解で
指数 $a_{kk}+\mu$ に対応する解は只一つしかない。

$$(t-B) \frac{dx_k(t, \mu)}{dt} = (A+\mu)x_k(t, \mu)$$

を微分して

$$(3) \quad (t-B) \frac{d}{dt} [x'_k(t, \mu)] = (A+\mu-1) [x'_k(t, \mu)]$$

を得るから $x'_k(t, \mu) = (a_{kk}+\mu)x_k(t, \mu-1)$ である。また、基本
解系 $X(t, \mu)$ に応用すると

$$\begin{aligned} (t-B) X'(t, \mu) &= (t-B) X(t, \mu-1) \begin{pmatrix} a_{11}+\mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}+\mu \end{pmatrix} \\ &= (A+\mu) X(t, \mu) \end{aligned}$$

$w(t, \mu)$ を

$$w(t, \mu) = \det X(t, \mu) \quad \text{とすれば}$$

$$w(t, \mu-1) t^{n-1} (t-1) \prod_k (a_k + \mu) = \prod_j (p_j + \mu) \cdot w(t, \mu)$$

$$\begin{aligned} (4) \quad w(t, \mu) &= t^{n-1} (t-1) \cdot \prod_j \frac{\Gamma(p_j + \mu)}{\Gamma(p_j + \mu + 1)} \prod_k \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu)} w(t, \mu-1) \\ &= t^{\mu(n-1)} (t-1)^\mu \cdot \prod_j \frac{\Gamma(p_j + 1)}{\Gamma(p_j + \mu + 1)} \cdot \prod_k \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + 1)} w(t, 0) \end{aligned}$$

一方 $x^k(t, \mu)$ の係数 $g^k(m, \mu)$ について調べると

$$(a_k + \mu + m) g^k(m, \mu) - B(a_k + \mu + m + 1) g^k(m+1, \mu) = (A + \mu) g^k(m, \mu)$$

より差分方程式の初期条件

$$g_k(0, \mu) = g_k(0)$$

を満足する解であるから

$$g^k(m, \mu) = \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + m + 1)} h^k(m, \mu)$$

と表わす

$$\begin{cases} (a_k + m - A) h_k(m) = B h_k(m+1) \\ h_k(0) = g_k(0) \end{cases}$$

よって $h_k(m)$ は μ に関する関数と表わす。

$$x^k(t, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + m + 1)} h^k(m) t^{a_k + \mu}$$

右辺は μ に関する階乗級数で μ が実軸に沿って $\mu \rightarrow \infty$ のとき

t なる compact set Ω 内であれば

$$x^*(t, \mu) = \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + \frac{1}{2})} h^*(0) t^{a_k + \mu} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

$x_n(t, \mu)$ により $t \rightarrow 0$ 近づく。 (16) 式

$$\begin{aligned} w(t, \mu) &= \det X(t, \mu) = t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)\mu} (t-1)^{a_n + \mu} \det \{h^*(0), \dots, h_n(0)\} \\ &\quad \times \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \\ &= t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} t^{(n-1)\mu} (t-1)^{\mu} \times \left[1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] \end{aligned}$$

(4) とあわせて

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} \left(\prod_k \Gamma(a_k + 1) \right) / \left(\prod_j \Gamma(a_j + 1) \right) \\ &\quad \times \prod_k \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + \frac{1}{2})} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \\ &= t^{\sum a_k} (t-1)^{a_n} \frac{\prod_k \Gamma(a_k + 1)}{\prod_j \Gamma(a_j + 1)} \frac{1}{\mu^{\sum p_k - \sum q_j}} \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \end{aligned}$$

$\mu \rightarrow \infty$ とすれば定理は証明される。

§4 定理 3, 4, 5 の証明

今 $x^*(t)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) が $t=1$ に近づくとき

$$x_k^*(t) = c_k' x_n(t)$$

が一様であるように c_k' を定めることが可能である。このとき

$$\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - c_k'' x_n(t)$$

とあいこでやると $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ は独立な基本解系 $\tilde{x}(t)$ となる

