

強非線形2自由度発振器に生じる方形波について

京大 I 倉光 正己 Masami KURAMITSU

横田 和男 Kazuo YOKOTA

1. まえがき

本報告では、2個の共振回路と1個の強い非線形性をもつ（電流の大きい）能動素子（3次特性）とで構成された、最も簡単な2自由度発振器に生じる方形波状の振動について考察する。上記の回路で共振回路を1個とした1自由度系は、いわゆる van der Pol 方程式で記述され、この系に生じる振動の発振波形、発振周期が非線形性の大きさ（以下パラメータ μ で表す）により変化する様子は、van der Pol 以来よく知られている。すなわち、非線形性 μ が小さいとき共振回路の共振周波数をもつ正弦波が生じるが、 μ の増加と共に周期 T は単調に増加し、波形は正弦波から徐々に歪み、いわゆる弛張振動に近づく⁽¹⁾⁽²⁾。

一方、著者の一人は、先に弱非線形多自由度発振器の新しい解析法として、平均ポテンシャル関数を用いる方法を提案し⁽³⁾、この方法を用いて、非線形能動素子は系の損失分を小

さくするため(損失分極小化原理⁽³⁾), 系の固有周波数を利用して, できるだけ方形波に近い波形を作ろうとすること, 換言すれば, 「能動素子は方形波を好む」ことを示した⁽⁴⁾。さらにこの考え方を強非線形系に拡張し, 上述の van der Pol 発振器に生じる弛張振動は歪んだ方形波近似波と見なすことができ, 「方形波を好む」能動素子の働きとして説明できることを示した⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

ところが, 2自由度以上の系で μ が増加したとき生じる現象については, 従来, ほとんど関心をもたれてこなかった。その理由は, 多自由度強非線形系の取り扱いが困難であることに加え, 1自由度の系の結果から類推できると考えられていたためではないかと思われる。

本報告では, 2つの共振回路の共振周波数(系の固有周波数)の比が1:3の場合について計算機シミュレーションを行い, μ の増加と共に安定な周期振動の数が増加するという, 1自由度系とは非常に異った現象の生じることを示す。また, このような現象の生じるメカニズムを, 能動素子端子から見たアドミッタンス特性と, 素子の「損失分極小化原理」とを用いて説明する。

2. 回路と回路方程式

図1の回路を考える。能動素子特性は次式のように3次式で表されるものとする。

$$\begin{aligned} i &= g(v) = \mu \cdot f(v) \\ &= \mu \left(-v + \frac{v^3}{3} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 μ は非線形項の大きさを表す正のパラメータである。

