

ラマヌジヤンの τ -関数の類似

津田塾大学 片山孝次

周知のまうに, ディデキントの η -関数 $\eta(z)$ は次のまうに定義される:

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi iz}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

$z \in H (= \text{上半平面})$.

この24乗はふつう $\Delta(z)$ と書かれ, それは全モデューラー群 Γ に関して -12 次元の cusp form である. $\Delta(z)$ の q -展開

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

の係数である $\tau(n)$ は ラマヌジヤンの関数とよばれている. この関数 $\tau(n)$ に 指標 χ を何等かの多段によりつけて, " χ -付き $\tau(n)$ " とでもいうたものを定義し, その性質を研究しようというのが本論の目的である.

まず, η, Δ, τ について知られていることを列挙しよう.

1. $\eta(z)$ の $q \in \Gamma$ に関する変換公式は知られている。
 として, $\eta(z)$ は テータ関数の1つである。 また $\eta(z)$ は, Kronecker の limit formula にあらわれる。

2. $\tau(n)$ は 乗法的である。

$$3. \tau(n) = O\left(n^{\frac{11}{2} + \varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

4. p を素数とすれば

$$|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}.$$

表 3. により Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$ が定義される。これはまた Euler 積展開をもつ。

(その Euler 積の因子 (p についての) を p^{-s} に関しての 2 次式とみたとき, その 2 次式はすべての p に対して虚根をもつ; これは有名なラマヌジャン予想であったが, 最近 Deligne により証明された。4. と同値である。)

5. (Lehmer の問題) $\tau(n)$ は決して 0 にならない。
 (この問題は未解決である。)

6. $\tau(n)$ に関して, 種々の合同式が知られている。たと

えば $n \equiv 1 \pmod{8}$ ならば

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{2^{11}}.$$

そして $\sigma_2(n) = \sum_{d|n} d^2$ である。

1. に関して Dedekind は問題を, $\log \eta(z)$ の変換公式を求めることに転換した:

$$\begin{aligned}\log \eta(z) &= \frac{\pi i z}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^n) \\ &= \frac{\pi i z}{12} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m z} - 1)}.\end{aligned}$$

よって, 結局 ランベルト 級数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m z} - 1)}$

の Γ に関する変換公式を求めることになる.

(ついでに, そのランベルト級数の変換公式にあらわれる, z に関する定数項を Dedekind の η とよんでいる: われわれの立場から, 自然に "指標付きの Dedekind の η " が考察の対象として出てくる.)

さて, われわれは このランベルト級数に 指標をつけてみようというのである. 以下簡単のために, k を正の整数とし, χ を $\text{mod } k$ の

real, primitive even character

とする. ($\chi(-1) = 1$ である χ を even という.)

たがって, よく知られているように, χ は クロネッカーの記号で表わされる指標である. よりくわしく "これは", () を クロネッカーの記号とするとき,

$k \equiv 1 \pmod{4}$ のときは square-free であるか,
 または $\frac{k}{4} \equiv 2, 3 \pmod{4}$ のときは square-free
 上のほうで
 であるとき, $\chi = \chi_k$ は

$$\chi_k(n) = \left(\frac{k}{n} \right)$$

として与えられる. ($k > 0$).

ランベルト級数に χ をつやす方法は 3通り 少くとも考
 えられる. まず $z \in \mathbb{H}$ に対し

$$F_1(\chi; z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m(e^{-2\pi i m z} - 1)}$$

と定義する. 一方次の Kronecker の公式が知られている:

$$\frac{e^{2\pi i u z}}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{1}{2\pi i z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i n u}}{z - n} + \frac{\bar{e}^{2\pi i n u}}{z + n} \right\},$$

$0 < u < 1,$

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right\}.$$

(これらの公式は任意の $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{Z}$ に対して成り
 立つ.) これをランベルト級数の定義式に代入して,
 和変数 m に対して指標をつけた. $\tau = \tau$

$$T_\chi = \sum_{h \pmod{k}} \chi(h) e^{\frac{2\pi i h}{k}}$$

とおくとき, 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$T_X \cdot \chi(m) = \sum_{h \bmod p} \chi(h) e^{\frac{2\pi i m h}{p}}$$

