

代数多様体上の Monge-Ampère 方程式

阪大・理 角田秀一郎

1. 序論. Yauによって解かれた Monge-Ampère 方程式は, コンパクト Kähler 多様体に関する多くの結果を導きました. ここでは, 標数正の代数多様体上に, Monge-Ampère 方程式を定義し, 特別な場合に解ける事を報告いたします. しかし, いまのところ, その結果から, 標数正の多様体に関する結果を得る段階まで達していませんので, それは今後の課題といえます.

Monge-Ampère 方程式に出てくる関数またその解が可微分関数(ここでは, 無限階微分可能の意)であった事を思い出していただければ, まず初めに, 標数正の代数多様体上に“可微分関数”に相当する概念を導入しなければならない事は, 明らかでしょう. もちろん, それは, 一意的ではありませんので, §2で, 動機づけを述べました. 充分とはいえませんが, 多かれりとも, 正当性を感じてもらえると思います.

2. 動機づけ. $V \in$ コンパクト Kähler 多様体, $g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum g_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j \in$ Kähler 形式とします. 次の方程式は, χ au の解いた Monge-Ampère 方程式の u とつです,

$$(*) \quad \det \left(g_{ij} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) = C \exp(F) \det(g_{ij}),$$

ここで, C は定数, F は与えられた可微分関数, φ が未知関数です. $V \in$ Kähler 多様体としていますので, g は局所的に可微分関数 h を使って, $g = \partial \bar{\partial} \log h$ と書けます. ここで, $\chi = \exp \varphi$, $G = C \exp F$ とおけば, $(*)$ は

$$(**) \quad \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log(h \cdot \chi) \right) = G \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log h \right),$$

となります. もちろん h は局所的にしか存在しませんが, 組み合わせに関する条件は容易に書き下すことができます.

この $(**)$ を見れば, “ $\det(\partial \bar{\partial} \log)$ ” という操作が, 定義されれば, この Monge-Ampère 方程式を, 標数正の代数多様体上で, 考えられるということがわかります.

さて, ここで, ざわめて天下りの的ではありますが, いくつかの正則関数の絶対値の二乗和で書ける関数に注目しましょう.

う。正確に言えば, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ と置き, $f_1, f_2, \dots, f_m$ を D 上の正則関数とします。ここで可微分関数

$\sum |f_i|^2$ を考えます, これに $\partial\bar{\partial} \log$ を作用させますと, 次の様になります,

$$\partial\bar{\partial} \log(\sum |f_i|^2) = (\sum |f_i|^2)^{-2} \left(\sum_{i,j} |f_i \frac{\partial f_j}{\partial z} - f_j \frac{\partial f_i}{\partial z}|^2 \right)$$

$$\cdot d\bar{z} \wedge dz.$$

つまり, $\partial\bar{\partial} \log$ という operator は二乗和の関数とその商をもっていくということがわかります。

そこで, 標数正の多様体上で, 正則関数の組を考え, それに対して, 上の $\partial\bar{\partial} \log$ を定義することが出来ます,

つまり

$$(f_1, \dots, f_m) \longmapsto \frac{(\dots, f_i \frac{\partial f_j}{\partial z} - f_j \frac{\partial f_i}{\partial z}, \dots)}{(f_1, \dots, f_m)^2}$$

とすればよいわけですが, もっとも, いまはまだ, 関数の組の二乗, 商といったものは定義されていませんが。

3. $\mathbb{C}$ -関数. $V \in k = \overline{\mathbb{F}_p}$ 上定義された非特異代数多様体
とします. 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ととり, $\mathcal{U}$ に附いて次の様

な対象を考えます. まず, $\mathcal{U}$ に関する前 B 関数 $(\{f_\alpha\}, \{\Xi_{\alpha\beta}\})$

とは (i) f_α は U_α 上の N_α 個の正則関数の組 $f_\alpha = (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_\alpha})$

(ii) $\Xi_{\alpha\beta}$ は $P_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}^*)$ と (N_α, N_β) -行列

$\Phi_{\alpha\beta} \in M_{N_\alpha, N_\beta}(k)$ の積

(iii) $f_{\alpha i} = \sum \Xi_{\alpha\beta ij} f_{\beta j}$.

この前 B 関数に同値関係を入れます.

