

33 粗度要素による抵抗を考慮した $k-\epsilon$ 乱流モデルによる乱流境界層の数値計算

Numerical Calculation of Turbulent Boundary Layer

Using Refined $k-\epsilon$ Turbulence Model in Consideration of Drag Effect by Roughness Element

丸山 敬

Takashi MARUYAMA

SUMMARY

Turbulent flows in and above the roughness elements are studied using a refined $k-\epsilon$ turbulence model. The model are derived from the Navier-Stokes equations by the time space averaging operations in consideration of the drag effect by roughness elements. The coefficients in the model are examined by the experimental data. The wind velocity profiles and the turbulent energy profiles vary with the drag coefficient and the length scale.

1 はじめに

建築物の耐風設計を行う場合、強風時の風速鉛直分布を決定することが必要となるが、地面付近には乱流境界層が発達するので、その気流性状を予測しなければならない。このとき、市街地のように粗度要素が大きくなってくると、地表面の粗度形状や吹送距離による風速分布の変化が問題となる。

粗面上に発達する乱流境界層を数値計算によって求める場合、地表面境界の与え方が最も重要になる。地表面付近の気流性状を詳しく知りたいときには粗度形状を計算領域に再現する方法が考えられる。この場合、十分に発達した乱流境界層では境界層厚に比べて粗度高さが小さいので、解析領域の細かな分割が要求され、境界層上部まで計算を行おうとすると計算量が多くなる。3次元計算を行えば粗度要素周りの空間的な気流性状を知ることができるが、計算量が膨大になって、各粗度要素の形状を変化させたり、流れ方向に計算領域を伸ばしてゆくには限度がある。現在の計算機的能力から見て、規則的な粗度配置を周期境界条件を用いて解き、高さ方向にせん断応力が一定であるような範囲の解析が限界のように思われる。一方、粗度高さよりも上の情報が欲しいときや、境界層の発達の様子を知りたい場合には粗度形状を計算領域に再現せずに、地表面粗度を対数法則で取り込むwall-boundary条件が用いられることが多い。このとき、粗度は粗度長や零面変位によって与えられる。各粗度形状に対する粗度長や零面変位は、吹送距離が粗度高さに対して十分長く、境界層がほぼ平衡状態に達したと見なせるときの値として実験や観測により求められる。しかし、粗度高さに対して吹送距離が短い間は粗度長や零面変位の変化が大きいため、正確な計算を行おうとすると粗度長や零面変位も吹送距離方向に変化させる必要がある。また、粗度高さ以下の層、すなわちキャノピー内では対数法則が成り立たないので、キャノピー内の気流性状は求めることができない。従って、粗度長や零面変位の吹送距離による変化そのものを求めたり、市街地のように粗度要素が大きい粗面上に発達する乱流境界層を、キャノピー内の気流性状をも含めて求めるためには、粗度要素の影響を何らかの方法でモデル化して計算に取り込む必要がある。

キャノピー内の気流性状に与える粗度要素の影響は森や林、農作物等、植物キャノピーにおいて数多く研究されている。Wilsonら¹⁾は長さスケールを既知とした多方程式モデルによる予測を行い、Yamada²⁾は長さスケールの方程式を用いた2方程式乱流モデルを示した。また、鶴野ら³⁾はYamadaのモデルを $k-\epsilon$

乱流モデルに変換し市街地キャノピーに適用した。植物キャノピー内の解析では通常、粗度要素である植物の体積を無視しているため、粗度要素の存在による流体の体積変化が考慮されていない。これに対して、市街地のように単位空間あたりの粗度要素の占める割合が大きい場合には、流体の体積変化を取り扱える形で方程式系を与えた方がよい。村上ら⁴⁾は粗度要素の存在による流体の体積変化を、コントロール・ボリュームの考え方で取り込んだk-ε乱流モデルを導出し、クリーンルームの解析に用いている。

本報ではこれらの研究に基づき、粗度要素による抵抗を考慮したk-ε乱流モデルを考察し、その結果を用いて粗面上に発達する乱流境界層内の気流性状を数値計算により求めた。また、実験結果との比較により新たに導入されたモデル係数の最適値を求め、粗度形状による変化を調べた。

2 モデル化

平岡ら⁵⁾にならって、ナビエ・ストークス方程式に時空間平均操作をほどこし、Launderら⁶⁾によるk-ε乱流モデルの形に近似化を行うと、粗度要素を含む流れ場における基礎方程式は以下のように表される。