図中の記号を用いると、図1の回路方程式は次式となる。

$$L_j \frac{di_j}{dt} = v_j \quad (2)$$

$$C_j \frac{dv_j}{dt} = -g(v) - i_j$$

$$v = v_1 + v_2, \quad (j=1, 2)$$

(2)式より i_j を消去すれば、次式を得る。

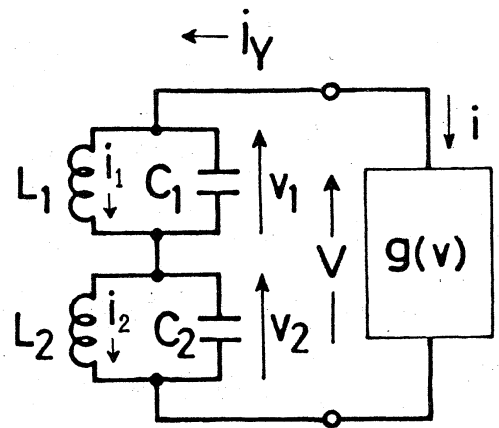


図1 2自由度発振器

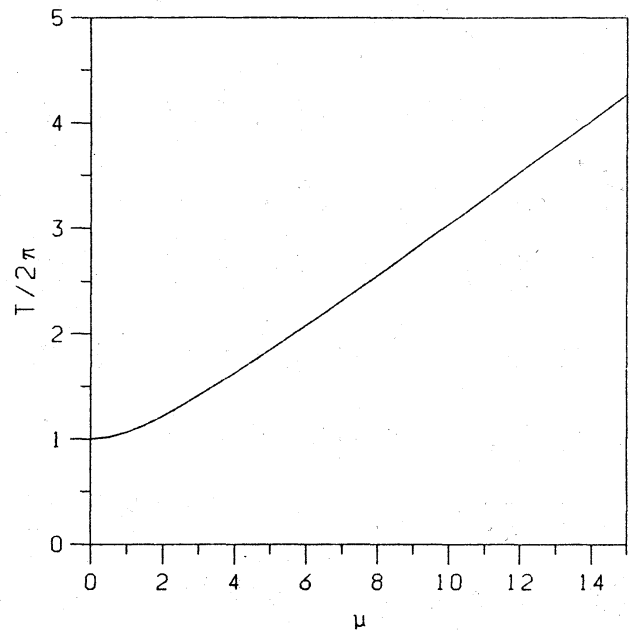


図2 van der Pol発振器の $\mu-T$ 特性

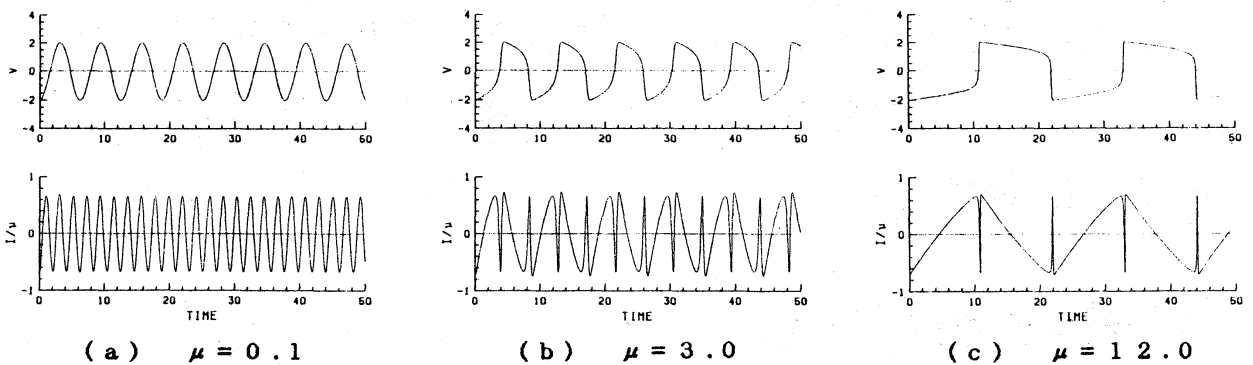


図3 van der Pol発振器の電圧、電流波形

$$\frac{d^2 v_j}{dt^2} + n_j^2 v_j = \mu \frac{1}{C_j} (1 - v^2) \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

$$\text{ただし, } n_j^2 = \frac{1}{L_j C_j}, \quad v = v_1 + v_2$$

固有周波数比 $n_1/n_2 = 1/3$ のとき, 系には $0 < \mu \ll 1$ であっても, 3倍の高調波成分を顕著に含む方形波近似波が生じる⁽⁴⁾。この振動が μ の増加と共にどのように歪むかを見るため, C_j, L_j を次式で与える。

$$C_1 = C_2 = 1, \quad L_1 = 9L_2 = 1 \quad (4)$$

(3)式において $v_2 = 0$ とおけば, 1自由度系の方程式 (van der Pol 方程式) となる。

3. 計算機シミュレーション

3.1 van der Pol 方程式のシミュレーション

以下では(3), (4)式を用いて行ったシミュレーション結果を示す。2自由度系と比較のため, まず, 周知の van der Pol 発振器の結果を示す。⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 図2に非線形項の大きさを表すパラメータ μ と振動周期 $T/2\pi (= 1/\omega)$ の関係を示す。 μ の増加と共に T は単調に増加する。また, 図3に $\mu = 0.1, 3.0, 12.0$ における電圧 v および能動素子電流 i の波形を示した。ただし, (1)式より i は μ に比例するので, i/μ の波形を示す (以下も同様)。電圧波形はよく知られたように, 正弦波が弛張

振動へと変化する。電流波形は電圧周波数の3倍の角周波数をもつ正弦波が、 μ の増加と共に三角波状の波形に逆位相にパルス状の成分(電圧波形の急変部に対応)を重ね合わせた波形となる。これは、弛張振動状の電圧を印加された能動素子の電流では、基本波(及び低次の高調波)成分と高次の高調波成分が逆位相となることを意味している。