$F = (\{f_\alpha\} = \{(f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_\alpha})\}, \{\Xi_{\alpha\beta}\})$,

$G = (\{g_\alpha\} = \{(g_{\alpha 1}, \dots, g_{\alpha M_\alpha})\}, \{\Psi_{\alpha\beta}\})$

を前 B 関数として, F と G が同値であるとは,

$\{P_\alpha\}, \{Q_\alpha\}$ が存在して,

i) $P_\alpha = \mu_\alpha P_\alpha, Q_\alpha = \nu_\alpha q_\alpha, \implies \mu_\alpha, \nu_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}^*)$

$P_\alpha \in M_{N_\alpha, M_\alpha}(k), q_\alpha \in M_{M_\alpha, N_\alpha}(k),$

ii) $f_{\alpha i} = \sum P_{\alpha ij} g_{\alpha j}, g_{\alpha i} = \sum Q_{\alpha ij} f_{\alpha j},$

iii) $\Xi_{\alpha\beta} P_\beta = P_\alpha \Xi_{\alpha\beta}, \Xi_{\alpha\beta} Q_\beta = Q_\alpha \Xi_{\alpha\beta}.$

この商集合を $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ と書き, $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ の元を $\mathcal{U}$ に關する B-関数と
呼びます. $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ には可換半群の構造が入ります.

$F = [(\{f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_\alpha}\}, \{\Xi_{\alpha\beta}\})]$

$G = [(\{g_{\alpha 1}, \dots, g_{\alpha M_\alpha}\}, \{\Psi_{\alpha\beta}\})]$

を B-関数として, $F \cdot G$ を次の H で求めます.

$$H := [\{ (h_{\alpha 11}, \dots, h_{\alpha N_\alpha 1_\alpha}) \}, \{ \theta_{\alpha\beta} \})],$$

ここで $h_{\alpha ij} = f_{\alpha i} g_{\alpha j}$, $\theta_{\alpha\beta}$ は $\Xi_{\alpha\beta}$ と $\Xi_{\alpha\beta}$ のクロネッカー積. 前B関数の定義の f_α を全部0としたものを0と書きます. ここで, 写像 $D: \mathcal{B}^*(\mathcal{U}) := \mathcal{B}(\mathcal{U}) - \{0\} \rightarrow$

$H'_{\mathcal{U}}(V, \mathcal{Q}^*)$ を次で定義します. $F \in \mathcal{B}$ -関数としたとき, F の定義にでてくる $\{\rho_{\alpha\beta}\} \in H'_{\mathcal{U}}(V, \mathcal{Q}^*)$ を対応させます. これは, F の代表元をとる方に依ります.

次に, $\eta \in H'_{\mathcal{U}}(V, \mathcal{Q}^*)$ に対して, $D^{-1}(\eta)$ に別の可換半群の構造が入ります. $D^{-1}(\eta)$ の元, F, G を取ります.

$$F = [\{ (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_\alpha}) \}, \{ \Xi_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} \}],$$

$$G = [\{ (g_{\alpha 1}, \dots, g_{\alpha N_\alpha}) \}, \{ \Xi_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} \}].$$

$\{\rho_{\alpha\beta}\}, \{\alpha_{\alpha\beta}\}$ は定義により, $\eta \in H'_{\mathcal{U}}(V, \mathcal{Q}^*)$ を定義しますので, 適当に代表元を交換することにより, $\rho_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta}$ としてよいことがわかります. これを改めて $\rho_{\alpha\beta}$ と書きます. このとき, $H = F + G$ と,

$$H = [\{ (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_\alpha}, g_{\alpha 1}, \dots, g_{\alpha N_\alpha}) \}, \left(\begin{array}{c} \Xi_{\alpha\beta}^0 \\ 0 \quad \Xi_{\alpha\beta} \end{array} \right) \}]$$

で定義します. この構造を和と呼びます.

さて, 通常のように, 開被覆に関する帰納的極限をとり, いままでの定義から1を除いたものを新しい定義とします. たとえば, $\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}(\mathcal{U})$ とおき, $\mathcal{B}$ の元をB関数といえます. このとき, 積, D , 和等について $\mathcal{B}$ に定義されます.

す, $B \times \mathbb{N}$ に同値関係を入れます, $(x, a), (y, b) \in B \times \mathbb{N}$ の元として, $(x, a) \sim (y, b) \iff \exists N > 0$
 s.t. $x^{Nb} = y^{Na}$.