[連続の式]

$$\frac{\partial V_X U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{.....(1)}$$

[平均流の輸送方程式]

$$V_X \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial V_X U_i U_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial V_X P}{\partial x_i} - \frac{\partial V_X \overline{U_i U_k}}{\partial x_k} - V_X F_{ri} \quad \text{.....(2)}$$

[kの輸送方程式]

$$V_X \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial V_X U_k k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial V_X k}{\partial x_k} \right) + V_X (S - \varepsilon + F_k) \quad \text{.....(3)}$$

[εの輸送方程式]

$$V_X \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial V_X U_k \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial V_X \varepsilon}{\partial x_k} \right) + V_X \frac{\varepsilon}{k} (C_{1E} S - C_{2E} \varepsilon + F_E) \quad \text{.....(4)}$$

ただし、i, j, k=1, 2, 3, $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$F_{ri} = C_{ri} U_j U_j a_x / 2 \quad \text{.....(5)}$$

$$F_k = C_{rk} U_i F_{ri} \quad \text{.....(6)}$$

$$F_E = C_{rE} F_k \quad \text{.....(7)}$$

$$= C_{rE} k^{3/2} / L \quad \text{.....(8)}$$

$$= C_{rE} (k^{3/2} / L - \varepsilon) \quad \text{.....(9)}$$

$$S = -\overline{U_i U_k} \left(\frac{1}{V_X} \frac{\partial V_X U_i}{\partial x_k} \right) \quad \text{.....(10)}$$

$$\overline{U_i U_k} = -\frac{\nu_t}{V_X} \left(\frac{\partial V_X U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_X U_k}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ik} k \quad \text{.....(11)}$$

$$\nu_t = C_D k^2 / \varepsilon \quad \text{.....(12)}$$

$$U_i = \langle \overline{u_i} \rangle, P = \langle \overline{p} \rangle \quad \text{.....(13)}$$

$$C_D = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_{1E} = 1.44, C_{2E} = 1.92. \quad \text{.....(14)}$$

とする。ここで、 $\overline{\quad}$ は時間(ensemble)平均、 $\langle \quad \rangle$ は空間平均を表し、

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_X} \int H(x - x') f(x') dx' \quad \text{.....(15)}$$

と定義する。H(x-x')は十分滑らかで、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) dx = 1, \quad |x - x'| \rightarrow \infty \text{で} H(x - x') \rightarrow 0 \quad \text{.....(16)}$$

を満たすようなフィルター関数とする。式中の変数は全て無次元量で表してある。各変数の意味は以下の通りである。

C_{ri} : 粗度要素の x_i 方向の形状係数

C_{rk} : 係数 ≈ 1.0

C_{rE} : 係数

ε : エネルギー消散率

k : 乱流エネルギー

L : 粗度要素を代表する長さスケール=粗度要素の見付け幅

ν_t : 渦動粘性係数

p : 圧力

t : 時間

u_i : x_i 方向風速成分: $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$

$$a_s : \text{有効粗度表面積密度} = \frac{\text{粗度要素のセル内見付け面積}}{\text{セル内流体体積}} \quad \dots\dots(17)$$

$$V_x : \text{有効体積} = \frac{\text{セル内流体体積}}{\text{セル体積}} \quad \dots\dots(18)$$

ここで、 F_{r1} , F_k , F_ε は粗度要素の存在により生じた項で、 F_{r1} は粗度要素が流れにおよぼす力、 F_k は F_{r1} によって生じる乱流エネルギーの生成項、 F_ε は粗度要素によって生じるエネルギー消散率の生成項である。各項のモデル化を以下に述べる。

