

アソシエーションスキームを利用した 可移置換群の構成

宮本 泉 *

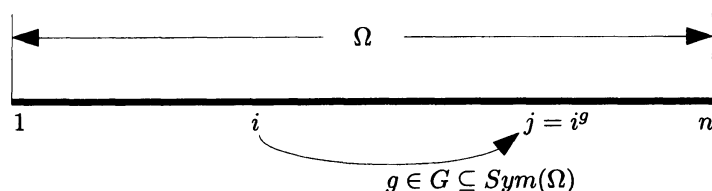
IZUMI MIYAMOTO

山梨大学

UNIVERSITY OF YAMANASHI

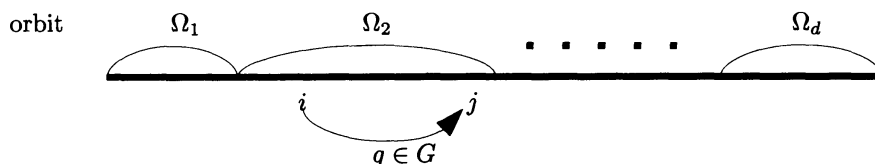
1 置換群

置換群 G : 対称群 $\text{Sym}(\Omega)$ の部分群、 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$



G : 可移 (transitive) $\iff$

Ω の任意の点 i, j に対して、 $i^g = j$ とする $g \in G$ が存在



1.1 同型と共役

n 次の置換群 G を含む同型類 $\iff$ 対称群 $\text{Sym}(n)$ による G の共役類 G の $h \in \text{Sym}(n)$ による共役 G^h

$$G^h = \{ h^{-1}gh \mid g \in G \}$$

G の H における正規化群 (Normalizer)

$$\text{Norm}(H, G) = \{ h \in H \mid G^h = G \}$$

正規化群計算、2つの部分群の共役判定：次数 n が小さくても計算が非常に困難な場合がある。

〈〈ここでの群の計算は、数式処理ソフトウェアパッケージ GAP を使用〉〉

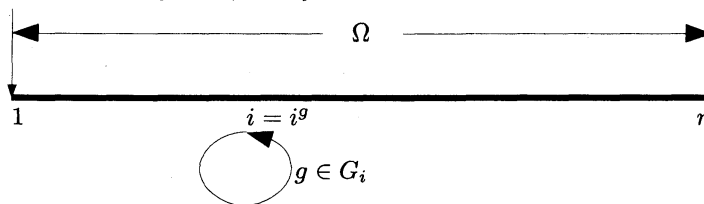
*imiyamoto1@gmail.com

1.2 置換群のデータ (*は Magma による)

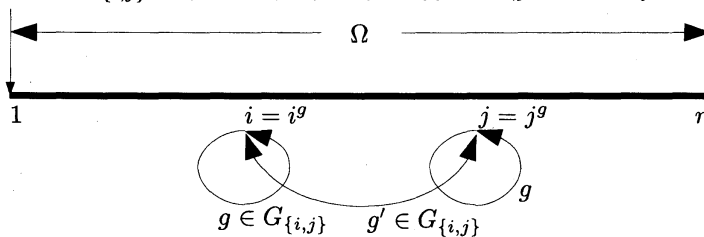
n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	(7)	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	(8)	8
30	5712	4
31	(12)	12
32	*2801324	7

1.3 固定部分群 (Stabilizer)

1 点固定部分群 $G_i = \{g \in G \mid i = i^g\}$



2 点固定部分群 $G_{\{i,j\}} = \{g \in G \mid \{i,j\} = \{i^g, j^g\}\}$, $G_{i,j} = G_i \cap G_j$