であることに注意して, $z \in H$ に対して

$$F_z(\chi; z) = \sum_{h=0}^{p-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \frac{h}{p} z}}{m(e^{-2\pi i m z} - 1)}$$

と定義する. 任意のとき,

$$\begin{aligned} F_z(\chi; z) &= \sum_{h=0}^{p-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{1}{-2\pi i m z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i n \frac{h}{p}}}{-mz - n} + \frac{e^{-2\pi i n \frac{h}{p}}}{-mz + n} \right\} \right] \\ &= \frac{T_X}{-2\pi i z} \zeta(z) - \frac{T_X}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi(n)}{mz + n} + \frac{\chi(-n)}{mz - n} \right) \end{aligned}$$

である, さらに m, n は同時に X をつづける

$$F_3(\chi; z) = \sum_{h=1}^{p-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m} \frac{e^{-2\pi i m \frac{h}{p} z}}{e^{-2\pi i m z} - 1}$$

と定義する.

$s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 1$ に対して

$$P_s(u) = -s! \sum_n' \frac{e^{2\pi i n u}}{(2\pi i n)^s}, \quad 0 \leq u < 1,$$

とおく. したがって, $s=1$ に対しては右辺の和は, 符号の異なる n について 1ずつ和をとるものとする.

$B_s(u)$ をベルヌーイ多項式とすれば, $(u, s) \neq (0, 1)$ において

$$B_s(u) = P_s(u)$$

である. 上に述べた $mod\ k$ の指標 χ に対して

$$B_{\chi, s}(u) = k^{s-1} \sum_{h=0}^{k-1} \chi(h) P_s\left(\frac{h+u}{k}\right)$$

とおく. $B_{\chi, s}(u)$ は Leopoldt の意味での, generalized Bernoulli 多項式である.

上に定義した $F_j(\chi; z)$, $j=1, 2, 3$, に対して次の反転公式, 変換公式を証明することはできる.

定理 1 (χ : non-principal)

$$(i) \quad F_1(\chi; z) - T_\chi^{-1} F_2(\chi; -z^{-1}) \\ = -\frac{1}{2} L(1, \chi) + \frac{T_\chi \pi i}{2 k^2 z} B_{\chi, 2}(0)$$

$$(ii) \quad F_3(\chi; z) - F_3(\chi; -z^{-1}) = \frac{2 T_\chi \pi i}{k} (B_{\chi, 1}(0))^2$$

定理 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{k} \right\} \subset \Gamma$$

とす. $k \in \mathbb{Z}$ $c \neq 0$ とす.

$$S_1(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{p}{k} - \frac{ha}{c}\right\}\right),$$

$$S_2(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{ha}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right),$$

$$S_3(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-1} \chi(p) \chi(q) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{q}{k} - \frac{ah}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right)$$

とす. $z = \tau$ $\{x\} = x - [x] = x$ の小数部分 とする.

$$(i) \quad F_1(\chi; \sigma(z)) = F_1(\chi; z) + \pi i T_\chi^{-1} S_1(\chi, \sigma)$$

$$(ii) \quad F_2(\chi; \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} \sigma(z) \frac{B_{\chi, 2}(0)}{k} = F_2(\chi; \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} z \frac{B_{\chi, 2}(0)}{k} \\ - \frac{\pi i}{2} \frac{a+d}{c} \frac{B_{\chi, 2}(0)}{k} + \pi i S_2(\chi, \sigma),$$

$$(iii) \quad F_3(\chi; \sigma(z)) = F_3(\chi; \frac{z}{k}) + \pi i S_3(\chi, \sigma).$$

上の定理にあらわした $S_j(\chi; \sigma)$, $j=1, 2, 3$, が " χ -付
のディリクレの和" というべきものである.