F_{r1} は粗度要素が流れから受ける坑力に釣合うと考え、式(5)のように与える。 F_k は粗度要素が流れから受けるエネルギーに比例すると考え、式(6)のように与える。このとき、粗度要素が振動や音を発生することなく、流れに対して行った仕事が全て乱流エネルギーに変わるならば $C_{rk} = 1.0$ である。エネルギー消散率の輸送方程式において、大きなスケールの乱流エネルギー^{注)}から熱への粘性消散が無視できるとすれば、 F_ε は大きなスケールの乱流エネルギーから小さなスケールの乱流エネルギーへのエネルギー供給に起因するエネルギー消散率の生成項と考えて良い。平岡らはこの項が大きなスケールの乱流エネルギーの生成項である F_k に比例するとして式(7)のように与えたが、このモデル化ではせん断による平均流から大きなスケールの乱流エネルギーへのエネルギー供給分を取り込んでいない。また、大きなスケールの乱流エネルギーの長さスケールは粗度形状を代表する長さスケールに関係することから、 F_ε は粗度形状を代表する長さスケールを含んだモデル化を行う方が好ましい。そこで、本報では F_ε の近似として村上ら⁴⁾と同様なモデルを用い、式(8)のように近似した。ここで、式中の L は粗度要素の見付け幅とする。ただし、村上らが行った床グレーチングの解析では F_ε を式(9)のように与え、 $C_{\varepsilon E}$ が床グレーチング部のみで大きな値を取るとしていることから、実質上粗度要素が存在する部分で $\varepsilon = k^{3/2}/L$ という条件を与えていることになる。従って、村上らのモデル化における F_ε は、エネルギー消散率の輸送方程式の中で粗度要素の存在による生成項という意味合いは少ないように思われる。

3 解析領域および計算方法

解析対象はFig. 1のような形状をもつ粗面上に発達する乱流境界層である。境界層は十分発達して平衡状態に達していると仮定し、せん断応力が一定である範囲について高さ方向に1次元の流れ場を考える。Fig. 2に示すように粗度高さ h の約3.4倍までを計算領域とし、セル分割は40等分とした。計算は2次精度の中心差分を用いて行った。上方境界における平均風速および乱流エネルギーの値は実験値を与え、エネルギー消散率については $\partial \varepsilon / \partial z = 0$ とした。床面境界では乱流エネルギーおよびエネルギー消散率に関して $\partial k / \partial z = \partial \varepsilon / \partial z = 0$ とした。また、床面第1セルで $\varepsilon = k^{3/2} C_{D0}^{3/4} / 4z$, $-U_i U_k = \sqrt{C_D} k$ とし、風速勾配はべき法則(べき指数1/7)で与えた。定数 C_D , σ_k , σ_ε , C_{1E} , C_{2E} については式(14)に示す値を用いた。

4 実験概要

風洞実験は流れ方向の静圧勾配が零になるように天井高を調節し、基準風速を約10 m/sとして行った。風速の測定にはX型熱線風速計を用いた。計算結果との比較には乱流境界層が十分発達した位置での測定結果を用い、熱線風速計の特性に起因する誤差を考慮した時空間平均⁷⁾を行った値を用いている。乱流エネルギーは $-u'w'$ の測定結果より、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルで用いられる定数 C_D を用いて、 $k = -\overline{u'w'} / \sqrt{C_D}$ と

注) ナビエ・ストークス方程式から乱流エネルギーの輸送方程式を導く際に、粗度要素を含む空間で時空間平均操作をほどこすと乱流エネルギー k は、

$$k = \frac{1}{2} \langle \overline{u''u''} \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{u' u'} \rangle$$

となる。ここで、 $'$ は時間(ensemble)平均からの変動、 $''$ は空間平均からの変動を表す。このうち、第1項は粗度要素により引き起こされた時間平均風速の空間的な変化により生じる項であり、第2項は風速変動成分による項である。従って、第1項の長さスケールは第2項の長さスケールに比べて大きいと考えられ、その大きさは粗度形状を代表する長さスケールに関係する。本報では時空間平均により生じたこれらの項のうち、第1項を大きなスケールの乱流エネルギー、第2項を小さなスケールの乱流エネルギーと呼ぶことにする。各項間のエネルギーのやり取りに関する詳しい考察は文献⁵⁾を参照のこと。

Table 2

CASE	width (m)	height (m)	depth (m)	V_x	a_x (1/m)	C_{f1}	C_{dk}	C_{DE}	L (m)
A	0.03	0.03	0.03	.750	11.11	0.8	1.0	4.0	0.03
B	0.03	0.03	0.03	.875	4.77	1.0	1.0	2.3	0.03
C	0.03	0.03	0.03	.944	1.96	0.7	1.0	2.0	0.03
D	0.03	0.06	0.03	.875	9.52	0.8	1.0	2.0	0.03

Values of parameters used in the calculations.