3.2 1:3 同期2自由度発振器のシミュレーション

固有周波数の比が1:3である2自由度発振器に生じるすべての振動を求め、その周期 $T/2\pi$ の変化の様子を $0 < \mu < 15$ の範囲で図4に示した。また、いくつかの μ の値に対する能動素子端子電圧 v を図4の各特性曲線毎にまとめて図5に示す。 $0 < \mu \ll 1$ のとき、この系には $\omega = 3$ の正弦波振動と、第3高調波成分を含んだ $\omega = 1$ の同期振動(方形波近似波)が安定に生じる⁽⁴⁾。前者は μ の増加と共に、van der Pol 発振器の場合と同様に波形は歪み弛張振動に近づくが、周期はほとんど延びない。これが図4の最下段の特性曲線である(図5最下段の波形)。以下では、この振動を高調波振動(あるいは0段目の振動)と呼ぶ。一方、 $\omega = 1$ の方形波の周期 T はほとんど延びず、また、波形も μ が小さい場合の方形波近似波からあまり歪まない。これが図4の下から2段目の特性であり、図5の下から2段目の波形である。

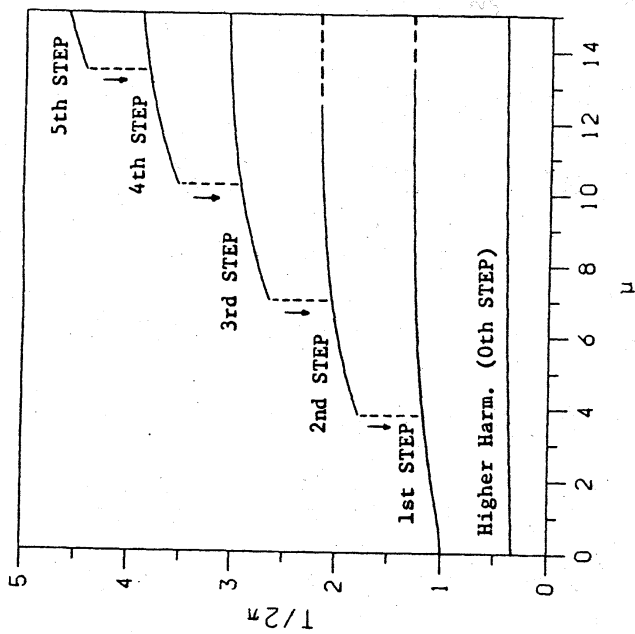