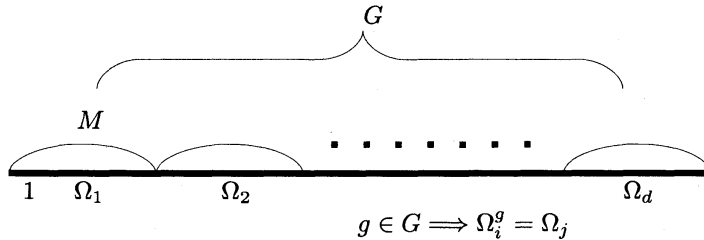


部分集合 Δ の固定部分群 $G_\Delta \dots$ (集合として、または、各点ごと)

原始的な群 (Primitive) $\iff$ 可移な群で、1 点固定部分群 G_1 が G の極大部分群

【注】可移な群では、すべての G_i は、互いに G の中で共役

Primitive ではない群 $\implies \exists M; G_1 \leq M \leq G$



$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_d\} : G$ のブロックシステム $\implies G \subseteq W = \text{Sym}(\Omega_1) \wr \text{Sym}(d)$ (WreathProduct)

$M = G$ における集合 Ω_1 の固定部分群

【注】素数次数の可移置換群は primitive

1.4 可移な群の分類の現状

Primitive な群の分類

GAP のデータ 2499 次まで ver4.7.2

Magma のデータ 4095 次まで ver2 19-2

可移な群の分類の現状

30 次以下：10 年以上前、確認に時間をかけている。Hulpke

32 次：Cannon-Holt 2008 年 12 月、確認 2011 年 (Magma のデータ)

32 次の個数が多すぎて、Magma の通常の組込みデータにはできない。

それで、分類はここで止まっている。(前の表の通り)

33、34、35 次は、これまでの方法で簡単であろう。36 次は、それなりに、、、。(→ 33, 34 次は“一応”昨年、35 次は今回)

分類に必要とされる関数は、GAP システムに組込まれている。これらを使って、分かり易く分類したい。
30 次以下の場合の確認も含めて。

→いろいろな場合わけした計算が必要となって、分かり易いとは言い難い。

2 計算方法：昨年と同様

アソシエーションスキーム

可移な群 G から構成されるアソシエーションスキーム A

$\implies G$ の $\Omega^2 = \{(i, j) | i, j \in \Omega\}$ への作用の orbit 全体

このときは、

A の自己同型群 $\text{Aut}(A) = \text{TwoClosure}(G)$ が成立

$\text{TwoClosure}(G) \iff$

The largest group $\subseteq \text{Sym}(n)$ which has the same orbits on Ω^2 as G has.

アソシエーションスキームの分類

次数 30 までと、32、33、34 は分類済 $\text{Aut}(A)$ の計算は簡単

35 次：2 つの場合、固定部分群 G_1 の orbit のサイズが、1, 4, 12, 18 と 1, 6, 12, 16 となる場合以外は分類可 ← これらの場合のみ、プログラムを修正して可移群を計算