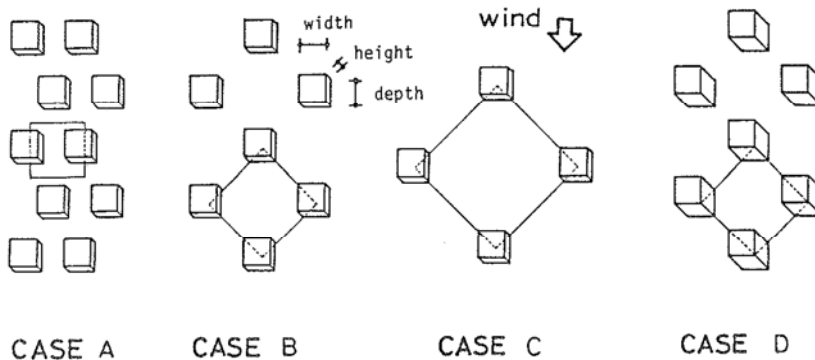


Fig. 1 Configuration of roughness.

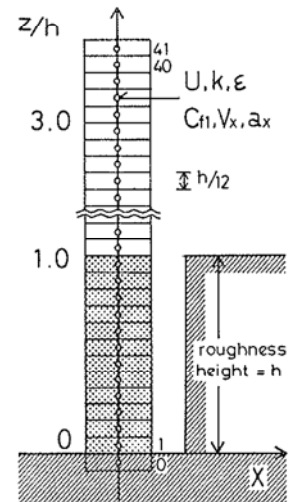


Fig. 2 Mesh discretization.

して求めた。実験に用いた粗度要素の大きさおよび計算に用いた変数の値をTable 2に示す。

5 考察

5-1 モデル係数による変化

実験との比較の前に、モデル化によって現れた係数 C_{f1} 、 C_{dk} 、 C_{DE} の変化が計算結果に及ぼす影響をCASE Bを例に取り調べる。各係数の変化に際して、他の2つの係数の値は固定した。計算結果をFig.3.1～3.3に示す。図中、 U 、 k の値は上方境界での時空間平均風速 U_r で無次元化してある。また、計算にあたって C_{f1} 、 C_{dk} 、 C_{DE} の高さ方向の変化は無いとした。

C_{f1} による変化： C_{f1} はラフネス内における各高度での時空間平均風速に対する形状係数である。実験で用いた粗度要素のもつ C_{f1} の値は乱流中の独立正方形角柱の持つ形状係数の値と大きく変わらないと考えられるので、 $1.0 \leq C_{f1} \leq 1.8$ の範囲で C_{f1} を変化させた。計算結果を Fig.3.1に示す。図より C_{f1} の増加とともに風速は減少し、乱流エネルギーはラフネス内で僅かに減少し、上層で増加することがわかる。

C_{dk} による変化：前述のように、粗度要素が流れに対して行う仕事が全て乱流エネルギーに変わるならば、 $C_{dk} = 1.0$ である。 C_{dk} の値を $0.6 \leq C_{dk} \leq 1.4$ の範囲で変化させた結果をFig.3.2に示す。図より C_{dk} の増加とともに風速はラフネス内で増加し、上層で減少するが、その変化は僅かである。また、 C_{dk} の増加によって乱流エネルギーは増加することがわかる。実験で用いる粗度ブロックでは振動や音の発生による熱消散がほとんど無視できるので、以下の計算では $C_{dk} = 1.0$ とした。

C_{DE} による変化： $1.5 \leq C_{DE} \leq 2.5$ の範囲で C_{DE} の値を変化させた結果をFig.3.3に示す。図より C_{DE} の増加とともに風速はラフネス内で減少、上層で増加することがわかる。また、乱流エネルギーは C_{DE} の増加にともなって減少する。

5-2 実験結果との比較

5-1より $C_{dk} = 1.0$ とし、 C_{f1} と C_{DE} を変化させて計算を行い、計算結果が実験結果を良く近似するように C_{f1} 、 C_{DE} の値を与えた。なお、ラフネス内では乱れが大きく、熱線風速計による乱流エネルギーの測定には大きな誤差が含まれる恐れがあるので、乱流エネルギーに関しては上層の分布だけを比較した。結

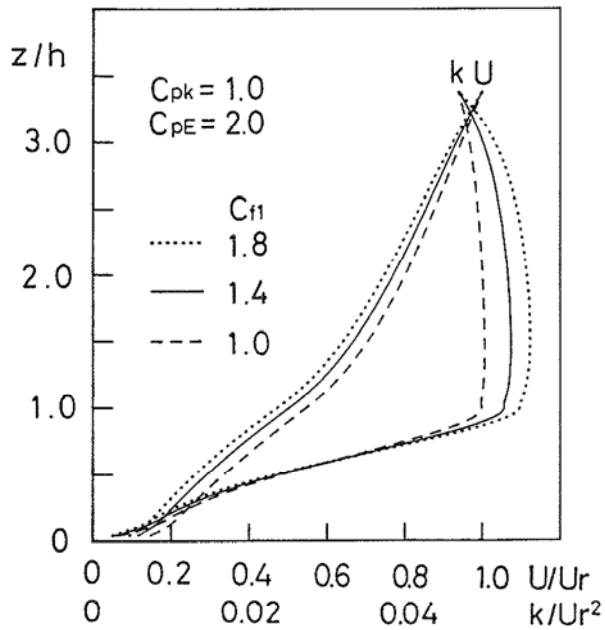


Fig. 3.1 Variation with C_{f1} .