図4 1:3同期2自由度系 μ - T 特性

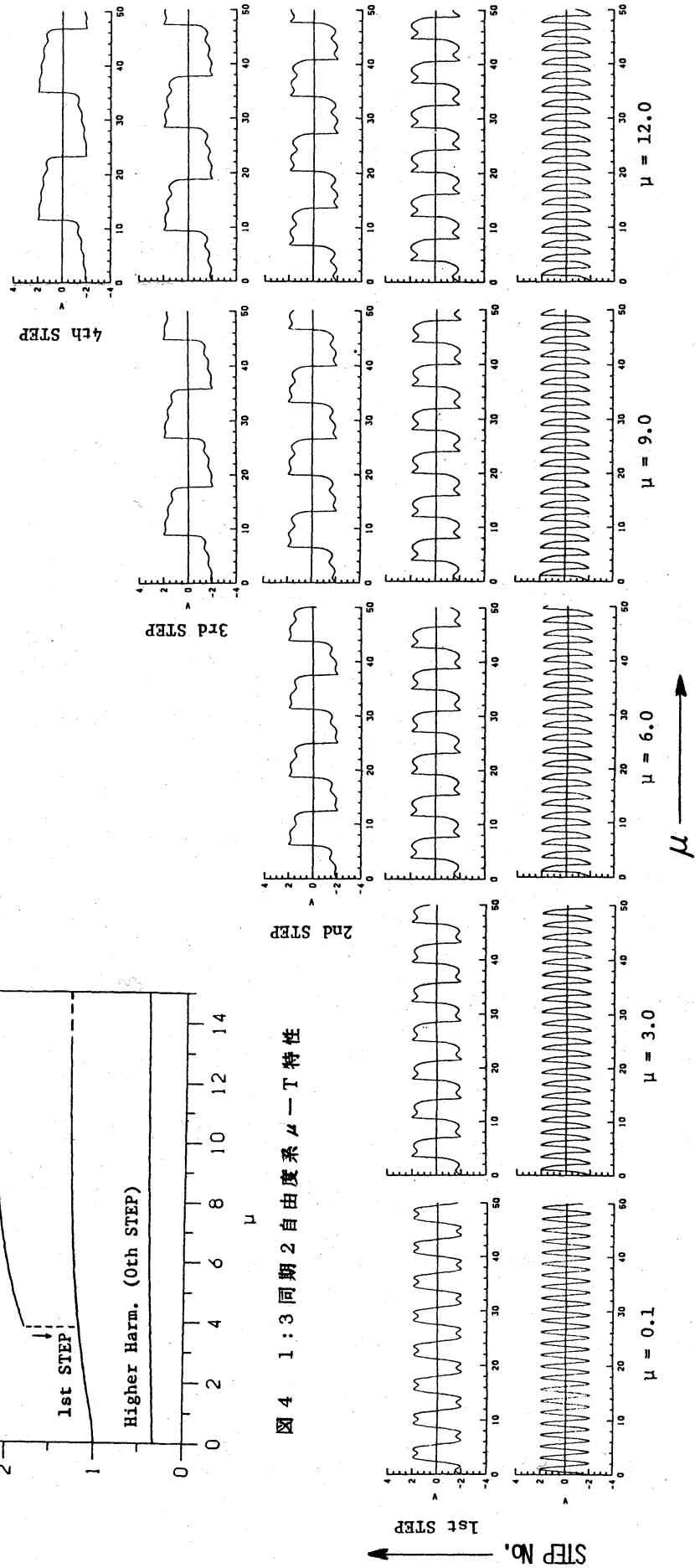


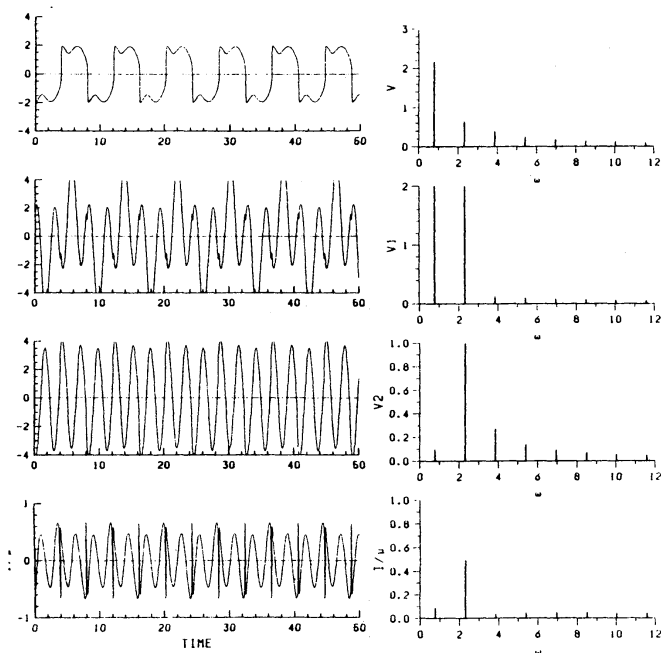
図5 1:3同期2自由度系の各段電圧波形

この系で最も興味深い現象は、 $\mu > 3.74$ において、 μ が微小な場合には存在しなかった新しい型の同期振動が安定に現れることである。この振動の波形も停留電圧（電圧ポテンシャルの極小点、 $v = \sqrt{3}$ ）⁽⁴⁾ 付近に長時間留まる方形波近似波である（図5下から3段目）。これらの振動を区別するため、周期 T の短いものからそれぞれ1段目の方形波（近似波）、2段目の方形波と呼ぶことにする。さらに μ を増加させると、3段目、4段目、---、と新しい方形波が現れる。 $\mu \leq 15$ の範囲では5段目まで観測された。波形の平坦部には小さな起伏があるが、その数は段の番号に対応して増加するのは興味深い。さらに大きい μ の値に対しても、同様に新しい型の振動が次々と生じるものと予想される。