$B' := B \times \mathbb{N} / \sim$ とします, つまり, 上の $\sim$ による商集合です, B' に積を入れたることを試みます:

$$[(x, a)] \cdot [(y, b)] = [(x^b y^a, ab)],$$

$K(B^*) \in B^* = B - \text{flow}$ の K -群 とします,

$\mathcal{C} := K(B^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおきます. $H'(V, \mathcal{O}^*)$ は群ですから, D は次のように積を入れます, (それをまた D と書く,)

$$D: K(B^*) \longrightarrow H'(V, \mathcal{O}^*)$$

$$D_{\mathbb{Q}}: \mathcal{C} \longrightarrow H'(V, \mathcal{O}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

$$D': B' \longrightarrow H'(V, \mathcal{O}^* \otimes \mathbb{Q})$$

これらの性質等は [2] を参照してください.

4. Monge - Ampere 方程式. 簡単のため, 次元を 1 とします. $V \in k = \overline{\mathbb{F}}_p$ 上定義された代数曲線として, V 上に Monge - Ampere 方程式を定義しましょう.

まず初めに, 写像 $R: B^* \longrightarrow B$ を定義します,

$$F = \{ (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_{\alpha}}), \{ \Xi_{\alpha \beta} = f_{\alpha \beta} \cdot \psi_{\alpha \beta} \} \} \in$$

$\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_{\alpha} \}$ に関する前 B 関数 とします, ただし, $\mathcal{U}$ は十分小さい開集合の被覆, $(z^{\alpha}) \in \mathcal{U}_{\alpha}$ 上の局所座標, $\{ \theta_{\alpha \beta} \} \in (z^{\alpha})$

に関する標準因子 K_V の変換関数とします, $l \in \mathbb{Z}$ 正整数で,
 $(ch(k), l) = 1$ とします, $\zeta \in 1$ の原始 l 乗根として,

l 個の正整数の組 $(i_1, \dots, i_l)$ ($1 \leq i_j \leq N_\alpha$) に対して,

$$r(f_{\alpha i_1}, \dots, f_{\alpha i_l}) := \sum \zeta^{k-1} f_{\alpha i_1} \dots \frac{d f_{\alpha i_l}}{d \zeta^\alpha} \dots f_{\alpha i_l}$$

とします.

このとき, $(\dots, r(f_{\alpha i_1}, \dots, f_{\alpha i_l}), \dots)$ を u に関する前 B 関数と定めることがわかります, これを $R(F)$ と書きます. $D(R(F)) = l D(F) + [K_V] \in H^1(V, \mathcal{O}^*)$ に注意しましょう. ところで, $dR(F) = F^{-l} \cdot R(F)$ とおきます, $dR: \mathcal{B}^* \rightarrow D^-([K_V]) \subseteq \mathcal{C}$ とわかります.

注意. 上の dR が $det(\partial \bar{\partial} \log)$ の類似物です.

定理 1 上の dR は l の取り方によらない.

さて, Monge - Ampère 方程式を定義しましょう.

$F \in \mathcal{C}$ s.t. $D(F) = 0$. $\omega \in \mathcal{B}'$ に対して, $\Delta \in \mathcal{B}'$ で,

$$(a) \quad dR(\Delta) = F \cdot dR(\omega)$$

を満たすものがあろうかというのが, Monge - Ampère 方程式です,

5 曲線上. $F \in \mathcal{B}'$ が ample というのを, F の定義
 関数: $(f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N_{\alpha}})$ を与え, U_{α} から $\mathbb{P}^{N_{\alpha}-1}$ への埋入を定
 めることを定義します.

次の定理 (a) の弱形を示すことができます.

定理2. C を非特異射影曲線, $H \in \mathcal{B}'$ の ample 元, r ,
 $K_C + D(H)$ が, $\mathbb{Q}$ -因子として ample とします,
 このとき, ω という ample 元が $\mathcal{B}'$ の中に存在して,
 $dR(\omega) \cdot H = \omega$.

