

極小曲面の安定性について

東北大理 武藤 秀夫

Barbosa - do Carmo [1, 2] の極小曲面の安定性についての結果の紹介と、その条件の評価についての注意を述べる。 $\bar{M}_a^n$ を断面曲率 a の space form とする。 M^2 を境界をもつ単連結コンパクトな $\bar{M}_a^n$ 中の極小曲面とする。 M^2 が安定とは、境界で消える M に沿った任意の non-zero 法ベクトル場 N に対して、体積の第2変分 I が、 $I(N, N) > 0$ を満たす時をいう。

問題 どんな M^2 が安定か? (generalized) Gauss map の性質から安定性がわかるか?

定理 (Barbosa - do Carmo [1, 2]) M^2 を、境界をもつ単連結コンパクトな、 $\mathbb{R}^n$ (resp. $S^n(r)$) 中の極小曲面とする。

(1) $n = 3$ の時、 $\int_M -K dA < 2\pi$ (resp. $\int_M (\frac{2}{r^2} - K) dA < 2\pi$) ならば、 M^2 は安定。更に、定数 2π は、次の意味で "sharp" である。: $\forall \varepsilon > 0$ に対して、 $\int_{M(\varepsilon)} -K dA = 2\pi + \varepsilon$ (resp. $\int_{M(\varepsilon)} (\frac{2}{r^2} - K) dA = 2\pi + \varepsilon$) を満たす不安定な極小曲面 $M^2(\varepsilon)$ が存在する。

(2) $n \geq 4$ の時. $\int_M -K dA < \frac{4}{3}\pi$ (resp. $\int_M (\frac{2}{r^2} - K) dA < \frac{4}{3}\pi$)
 ならば, M^2 は安定である。

ここで, K は, M^2 の断面曲率, dA は体積要素である。

方針 M を M^2 に沿った単位法ベクトル場, u を ∂M^2 で消える
 M 上の滑らかな関数とする。 M^2 上のリーマン計量を g とし,
 g による内積を $(\cdot, \cdot)_g$ とする。この時, $I(u, u) \geq \int_M (|du|_g^2$
 $- 2(2a - K)u^2) dA$ 。ここで, $n = 3$ の時, 常に等号が成立
 することを注意する。以下, 簡単のため, $a > 0$, つまり,
 $\bar{M}^n(a) = S^n(a)$ の場合について考える。

1° λ_1 の比較問題への帰着。 $\tilde{g} = (2a - K)g$ と新しい計量を
 定義すると, レーリーの原理より, $I(u, u) \geq \int_M (|du|_{\tilde{g}}^2$
 $- 2u^2) d\tilde{A} \geq (\tilde{\lambda}_1(M) - 2) \int_M u^2 d\tilde{A}$ 。ここで, $\tilde{\lambda}_1(M)$ は, $\tilde{g}$ によ
 る Laplacian の Dirichlet 条件下での第1固有値である。したが
 って, $\tilde{\lambda}_1(M) > 2$ となる条件を求める問題に帰着される。

2° 等周不等式による第1固有値の比較。

定理 (Peetre [8], Bandle [3], Barbosa-do Carmo [2]) .

M^2 を, 境界をもつ単連結コンパクトな曲面で, Gauss 曲率 K
 が, $K \leq K_0$ (K_0 : 定数) をみたすとする。この時, M の面積
 A が, $K_0 A < 4\pi$ をみたすなら, $\lambda_1(M) \geq \lambda_1(D)$ 。ここで, D
 は, 定曲率 K_0 の2次元 space form 中の geodesic ball of area
 A 。

3°) $\tilde{g}$ による断面曲率 $\tilde{K}$ の評価. $n = 3$ の時, 実際の計算により, $\tilde{K} \leq 1$ を得る. $G: M^2 \longrightarrow G_{2,n+1} = Q_{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ を generalized Gauss map とする. $\mathbb{CP}^n$ に, $\max\{\text{sectional curvature}\} = 2$ となるように計量を normalize し, Q_{n-1} での induced metric を ds^2 とすれば, $\tilde{g} = G^* ds^2$. 更に, G は, anti-hol. 故に, $n \geq 4$ の時, $\tilde{K} \leq 2$.

4°) 命題 (Barbosa - do Carmo [2]) D を $S^2(1)$ 上の geodesic ball とし, $A(D)$ を D の面積 ($> 2\pi$) とする. この時, $\lambda_1(D) \geq 2(4\pi - A(D))/A(D)$.

最後に, 2次元多様体の場合, $\lambda_{1\text{vol}}$ は, $g \mapsto \alpha g$ (α : 定数) なる計量の変換で不変であることに注意すると, 定理が得られる。

注意1 4°)の命題を, Barbosa - do Carmo [2]は, 等周不等式を用いて示した. ところが, 全く同じ評価式を, 適当な関数に Barta の定理を適用させることにより示すことができる. そして, Barta の定理を振り返ることにより, 定理(2)の定数 $\frac{4}{3}\pi$ が, "sharp" でないことがわかる。

注意2 この講究録の原稿を作成中に, 定理(2)の定数 $\frac{4}{3}\pi$ を, 1.4505π に置き換えてもよいことがわかった。

参 考 文 献

- [1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a minimal surface in $\mathbb{R}^3$, Amer. J. Math. 98 (1976), 515-528.
- [2] J. L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian, Math. Z. 173 (1980), 13-28.
- [3] C. Bandle, Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der Mathematischen Physik aus solchen der Geometrie, Comment Math. Helv. 46 (1971), 182-213.
- [4] J. Barta, Sur la vibration fondamentale d'une membrane C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 472-473.
- [5] D. Hoffman and R. Osserman, The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and $\mathbb{R}^n$, (preprint).
- [6] D. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, (preprint).
- [7] R. Osserman, Minimal surfaces, Gauss map, total curvature, eigenvalue estimates and stability, (preprint).
- [8] J. Peetre, A generalization of Courant's nodal domain theorem, Math. Scand. 5 (1957), 15-20.