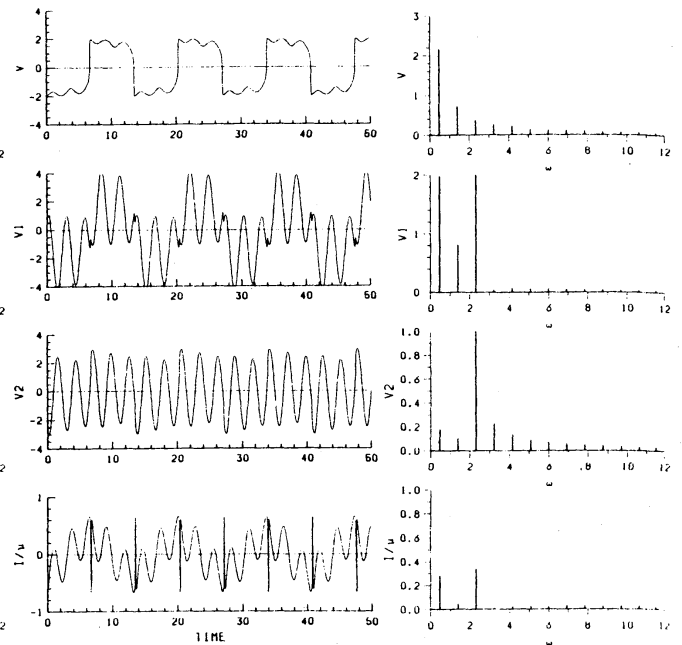
その一方で、 μ の増加と共に、低い段数の同期解が不安定化することがある。図4の1段目、2段目において、 $\mu = 14$ 付近の破線で示した部分は、振動の周期にふらつきが現れ非周期的となるが、他の段の同期振動に移ることなく振動を続けることを示す。なお、逆に、 μ を大きい値から減少していくと高い段数の振動から次々に不安定となるが、この場合には振動は速やかに1段下の方形波へ跳躍する（図4中の矢印）。図2と図4と重ね合わせて考えると、1自由度の特性曲線が2自由度の階段状の特性曲線群と順次交わっていくことがわ

かる。初期値を原点付近に選んで発振させると、 μ が小さいときは1段目の振動が生じるが、 μ の増加と共に2段目、3段目、...と、1自由度系の特性曲線と交わるあたりの段数の振動が生じやすいことが確かめられた。

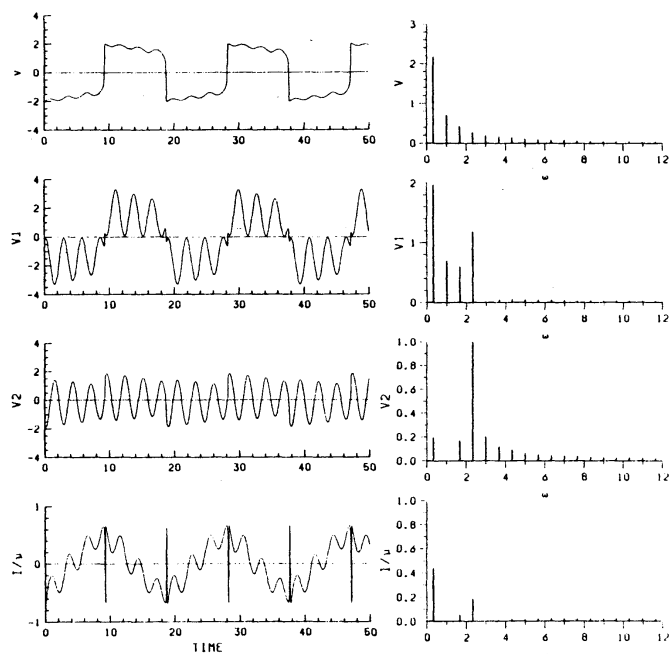
$\mu = 12.0$ では、方形波近似波は1段目から4段目まですべて安定である。各段の振動の相違点を比較するため、これら4種類の振動について、能動素子の端子電圧 v 、共振回路電圧 v_1, v_2 及び能動素子電流 i/μ の波形とそれらのスペクトルを図6に示す。(位相差は省略した)。(1)式の対称性により波形はすべて上下対称であり、スペクトルは奇数調波のみである。電圧波形は、先に述べた通り、すべて方形波状であり、従ってスペクトルは方形波のそれに類似し、位相差もゼロに近い値となっている。電流波形については各段によってかなり異なるが、いずれの場合も図3と同様、電圧波形の急峻な立上り部分に対応して、パルス状の部分が生じるのが特徴的である。電流スペクトルは基本波と1個の高調波成分(1段目では3倍、2段目では5倍、...の高調波)が他成分に比べ大きい。しかも、これら各段の大きい高調波成分の周波数はほぼ等しい値となっている。この事実が、この系に多数の安定周期解が生じるメカニズムを説明する「鍵」となる。なお、 v_1 と v_2 の各調波成分の位相差は0または π で