6. Kähler 多様体. ニニまで, [2] の重複をさけるため, できるだけ記述を簡単にしてみました. ニニでは, [2] にはない, いわば, 真の目的のよるものを述べたいと思います. (おそらく何をやりたかったのかよくわからず, 読者の方も多いと思いますので)

V を射影代数多様体とします. ニニとき, 集合 $\{V\}$, 射影代数多様体への正則写像 (あるいは有理写像) } は, V 上の可逆層の大局切断と対応するニニは, よく知られています. ニニを $V \in \text{Kähler 多様体 (もう少しコンパクト)}$ に拡張するニニを考えます. もちろん, 射影代数多様体への正則写像 (有理写像) は同様ですので, Kähler 多様体への正則写像を記述することが問題となります.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \subset \mathbb{C}^* \subset \mathcal{O}_V^*$ と自然な包含関係により, 定数層 S^1 は $\mathcal{O}_V^*$ の部分層と思, 二者 $\mathcal{O}_V^*/S^1$ をとってやると;

命題. V をコンパクト Kähler 多様体とすれば,

$$H^1(V, \mathcal{O}_V^*/S^1) \cong H_{\mathbb{R}}^{1,1} := H^2(V, \mathbb{R}) \cap H^{1,1},$$

ニニで, $H^{1,1}$ は ホッジ分解の $(1,1)$ -成分.

を得ます.

$H^1(V, \mathcal{O}_V^*)$ は V の可逆層を表わしてゐた事に注意します. コンパクト Kähler 多様体に対して, $H^1(V, \mathcal{O}_V^*)$ は

自明かもしれませんが, $H^1(V, \mathcal{O}_V^*/S)$ は 少なくとも
Kähler 形式がありますから, 自明ではありません.

つまり, 初めに, $\theta \in H^1(V, \mathcal{O}_V^*/S)$ という変換関数が与
えられているわけで, それから, ある種の"層"を構成し, その
大層切断をつかって, Kähler 多様体への正則写像を構成し
ようというわけです. 実際のとこ, 上のような具合のよ
い対象は作れるかどうかは明らかではないのですが, 以下で
その候補を記述します. それが, 前述の B 関数と対応するも
のであることが, 定義から, わかると思います.

いまの所, 定義の中で, "不連続な" 正則関数が必要となる
ので, これが正しい定義かどうかはよくわかりません.

V を 複素多様体とします. V 上の $\mathcal{DC}$ -正則関数とは,

- (i) $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ 写像 であって,
- (ii) $D_1, \dots, D_r$ なる V の開集合が存在し, D_i たちは
互いに disjoint であって $V - (D_1 \cup \dots \cup D_r)$ は実解析集合
で,

(iii) $f|_{D_i}$ は 正則関数で, $f|_{D_i}$ は D_i の閉包の
近傍の正則関数に拡張でき,

$$(iv) \quad \forall p \in \mathbb{C}, \exists \{p_1, p_2, \dots\} \subseteq \bigcup D_i \quad \lim p_i = p$$

$$かつ \quad f(p) = \lim f(p_i)$$

を満たすものという.

たとえば, $V = \mathbb{C}$ として, $f(z) = z$ かつ $\text{Im } z \geq 0$ ならば, かつ $\text{Im } z < 0$ ならば $-z$ と定義すれば, f は $d\mathbb{C}$ -正則関数.

$\theta \in H^1(V, \mathcal{O}^*/S^1)$ の代表元 $\{\bar{\varphi}_{\alpha\beta}\}$ をとってきます, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ は V の充分小さい開被覆で, $\varphi_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O})$ で, $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ は $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}^*) \rightarrow \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}^*/S^1)$ の像を書きます. $\mathcal{U}$ を充分小さくしておけば,

命題. $\exists \varphi_{\alpha\beta} : d\mathbb{C}$ -正則関数 $\chi(U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上})$ のがあり,

$$\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\beta\gamma}$$

$$\text{かつ } |\varphi_{\alpha\beta}|^2 = \bar{\varphi}_{\alpha\beta}.$$

が成立します.

さて, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ について定義をします. H を $\mathcal{U}$ 空間として, $P(H)$ をその射影化とします. $\pi: H \rightarrow P(H)$ を標準写像として,

定義. $G \subseteq GL(H) = \{H \text{ の線型変換全体} \}$ (内積を保つとは限らない) の部分群とします. G が SDC であるとは, $\# \{g \in G \mid g(\overline{\pi^{-1}(K_1)}) \cap \overline{\pi^{-1}(K_2)} \neq \emptyset\} < \infty$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ について, K_1, K_2 は $P(H)$ のコンパクト集合.