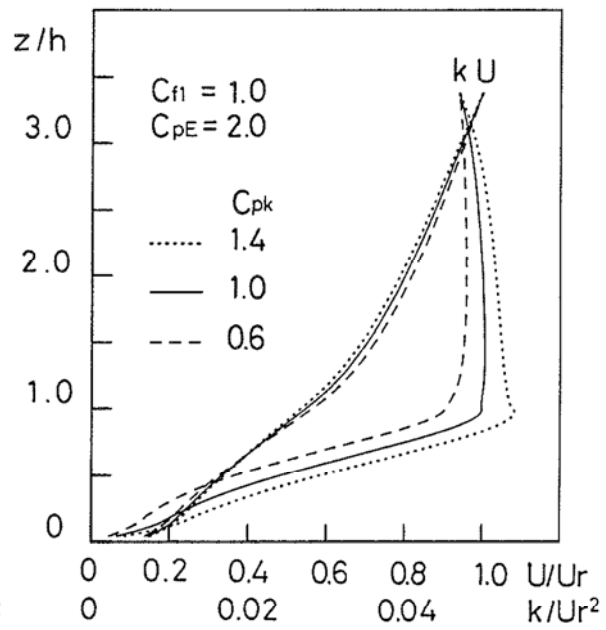


Fig. 3.2 Variation with C_{pk} .

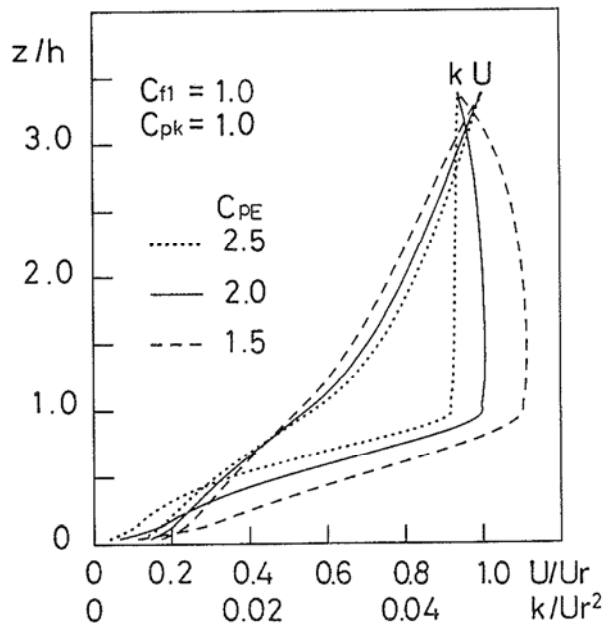


Fig. 3.3 Variation with C_{pE} .

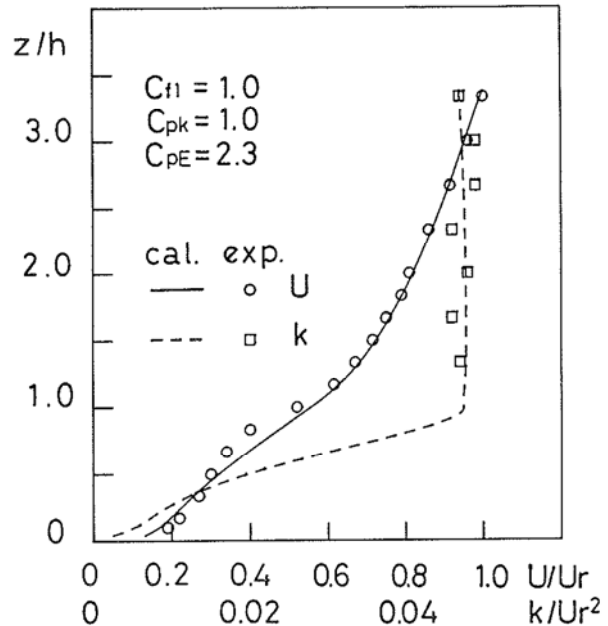


Fig. 4 Comparison between calculation and experimental data.