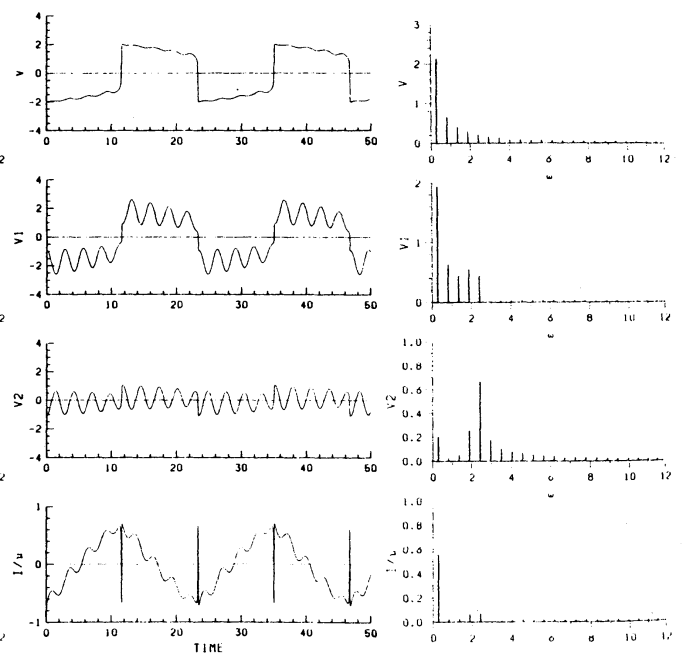
(a) 1 段目方形波近似波



(b) 2 段目方形波近似波



(c) 3 段目方形波近似波



(d) 4 段目方形波近似波

図6 1:3同期2自由度系、各段の電圧、電流波形とスペクトル。 $\mu = 12.0$

あり、 v と i の各調波成分は互に直交する。

4. 多数の方形波近似波が生じる機構の説明

本節では、前節のようなシミュレーション結果がどのような機構で生じるかを、定性的に説明することを試みる。

4.1 平均ポテンシャルに基づく方形波近似波の予想

図1を一般化して、アドミタンス $Y(\omega)$ と1個の能動素子 $g(v)$ で構成された発振器を考える。定常状態では次式が成立する。

$$i = -i_Y \quad (5)$$

$$i = g(v) \quad (6)$$

$$i_Y = Y(\omega) \cdot v \quad (7)$$

(5)~(7)式にハーモニックバランス法を適用するため、角周波数 ω_0 をもつ周期解 v を次のように第 M 高調波まで仮定する。

$$v = \sum_{m=1}^M v_m = \sum_{m=1}^M r_m \sin \phi_m \quad (8)$$

$$\phi_m = \omega_m t + \theta_m = m \cdot \omega_0 t + \theta_m$$

一方、この系の電圧ポテンシャル $G(v)$ は次式で定義される⁽³⁾。

$$G(v) = \int g(v) dv \quad (9)$$

(8),(9)式を用いて、平均ポテンシャル $\bar{U}(H, \Theta)$ を次式で定義する⁽³⁾。

$$U(V, \theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \right] dt \quad (10)$$

さて、電流 i について考える。(8)式を(6)式に代入し、(10)式を考慮すると、複素数表示を用いて次の関係が成り立つ⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} i &= g \left(\sum_{m=1}^M v_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^M \left\{ g_{sm}(V, \theta) + j g_{cm}(V, \theta) \right\} \frac{v_m}{r_m} + \text{higher freq.} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{ここで} \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} g_{sm}(V, \theta) &= 2 \cdot \frac{\partial U(V, \theta)}{\partial r_m} \\ g_{cm}(V, \theta) &= \frac{2}{r_m} \frac{\partial U(V, \theta)}{\partial \theta_m} \end{aligned} \quad (12)$$

g_{sm} , g_{cm} は電圧 v_m と同相及び直交する電流成分である。(11)式は、能動素子 $g(\omega)$ が高調波成分を含む歪んだ周期的電圧に対して、見かけ上アドミッタンスのように振舞うことを示す。また、明らかに電流 i の各成分の大きさは（すなわち、電流波形）は電圧 v の波形のみにより定まり、周波数 ω_0 には無関係である。

一方、電流 i_Y は(8)式を(7)式に代入して次式となる。

$$i_Y = \sum_{m=1}^M Y(\omega_m) \cdot v_m \quad (13)$$

i_Y の各成分（電流波形）は周波数 ω_0 により変化する。

さて、図1のように、 $Y(\omega)$ が L, C のみで構成されるとき、 $Y(\omega)$ は純虚数となるから(11)~(13)式を(5)式に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r_m} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_m} &= -\frac{1}{2j} r_m^2 \cdot Y(\omega_m) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式第1式は $\bar{v}$ の r_m に関する極値条件であるが、 $\bar{v}$ は系の損失分に対応する量であるから、「損失分極小化原理」により、強非線形においても安定な定常状態は $\bar{v}$ の r_m に関する極小値で与えられるものと考えられる。従って、(14)式は次のように表現できる。「安定な定常状態とは、 $\bar{v}$ と直交する電流成分がバランスするという条件の下で、平均ポテンシャル $\bar{v}$ を r_m に関して極小化する状態である」