定理 2 をみれば η -関数の類似として (4) の η 係 " χ 付き η -関数" と定義すれば $\eta = \chi$ がわかる:

$$\eta_1(\chi; z) = \prod_{h=0}^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k^h f^n)^{\chi(h)}, \quad \varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

$$\eta_2(\chi; z) = e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k} z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - g_k^n)^{\chi(n)}, \quad g_k = e^{\frac{2\pi i z}{k}}$$

$$\eta_3(\chi; z) = \prod_{h=0}^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k^h g_k^n)^{\chi(h)\chi(n)}.$$

このとき

$$F_1(\chi; z) = -T_x^{-1} \log \eta_1(\chi; z),$$

$$F_2(\chi; z) - \frac{\pi i z B_{\chi,2}(0)}{2k} = -\log \eta_2(\chi; z),$$

$$F_3(\chi; z) = -T_x^{-1} \log \eta_3(\chi; z),$$

である.

以下 η_2 に関して述べる. $\left(e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k} z} \right)^{k'}$ が g_k の
整数乗となる最小の整数を k' とする. ところで $k=5, 13,$
 $8, 12$ に対して $k' = 5, 1, 2, 1$ である. $\therefore \eta$ 及び k'

を用いて

$$\Delta_2(\chi_k; z) = \eta_2(\chi_k; z)^{k'}$$

と定義する。これが Δ -関数の類似である。以下簡単

のため $q_k = \left(e^{\frac{\pi i B_{k,2}(0)}{2k}} z \right)^{k'}$ とする。 Δ_2 の

q_k -展開を

$$\begin{aligned} \Delta_2(\chi_k; z) &= q_k \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_k^n)^{k' \chi(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(\chi_k; n) q_k^n \end{aligned}$$

とすれば, $\tau_2(\chi_k; n) \in \mathbb{Z}$ であり, これは次の漸化式

により計算される:

$$\begin{aligned} \tau_2(\chi_k; n) &= \frac{k'}{1-n} \left\{ \tau_2(\chi; n-1) a_x(1) + \tau_2(\chi; n-2) a_x(2) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \tau_2(\chi; 1) a_x(n-1) \right\}, \end{aligned}$$

$$a_x(n) = \sum_{j|n} j \chi(j).$$

この τ_2 が ラマヌジャンの τ -関数の類似である。

η_2, Δ_2, τ_2 の性質について調べよう。(η, Δ, τ の

性質と平行して述べよう)

(1) 変換公式についてはすでに定理 1.2 として与えた.

$\tau_2(\chi_n; z)$ はいくつかの T -4 変換の積の和として表わされる (ヤコービの三重積公式を用いて証明される.)

(2) $\tau_2(\chi_n; n)$ は乗法的ではない.

(3) $\tau_2(\chi_n; n) = O(n^{k'\varphi(k)})$ が成り立つ.

(4) ~~Lehmer~~ Lehmer の予想に反し,

$$n \equiv 4 \pmod{6} \Rightarrow \tau_2(\chi_{12}; n) = 0$$

が成り立つことがあふ.

(5) $n \equiv 8 \pmod{12}$ ならば

$$\tau_2(\chi_{12}; n) \equiv a_{\chi_{12}}(n) \pmod{2^3}$$

が成り立つことがあふ.

(7) $\tau_2(\chi_n; n)$ の符号は $\pmod{kp'}$ に對し一定である. ^{らしい} 可成り

$$n \equiv m \pmod{kp'} \Rightarrow \tau_2(\chi_n; n) \tau_2(\chi_n; m) \geq 0$$

と成るらしい.

(5), (6), (7) については上述の τ_2 の漸化式を用いて, 電子計算機により $n \leq 200$ までの τ_2 の値を求めた.

結果からの推測である。(1), (2), (3) について

[1] をみられたい。特に (1) の結果を用いて、 $S_2(\chi, \sigma)$ の分母を exact に定数 γ が出来る。

[1] K. Katayama Zeta-functions, Lambert series and arithmetic functions analogous to Ramanujan's τ -function I. *Crelle* 1974. Bd. 268/269.

同 II. to appear in *Crelle*. J.