る。同様に ~~解~~ ~~が~~ $t=0$ の近くで一面になる n 個の変数

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} c'_j x_j(t)$$

$c'_1, \dots, c'_{n-1}$ が $\frac{1}{c_n}$ に近くなる。 $\tilde{x}_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} c'_j x_j$ とおけば

$$\tilde{X}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n)$$

は基解である。各々変換式

$$\tilde{X} = X \begin{pmatrix} 1 & & 0 & c'_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c'_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = X C_0$$

$$\tilde{\tilde{X}} = X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ c''_1 & \dots & c''_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = X C_1$$

を満足し, $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}$ についての各 $0, 1$ における circuit matrix

は

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & e_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & e_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{M}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & & e_n \end{pmatrix}$$

である。これを併用すれば

$$M_0 = C_0 \tilde{M}_0 C_0^{-1}, \quad M_1 = C_1 \tilde{\tilde{M}}_1 C_1^{-1}$$

により, X に関する circuit matrix は C_k のみである。実際 $C_k = I + \Sigma_k$

とおけば $\Sigma_k (k=0,1)$ は中零であるから

$$M_0 = (I + \Sigma_0) \tilde{M}_0 (I - \Sigma_0) = \tilde{M}_0 + \Sigma_0 \tilde{M}_0 - \tilde{M}_0 \Sigma_0 - \Sigma_0 \tilde{M}_0 \Sigma_0$$

$$M_1 = (I + \Sigma_1) \tilde{M}_1 (I - \Sigma_1) = \tilde{M}_1 + \Sigma_1 \tilde{M}_1 - \tilde{M}_1 \Sigma_1 - \Sigma_1 \tilde{M}_1 \Sigma_1$$

より簡単に計算される。これは定理3を示すため。

新しい基本解系 $X'(t) = X(t)T$ と対角行列

$$T = \text{diag}(c_1', c_2', \dots, c_{n-1}', 1)$$

によって変換する。

$$M_0 \rightarrow T^{-1} M_0 T$$

$$M_1 \rightarrow T^{-1} M_1 T$$

となる。今 $c_j' \cdot c_j'' = \gamma_j$ と置けば定理4にいう形になる。

γ_j を計算するには

$$\det(M_0 M_1 - \lambda I) = 0$$

の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 及び $t = \infty$ に近づく指数 $f_k = \exp(-2\pi i p_k)$ の逆を用いる。

$$M_0 M_1 = \begin{pmatrix} e_1 + \gamma_1(e_{n-1})(e_1-1) & \gamma_2(e_{n-1})(e_2-1) & \dots & e_n(e_{n-1}-1) \\ (e_2-1)\gamma_1(e_{n-1}) & e_2 + \gamma_2(e_{n-1})(e_2-1) & \dots & e_n(e_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{n-1})\gamma_1(e_{n-1}-1) & \dots & e_{n-1} + \gamma_{n-1}(e_{n-1})(e_{n-1}-1) & e_n(e_{n-1}-1) \\ \gamma_1(e_{n-1}) & \gamma_2(e_{n-1}) & \dots & \gamma_{n-1}(e_{n-1}) & e_n \end{pmatrix}$$

$\det(M_0 M_1 - \lambda I)$ を計算するには n 列の (e_j-1) を j 列より

3) " 2 残り $\frac{p}{2} < t$

$$\begin{vmatrix} q-\lambda & 0 & 0 & +\lambda(e_1-1) \\ 0 & e_2-\lambda & 0 & \lambda(e_2-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1(e_n-1) & r_2(e_n-1) & & e_n-\lambda \end{vmatrix}$$

今 n は p の素数に p は 2 の冪乗である。

$$\begin{aligned} \det(M_0 M_1 - \lambda I) &= (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (j-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j-1, n \\ 1, 2, \dots, n-j \end{pmatrix} \lambda(e_j-1) \cdot r_j(e_n-1) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (e_k-\lambda)}{e_j-\lambda} + \prod_{k=1}^{n-1} (e_k-\lambda) \\ &= \prod_k (f_k - \lambda) \end{aligned}$$