さて, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ に関する前 B 関数を定義します.

$(\{f_\alpha\}, \{\varphi_{\alpha\beta}\})$ が前 B 関数であるとは,

(i) $f_\alpha = (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha N}, \dots)$ は U_α 上の $d\mathbb{C}$ -正則関

数

(ii) $\Xi_{\alpha\beta}$ は, $P_{\alpha\beta}$ ($U_\alpha \cap U_\beta$ 上の dC 正則関数で 零点を 持たず,かつ $|P_{\alpha\beta}|^2$ は C^∞ -関数) と, $\phi_{\alpha\beta}$ (複素数で成分 とする線型変換) の積で,

$$(iii) \quad f_\alpha = \sum \Xi_{\alpha\beta} \cdot f_\beta$$

(iv) $\forall p \in U_\alpha, \sum |f_\alpha(p)|^2 = \|f_\alpha(p)\|^2$ は有限で,

$p \mapsto \|f_\alpha(p)\|^2$ は C^∞ -関数で, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\|f_\alpha(p)\|^2 = |\Psi_{\alpha\beta}|^2 \|f_\beta\|^2,$$

==で, $\Psi_{\alpha\beta}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の dC 正則関数で 零点を もた ず $|\Psi_{\alpha\beta}|^2$ は C^∞ -関数,

(v) (iv) より, f_α は U_α から Hilbert 空間への写像と思 うことができる. W_α は f_α の 像で生成される部分線型空間 とすれば, $U_\alpha \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset, U_{\alpha_n} \cap U_{\alpha_{n-1}} \neq \emptyset, \dots, U_{\alpha_1} \cap U_\alpha \neq \emptyset$

なる $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\phi_{\alpha\alpha_n} \circ \phi_{\alpha_n\alpha_{n-1}} \dots$

と $\phi_{\alpha_1\alpha}$ は (iii) より, W_α の線型自己同型を誘導する.

==なる全体 $((\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots))$ も動かして) の下にある $GL(W_\alpha)$ の 部分群は SDC ,

(vi) $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots$ は互いに $\mathcal{F}$ に $\mathcal{F}$ し, 一斉に, dC - 正則関数の定義にある $D_1^{(\alpha)}, \dots, D_{r_\alpha}^{(\alpha)}$ を取る ==とべでき,

$$f_{\alpha_i} / D_j^{(\alpha)} := f_{ij} \text{ とおく.}$$

$p \in D_1^{(\alpha)}, \dots, D_m^{(\alpha)}$ かつ $p \notin D_{m+1}^{(\alpha)}, \dots, D_{r_\alpha}^{(\alpha)}$ として,

P の充分小さい近傍をとると、そこで、 $f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha m}$ は正則関数と思える、このとき、ある線型変換 (a_{ij}) があり、 $f_{\alpha k} = \sum_j a_{ij} f_{\alpha j}$ 、ここで (a_{ij}) は (k, l) とする。

(vi) (vi) の a で生成される、自己同型群は SDC 。

多少長くなりおいたが、これが前 B 関数の定義です、条件 (iv) より、 $\forall \alpha \|f_{\alpha}\|^2 \equiv 0$ でない限り、 $\{4_{\alpha\beta}\}$ は $H^1_u(V, \mathcal{O}_V^*)$ の元を定めます、これを D と書きます、前と同様に前 B 関数に同値関係を入れた、それを $\mathcal{B}(u)$ とおき、 $\mathcal{B}(u)$ の元を B -関数 (u に関する) といいます、

$D: \mathcal{B}^* \rightarrow H^1_u(V, \mathcal{O}_V^*)$ は前の通りです、開被覆についての極限をとり、 u を除いた記号を使います、たとえば、 $\mathcal{B} := \lim \mathcal{B}(u)$ 等。

そこで、 $F \in \mathcal{B}^*$ とし、

定義、 F が ample といふ、 $(f_{\alpha 1}, f_{\alpha 2}, \dots): U_{\alpha} \rightarrow P(H)$ が埋入になることをいふ。

$F \in \mathcal{B}^*$ に対して $B_S(F) := \{p \in U_{\alpha} \mid f_{\alpha i}(p) = 0\}$ 。

命題、 $F \in \mathcal{B}^*$ に対して、ある解析空間 W が存在して、写像 $f: V \rightarrow W$ が得られて、 $f|_{U_{\alpha}}: U_{\alpha} \rightarrow W$ は、 $(f_{\alpha 1}, f_{\alpha 2}, \dots)$ と同値。

したが、次の予想が基本的となります。

予想. V はコンパクト Kähler 多様体, $\theta \in H^1(V, \mathcal{O}^*/\mathcal{O})$ は Kähler cone の元とする. このとき, 前 B 関数 F で, (i) ample かつ (ii) $D(F) = \theta$ となるものが存在する.