計算方法：同じアソシエーションスキームを作る $G = \text{TwoClosure}(G)$ ごとに分類

G の可移な部分群 H で、 $G = \text{TwoClosure}(H)$ となるものをすべて生成

異なるアソシエーションスキームを作る群は、互いに同型にはならない。

今回の計算の主な改良点

- Complement

基本可換正規部分群 $E \triangleleft G$ に対して、Complement H の計算

$$G = EH, \quad E \cap H = \{1\} \text{ 単位元だけの群}$$

この H のなかから、上の条件を満たすものを求める。

- 部分群の同型判定

構成された群のなかから同型類の代表を選び出す。

3 計算方法の改良点

計算方法：改良点 Complement の計算

昨年：ComplementClasses(G, E) を使用

G が一般の群、とくに、非可解 (solvable でない) 群でも使用可

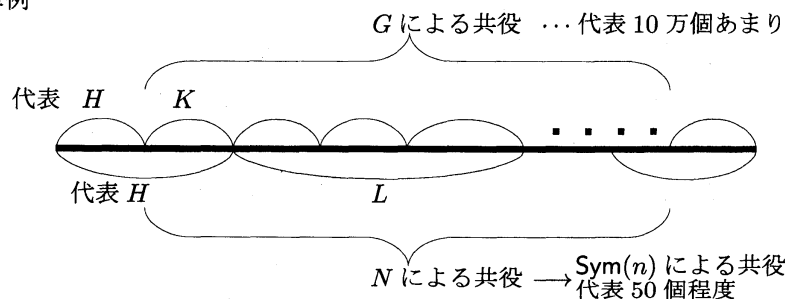
Complement H の G による G 中での共役類を計算

今回：ComplementClasses(N, G, E) も使用

G は可解、 $G \leq N$ (G は N の正規部分群)、 N も可解のとき

Complement H の N による G 中での共役類を計算

計算例



計算方法：改良点 Complement の計算

ComplementClasses の使用法

置換群 N を PcpGroup に、IsomorphismPcpGroup を使って変換

G, E は、その部分群として設定

【注】GAP のマニュアルには、PcpGroup の説明はほとんど無い？

群計算 最も簡単 PcpGroup(Poly Cyclic Group、特に、可解群)、

次が、置換群

IsomorphismPcpGroup：可解群を PcpGroup に変換

GAP の置換群：群を、部分群と設定して構成しなくても、部分群かどうかの判定が可能

(普通の考え方：いくつかの置換群を取扱うとき、適当な次数の対称群の中に、部分群として構成する。

→群の相互の関係が計算可能になる。)

計算方法：昨年 部分群の共役計算

群の適当な属性を調べて、得られた部分群全体を分割

→同型判定の対象となる群を制限元の個数 (位数) $|G|$ や、 G の Ω^3 への作用のパターンなどで分割を作成

TransitiveGroup(次数, 番号) GAP の置換群のデータ

TransitiveIdentification(G) → 番号

$\iff G$ は TransitiveGroup(n , 番号) と同型 (共役)

GAP が G のなんらかの属性をしらべて、同型判定をしていると考えられる。

→それなりの時間がかかる。

27 次の可移群は全部で、2 3 9 2 個

本プログラムで 27 次の可移群生成 100 分 TransitiveIdentification もすると 170 分
アソシエーションスキームの自己同型群の利用→

得られた群 H は、すべて同じアソシエーションスキームを作る。

共役は、アソシエーションスキームを構成する Ω^2 上の orbit を、全体として固定する自己同型群のなかで計算 (↔TwoClosure は各 orbit ごとに固定)

正規化群 $N = \text{Norm}(K, H)$ が、 K の大きな部分群になるとき

(↔ K の N による coset の個数が多いとき) $\leq 5000 \sim 50000(?)$

→ coset の代表 r のすべてを使って、 H の G のなかでの共役 H^r のすべてを列挙。部分群 L が、この H^r のなかに存在しなければ共役にはならない。