能動素子特性が(1)式のような次式で与えられるとき、直交電流が生じない状態（例えば弱非線形系）では、 $\bar{v}$ を極小化する波形は方形波であるから⁽⁴⁾、直交電流が流れる条件下でも安定な波形は方形波に近いものと予想できる。以上が、シミュレーションに先立ち、強非線形系には方形波近似波が生じると予想した根拠であり、実際、図1の系にはそのような電圧波形が生じた。（図5参照） v_1, v_2 は $\bar{v}$ を分圧して決まる。

4.2 振動の周期を決める機構

次に、振動の周波数 ω_0 の決まり方について考察する。図1の回路を考える。アドミッタンス $Y(\omega)$ は、1個の共振器のアドミッタンスを $Y_i(\omega)$ として、次式となる。

$$Y(\omega) = \left\{ \frac{1}{Y_1(\omega)} + \frac{1}{Y_2(\omega)} \right\}^{-1} \quad (15)$$

$$Y_i(\omega) = j\omega C_i + \frac{1}{j\omega L_i} \quad (i=1, 2)$$

(4)式のパラメータ値を用いて, ω に対する $Y(\omega)/j$ の値を図7に実線で示す。同図中, 鎖線は共振回路が1個の van der Pol 発振器に対する $Y(\omega)/j$ を示す。図より, $Y(\omega)$ の零点(系の固有周波数)は $\omega_1=1, \omega_2=3$ であり, 極は, $\omega_{p1}=0, \omega_{p2}=\sqrt{5}$ である。能動素子特性の大きさ μ が微小のとき, 周期解 v に対して(1)式の $f(v)$ は有界であるから, $i=O(\mu)$ であり, (5), (13)式より, 結局, 次式を得る。

$$i_Y = \sum_{m=1}^M Y(m\omega_0) \cdot v_m = O(\mu) \quad (16)$$

電圧は $m=1$ の v_1 のみが大いから, $Y(\omega_0)$ が小さくなければならない。すなわち, 発振周波数 ω_0 は $Y(\omega)$ の零点 ω_1 あるいは ω_2 に近い。これが, 一般に, 弱非線形系の発振周波数を系の固有周波数で仮定する根拠である。

さて, μ が大きくなると, どのようなことが生じるのであ

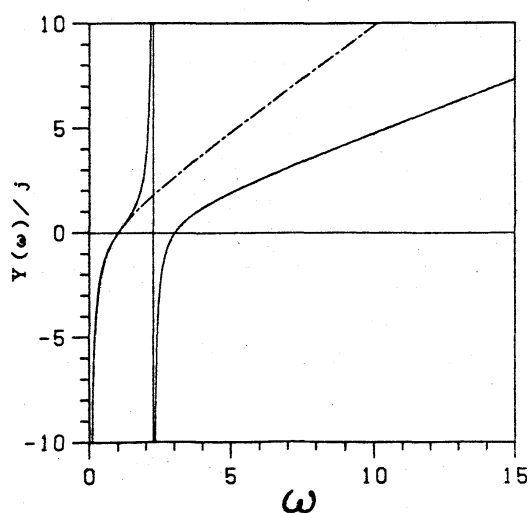


図7 共振器のアドミッタンス特性

うか。 μ が増加するということは i が増加することである。従って, i にバウンスする i_Y も増加しなければならぬから, $|Y(\omega_0)|$ が大きくなるよう, ω_0 は $\omega_0=\omega_1$ から離れ小さい方へ変化する。これにより電圧波形は歪み, 牙形波に近づきはじめる

(平均ポテンシャルが減少する) ことになる。(文末*註参照)