果の一例(CASE B)をFig. 4に、各粗度に対する C_{f1} 、 C_{pE} の最適値をTable 2に示す。Table 2より C_{f1} は0.7~1.0とほぼ一定になる。一方、 C_{pE} は V_X の減少とともに増加する。今回のモデル化において、 F_E に含まれる長さスケール L は粗度要素の見付け幅としているが、 L の値が粗度形状(今回の実験範囲では粗度要素の配列形状および粗度高さ)により変化すると考え、 C_{pE} が一定になると仮定した場合に粗度を代表する長さスケールがどのように変化するかを考えてみる。いま、式(8)を

$$F_E = \frac{k^{3/2}}{(L/C_{pE})} \dots\dots(19)$$

と書換え、 L/C_{pE} が粗度を代表する長さスケールと考えると F_E のモデル係数は1となり、定数になる。このとき、 $1/C_{pE}$ は粗度を代表する長さスケールが粗度要素の見付け幅 L の何倍かを表していることになる。Fig. 1およびTable 2より、1) CASE BとDのように粗度要素の配列形状が変化せず、粗度高さだけが変化しても $1/C_{pE}$ の値はあまり変化しない。2) CASE Aのように V_x が小さくなって、粗度要素の間隔が狭くなってくると $1/C_{pE}$ の値が小さくなることがわかる。これより、 F_E を式(8)のようにモデル化した際に導入した長さスケールは、粗度要素の間隔がある程度離れているときは粗度要素の見付け幅に比例するが、程度粗度要素の間隔が狭くなってくると粗度要素の間隔に依存して小さくなると考えられる。

6 まとめ

本報ではナビエ・ストークス方程式に時空間平均操作を施すことにより、流体の体積変化および粗度要素による抵抗を考慮した $k-\varepsilon$ 乱流モデルを導出し、その結果を用いて粗面上に発達する乱流境界層内の気流性状を数値計算により求めた。また、実験結果との比較により新たに導入されたモデル係数について考察を加えた結果、以下のことがわかった。

- 1) ラフネス内における各高度での時空間平均風速に対する粗度要素の形状係数は、今回の実験で用いた粗度形状の場合、約0.7~1.0であった。
- 2) 粗度要素の存在により生じるエネルギー消散率の生成項のモデル化における係数を、粗度形状によらない定数とすると、粗度を代表する長さスケールは、粗度要素の間隔がある程度離れているときは粗度要素の見付け幅に比例するが、程度粗度要素の間隔が狭くなってくると粗度要素の間隔に依存して小さくなると考えられる。

今回、1次元解析によりモデル化の検証を行ったが、2次元、3次元への拡張を考えたい。また、エネルギー消散率のモデル化の際に導入された長さスケールと粗度形状との関係を明らかにすることが今後の課題である。なお、本研究の一部は文部省科学研究費の援助を受けて行われたものである。

謝 辞

モデル化および数値計算を行うにあたり、京都大学助手平岡久司氏から有用な意見を数多くいただいた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Wilson, N.H. and R.H. Shaw : A higher order closure model for canopy flow, Journal of Applied Meteorology, Vol.16, 1977, pp.1197-1205.
- 2) Yamada, T. : A numerical model study of turbulent airflow in and above a forest canopy, Journal of the Meteorological Society of Japan, Vol.60, No.1, 1982, pp.439-454.
- 3) 鶴野伊津志・植田洋匡・若松伸司・中村晃：乱流モデルによる夜間都市境界層の形成機構の検討，衛生工学研究論文集，Vol.24, 1988, pp.125-137.
- 4) 村上周三・加藤信介・B.E. ロンダー・鈴木啓泰：層流型クリーンルーム内の気流性状・汚染質拡散性状に関する研究(その6)，生産研究，Vol.40, No.1, 1988.1, pp.67-70.
- 5) 平岡久司・丸山 敬：植物群落内および都市キャノピー内での乱流モデルの考察，第3回生研NSTシンポジウム，1988.2.25-26, pp.87-93.
- 6) B.E. Launder and D.B. Spalding : lecture in Mathematical Models of Turbulence, 1972, Academic Press.
- 7) 丸山 敬：プローブの違いによるラフネス内気流性状の測定結果の変化について（X型およびタンデム型熱線風速計の比較），日本建築学会大会学術講演梗概集，1988，発表予定.