これは, 1) の所一般には open ですが, 次は示すことができます.

命題 V を複素トーラスとすると, 予想は正しい.

証明は略しますが, $\mathbb{C}^N \xrightarrow{\pi} V$ を普通被覆とし, $U = \bigcup U_\alpha$ と V の小さい開被覆とし, $W_\alpha \subset \mathbb{C}^N$ の開集合で $\pi|_{W_\alpha}: W_\alpha \rightarrow U_\alpha$ が同型となるようにとり出す. $\mathbb{C}^N$ の座標を $(z_1, \dots, z_N)$ で入れば, Kähler 形式 $\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ に対して, U_α 上 $\|f_\alpha\|^2 = \exp(\sum |z_i|^2)$ となるように, $(f_{\alpha i})$ をきめておけば, B 関数を作ることもできます. 他も同様です.

B 関数の正当性を補足するために射影曲線の Enriques の Kähler 形式を見てみます.

$g_{\text{genus}} = 0, \mathbb{P}^1$ 上は $\frac{dz \wedge d\bar{z}}{1+|z|^2}$ これは非同次座標.

$g_{\text{genus}} = 1$ 楕円曲線は $dz \wedge d\bar{z}$ これは $\mathbb{C}$ の座標.

$g_{\text{genus}} \geq 2$ は $\frac{dz \wedge d\bar{z}}{1-|z|^2}$ $z=1$ で $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の座標.

これらすべて B-関数 への $\log$ という operation を施したものであることがわかります。正確に記述するとは複雑ですので、局所的に書きます。

$$g=0 \quad (1, z)$$

$$g=1 \quad (1, z, \dots, \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \dots)$$

$$g \geq 2 \quad (1, z, \dots, z^n, \dots)$$

となります。

B-関数には、前の g と同様に、 R, dR を定めることができ、Einstein Kähler 形式は ある B-関数 (F) への dR を作用させたものが、

$$dR(F) = F^a,$$

$$\text{==>} \quad a < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad g = 0$$

$$a = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad g = 1$$

$$a > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad g \geq 2.$$

となるものと定式化できます。

このように、ある切断をひとつずつ独立に考えるのではなく、組にして考えるという方は、将来重要と思われます。

6 附録. 1 の中にある様に, 正則関数の絶対値の二乗和
で表わせる C^∞ -関数は, $\log$ をとると, 多重対数関数にな
ります. もちろんこれは何となく自明ですが, 証明の仕方
を述べることにし, 次の事がわかります.

D を多重円板, $\mathcal{F} \subseteq C^\infty(D) = \{D \text{ 上の } C^\infty\text{-関数}\}$
を次で定義します.

- (i) $\mathcal{F}$ は 正則関数の絶対値関数を含み, かつ
 $f: D \text{ 上正則} \Rightarrow |f| \in \mathcal{F}$,
 次の性質をもつものが最小.
 - (ii) $f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow f+g \in \mathcal{F}$,
 - (iii) $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f^a \in \mathcal{F}, a \in \mathbb{R}_+$,
 - (iv) $\{f_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)\} \lim f_n \in C^\infty(D)$
 $\Rightarrow \lim f_n \in \mathcal{F}$.
- このとき, $\forall f \in \mathcal{F} (= \neq 1), \det \partial \bar{\partial} \log f =$
 $g/h, g, h \in \mathcal{F}$.

References

- [1] F. Bogomolov: On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class, Math. USSR Sbornik 22(1974), 580-583.
- [2] S. Tsunoda: Monge-Ampère equations on an algebraic variety with positive characteristic, to appear
- [3] S. T. Yau: On Calabi's conjecture and some results in algebraic geometry, Nat. Acad. Sci. U.S.A., 74, 1977, 1798-1799.