この式から λ は f_k の n 個の identity root である。ここで $\lambda = e_j$ について

3 residue を計算する。

$$\varphi(\lambda) = \prod_k (e_k - \lambda) \quad \psi(\lambda) = \prod_j (f_j - \lambda)$$

と表す。

$$-r_j \cdot e_j (e_j-1)(e_n-1) \varphi'(e_j) = \psi(e_j)(e_n-e_j)$$

又 $\lambda = 1$ とおけば

$$1 - \sum r_j = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}$$

より r_j の式が直接与えられる。定理 5, 6 の形に与えることは

示すには $\exp(\pi i a_k) = e_k'$, $\exp(\pi i b_j) = f_k'$ と用いて書くのが便利

利である。

$$\begin{aligned}
 \psi(1)/\varphi(1) &= \prod_{k=1}^n (f_k^{1/2} - 1) / \prod (e_k^{1/2} - 1) \\
 &= \frac{(f_1 \cdots f_n) \cdot \prod (f_k - f_k^{-1})}{(e_1 \cdots e_n) \prod (e_k - e_k^{-1})} \\
 &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{\sin \pi p_k}{\sin \pi a_k} \right) \quad \begin{aligned} (f_1 \cdots f_n) &= \exp(\pi i \sum \rho_j) \\ (e_1 \cdots e_n) &= \exp(\pi i \sum a_k) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 r_j &= - \frac{(f_1^2 - e_j^2)(f_2^2 - e_j^2) \cdots (f_n^2 - e_j^2)}{e_j^2 \cdot (e_j^2 - 1) \underbrace{(e_1^2 - e_j^2)(e_2^2 - e_j^2) \cdots (e_{n-1}^2 - e_j^2)}_{n-2} (e_n^2 - 1)} \\
 &= - \frac{(f_1 e_j^{-1} - \frac{1}{f_1 e_j^{-1}}) \cdots (f_n e_j^{-1} - \frac{1}{f_n e_j^{-1}}) \cdot f_1 \cdots f_n \cdot e_j^n}{e_j^3 (e_j - \frac{1}{e_j}) \cdot \underbrace{e_1 \cdots e_{n-1}}_1 \cdot e_j^{n-2} (e_1 e_j^{-1} - \frac{1}{e_1 e_j^{-1}}) \cdots (e_{n-1} e_1^{-1} - \frac{1}{e_{n-1} e_1^{-1}}) e_n (e_n - \frac{1}{e_n})} \\
 &= - \frac{\sin \pi(p_1 - a_j) \sin \pi(p_2 - a_j) \cdots \sin \pi(p_n - a_j)}{\sin \pi a_j \sin \pi a_n \sin \pi(a_1 - a_j) \cdots \sin \pi(a_{n-1} - a_j)}
 \end{aligned}$$

これにより $r_j, 1 - \sum r_j$ は全部実数であることが証明された。

§5 定理5.6 の証明.

まず, $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群 $G = \{g\}$ は有限群であるとするとき

$$\sum_{g \in G} \langle ug, ug \rangle = [u, u] = u^T u^*$$

は正定値 $n \times n$ 行列となり $n - \dim$ なる変換に対して

$$u^T u^* \rightarrow u^T g^* u^* = u^T u^*$$

2° あるから T は $g^T g^* = T$ とある正定値対称行列である。

ゆえに T の固有値は正であるから T の逆行列 M_0, M_1 は δ の正定値である。

$$* \text{ として } M_0 T M_0^* = T \text{ とある条件を考慮すれば } T = (r_{jk}) \text{ (} \bar{r}_{jk} = r_{kj} \text{)}$$

とすると

$$T M_0^* = \begin{pmatrix} r_{11} & & & r_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ r_{n1} & & & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* & 0 & & 0 \\ 0 & e_2^* & & 0 \\ & & & \\ e_1^{*-1} & e_2^{*-1} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} e_1^* + r_{1n} (e_1^{*-1}) & & & r_{1n} \\ \vdots & & & \\ & & r_{jk} e_k^* + r_{jn} (e_k^{*-1}) & \dots & r_{jn} \\ r_{n1} e_1^* + r_{nn} (e_1^{*-1}) & & r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^{*-1}) & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$M_0 T M_0^*$ の対角成分を計算する。これは上の行列の対角成分と同じ