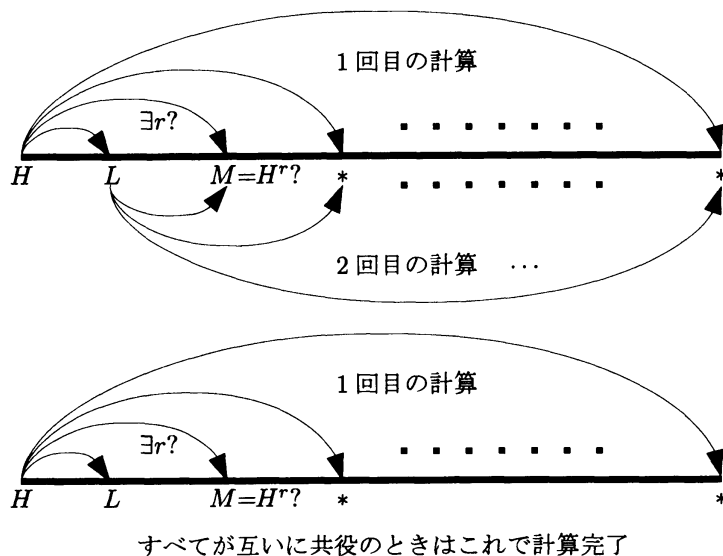
計算方法：改良点 部分群の共役計算

coset の代表 r のすべてを使って、 H の G のなかでの共役 H^r のすべてを列挙。ソートしておく。

構成された部分群全体もソートしておく。

この 2 つの部分群の列をマージして、一致する群を求める。→ H と共役となる群が得られる。

互いに共役かどうかの計算



部分群の属性：交換子群の系列 (DerivedSeries)

$$H \geq H' \geq H'' \geq \dots$$

(この系列の長さ、現れる群の位数を使って、分割を細分する。)

この系列の真ん中くらいの群 D を使う。

得られたすべての部分群 H にたいして、この群 D をリストアップして、その共役計算を行う。

利点

- D は H に比べて小さい。このことから、互いに共役となる D の個数が増えることも期待できる。
(→ D の共役計算は、すべてが共役の場合に近くなり計算が楽。)
- 共役でない D をもつ H 達は、互いに共役にならない。
⇔ 共役な H 達は、共役な D をもつ。

coset を利用した共役計算の改良

共役な D 達を、1つの D に共役をとって移す。

アソシエーションスキームの自己同型群を K 、 $N = \text{Norm}(K, H)$ とする。

→この D をもつ H 達の共役は、 $\text{Norm}(K, D) \leq K$ のなかで決まる。

【注】 $N = \text{Norm}(K, H) \leq \text{Norm}(K, D) \leq K$

$c = K$ の N による coset の個数

$c_1 = K$ の $\text{Norm}(K, D)$ による coset の個数

$c_2 = \text{Norm}(K, D)$ の N による coset の個数

$$\left. \begin{array}{l} c = K \text{ の } N \text{ による coset の個数} \\ c_1 = K \text{ の } \text{Norm}(K, D) \text{ による coset の個数} \\ c_2 = \text{Norm}(K, D) \text{ の } N \text{ による coset の個数} \end{array} \right\} \Rightarrow c = c_1 \times c_2$$

$c > 50000$ で、 H の共役計算に coset を使えない場合でも、 $c_1, c_2 \leq 5000$ となって、 D の共役を coset を使って計算してから、 H の共役も coset を使って計算することが期待できる。

4 計算結果

昨年

33 次 157 個 計算時間 12～3 分 最長計算時間 11 分

(報告集では修正済)

34 次 102 個 計算時間 3 分 最長計算時間 1.6 分

同じプログラムを、27、28、30 次で動かしているが、...

今回

33 次 162 個 計算時間 4 分余、最長計算時間 2 分

34 次 115 個 計算時間 10 分余、最長計算時間 4 分 (2 個)

35 次 405 個 計算時間 5 分

30 次以下の場合、本プログラムで可移置換群の分類を再確認

32 次の再確認では、...

32 次の可移群の確認

32 次のアソシエーションスキームの 1 つから構成される可移群の個数

スキーム	可移群	計算時間 (単位: 時間)	
as32[5471]	278,578 個	278.6	3つの部分に分けて計算 (個数最大)
as32[4505]	274,618 個	64.0	2つの部分に分けて計算
as32[6062]	223,344 個	56.9	
as32[3945]	212,891 個	73.9	
as32[4525]	158,755 個	46.4	
as32[7782]	151,879 個	37.6	
as32[8596]	124,093 個	30.7	
as32[4205]	105,319 個	20.3	
as32[6472]	91,298 個	21.9	
as32[5607]	68,822 個	16.5	

残り: アソシエーションスキーム 16 個 可移群 216,412 個

可移な群の計算結果 $n = 33, 34, 35$

n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7
33	162	4
34	115	2
35	405	6