1自由度系では $Y(\omega)$ の極は $\omega_p = 0$ のみであるから, μ の増加と共に $\omega_0 \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) となり, 図2のような単調に増加する特性が得られる。2自由度系で $\omega_0 = \omega_2 = 3$ の高調波振動を考えると, 極 $\omega_{p2} = \sqrt{5}$ が存在するので, μ が増加しても $\omega_0 \rightarrow \omega_{p2}$, すなわち $T/2\pi \rightarrow 1/\omega_{p2}$ となり一定値に近づく。これが図4の最下段の特性である。 $\omega_0 = \omega_1 = 1$ の方形波近似波を考えると, 上と同様, ω_0 は1から減少していくが, $3\omega_0 \rightarrow \omega_{p2}$ となり, $|Y(3\omega_0)|$ が増加する。すなわち, 電流の増加を, 基本調波と共に第3高調波成分が受け持つことになる。このとき, ω_0 の減少は, $\omega_0 \rightarrow \omega_{p2}/3$ ($T/2\pi \rightarrow 3/\omega_{p2}$) でおさえられる。これが, 図4で示した1段目方形波の特性である。

次に, 何等かの方法で(例えば初期条件をかえる) $3\omega_0$ が極 ω_{p2} より低くなるようにすれば, ω_0 は更に減少し $5\omega_0 \rightarrow \omega_{p2}$ となることで第5高調波電流が増加し, 電流 i ($\propto \mu$) の増加とバランスすることが出来る。(実際, 電圧 v の波形は, $v = \sqrt{3}$ 付近の平坦部にうねりが生じ, i にも第5高調波が多く含まれる[図6])。これが図4の2段目の方形波の特性である。

以下同様に, L 段目の方形波では, μ が十分大きいとき, 発振周波数 ω_{0L} について次の関係が成立する。

$$(2L+1)\omega_{0L} \rightarrow \omega_{p2} \quad (L=0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

すなわち,

$$T_{0L}/2\pi \rightarrow 1/\omega_{0L} = (2L+1)/\omega_{p2} \quad (18)$$

結局, 2自由度系では, 各段の方形波の周期の比は, μ が十分大きいとき, 次の値に近づく。

$$T_{00} : T_{01} : T_{02} : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots \quad (19)$$

なお, L 段目の電流波形に含まれる $(2L+1)$ 高調波成分が, 電圧波形 v の平坦部 ($v = \sqrt{3}$ 付近に対応) の起伏に起因することは, 明らかである。以上の考察により, シミュレーション結果の諸現象の発生機構がよく説明できた。

5. まとめ

本報告では, 固有周波数の比が 1:3 の 2 自由度発振器において, 能動素子の非線形性が強くなったとき, 系に複数の方形波近似波が生じる現象について考察した。この現象の発生機構が, 能動素子につながれたアドミタンスに極が存在することと, 「損失分極小化原理」を用いて説明できることを示した。 μ を減少したとき高い段の方形波が不安定化する機構については, 紙数の関係で触れられなかった。また, μ を大きくしたとき, 低い段の方形波が不安定化し, 非周期的となる現象についても詳しく述べなかった。

固有周波数に共振条件の成り立たない一般の 2 自由度発振

器, あらうはもっと自由度の大きい系についても同様に考察できる。⁽⁷⁾ 今後, 引き続き報告する。

文 献

1. Pol. B. van der : "On Relaxation Oscillations", phil. mag., 2 pp. 998-992 (1926).
2. Urabe, M : Nonlinear Autonomous Oscillations, Academic Press, New York, 1967.
3. 倉光, 高瀬 : "平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法", 信学論(A) J66-A, 4, pp. 336-343 (1983).
4. 倉光, 高瀬, 新田 : "整数比の固有周波数をもつ多自由度発振器における同期現象", 信学論(A) J68-A, 9, pp. 827-835 (1985).
5. 倉光, 横田 : "強非線形 van der Pol 発振器の振動波形について", 信学技報, NLP 84-40 (1985).
6. 倉光 : "On the Waveforms of van der Pol Oscillator with Large Nonlinearity," 数理解析研究記録 53P, pp. 231-248 (1985).
7. 倉光, 横田 : "強非線形 2 自由度発振器に生じる方形波について", 信学技報 (I) NLP 85-30 (1985), (II) NLP 85-42, (III) NLP 86-8 (1986).

* 註) 電圧波形は方形波近似波であるから, すべての調波成分はほぼ同位相である。このような電圧に対する能動素子の電流波形は, 基本調波成分に逆位相にパルスが重畳された形となる (図3, 図6)。すなわち, 基本調波と高次の高調波とは逆位相である。従って i_Y もそうであって, 高い次数 m に対して, $Y(\omega_m)/j > 0$ であるから, $Y(\omega_0)/j < 0$ でなければならぬ。よって $\omega_0 < 1$ である (図7)。