であるから

$$\begin{cases} r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^{*-1}) = r_{nk} \quad , \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \\ r_{nn} = r_{nn} \end{cases}$$

故に $r_{nk} = -r_{nn}$ である。

次に $M_0 T M_0^*$ の j 列を計算する。ベクトル

$$(0, 0, \dots, e_j, \dots, (e_j - 1))$$

と j 行にかける。

$$e_j [r_{jk} e_k^* + r_{j,n} (e_k^* - 1)] + (e_j - 1) [r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^* - 1)] = r_{jk}$$

とすると $r_{n,j} = \bar{r}_{j,n} = -r_{nn}$ と右辺の項が打ち消し

$$(e_j e_k^* - 1) r_{jk} - r_{nn} \{ e_j (e_k^* - 1) + (e_j - 1) \} = 0$$

$e_j e_k^* = 1$ ならば $r_{j,j} = r_{nn}$ となる。

$$e_j e_k^* \neq 1 \text{ ならば } r_{j,k} = -r_{nn}$$

今簡単のため $r_{nn} = 1$, $r_{j,j} = \alpha_j$ とおけば

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & & & -1 \\ -1 & \alpha_2 & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ -1 & -1 & & \alpha_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_j: \text{任意})$$

は M_0 に関し不変である。

$M_1 T$ の第 1 列より第 $(n-1)$ 列までは

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

の形であり T の対応する列と同一の第 n 列の (n, k) 要素は

$$-\sum_{j \neq k} r_{jk} (e_n - 1) + \alpha_k r_k (e_n - 1) - e_n \quad (k \leq n-1)$$

(n, n) 要素は

$$-\sum r_j(e_n-1) + e_n$$

である。

$M_1^T M_1^*$ の j 列は $j \leq n-1$ に対して (j, n) 要素を除いて

$$M_1^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & * \\ 0 & - & - & 0 & * \end{pmatrix}$$

の形であり M の j 列と同じである。 $j = n$ 列は

$$\left(-\sum_{j \neq 1} r_j(e_n-1) + \alpha_1 r_1(e_n-1) - e_n, -\sum_{j \neq 2} r_j(e_n-1) + \alpha_2 r_2(e_n-1) - e_n, \dots, * \right)$$

(n, k) 要素は -1 と $\alpha_k < 1$ と

$$-\sum_{j \neq k} r_j(e_n-1) + \alpha_k r_k(e_n-1) - (e_n-1) = 0$$

$$-\sum r_j + (\alpha_k + 1) r_k - 1 = 0$$

$$\alpha_k = \frac{1 + \sum r_j}{r_k} - 1 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

これを利用して M_1^T の (j, n) 要素 $-\sum r_j(e_n-1) + e_n$ より $M_1^T M_1^*$ の

(j, n) 要素を計算する。 $\alpha_j r_j(e_n^*-1) - \sum_{k \neq j} r_k(e_n^*-1) - e_n^*$

α_k は real であるから -1 ではない。最後に (n, n) 要素は

$$(-1, -1, \dots, -1, e_n - \sum r_j(e_n-1))$$

$(r_1(e_n^*-1), r_2(e_n^*-1), \dots, r_{n-1}(e_n^*-1), e_n^*)$ に乗ると

$$-\sum r_j(e_n^*-1) + e_n e_n^* - \sum r_j e_n^*(e_n-1) = e_n e_n^* = 1$$

7. 正値性 であることは、

$$\begin{aligned} u^T u^* &= \sum_1^{n-1} \alpha_k |u_k|^2 + |u_n|^2 - \sum_{j,k} u_j u_k^* \\ &= \sum_1^{n-1} \{\alpha_k + 1 - n\} |u_k|^2 + (2-n) |u_n|^2 + \sum_{j,k} |u_j - u_k|^2 \end{aligned}$$

が正値性である，つまり $n=2$ の場合（のみ）である。