

Gerber–Shiu 測度のスケール関数による表示公式について

野場 啓, 矢野 孝次

京都大学大学院理学研究科

Kei Noba and Kouji Yano

Graduate School of Science, Kyoto University

1 序

実数値確率過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$, $q \geq 0$ および $x > 0$ に対して,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < \infty \right] = \int f(u, v) G_x^{(q)}(du \, dv) \quad (1.1)$$

で定まる $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ 上の測度 $G_x^{(q)}$ のことを **Gerber–Shiu 測度** という. ただし,

$$\tau_0^- := \inf\{t > 0 : X_t < 0\} \quad (1.2)$$

である. X を保険会社の準備金とみなしたとき, Gerber–Shiu 測度は保険会社の破産の深刻度を表しており, Gerber–Shiu [2] で導入された. 彼らは X を正のドリフトを持つ spectrally negative な複合 Poisson 過程としたときの Gerber–Shiu 測度を考えた. Biffis–Kyprianou [1] は一般の spectrally negative な Lévy 過程に対して, スケール関数を用いた Gerber–Shiu 測度の表示を与えた.

講演では, Noba–Yano [4] (see also [7] [8] [9]) をもとに, 一般化した屈折 Lévy 過程の定義とその脱出問題の表示について述べた. そこでは非有界変動な標本路を持つ spectrally negative な Lévy 過程について, 周遊測度に対する Gerber–Shiu 測度の類似物のスケール関数を用いた表示が重要な役割を果たした. なお, Spectrally negative な Lévy 過程に関する周遊理論の研究は, Pardo–Pérez–Rivero [5] [6] でも行われている.

本報告では, これらの Gerber–Shiu 測度のスケール関数を用いた表示公式について, 証明付きでまとめる.

2 Spectrally negative な Lévy 過程

$X = \{X_t : t \geq 0\}$ を, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ 上の spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. ただし $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ とする. X の natural filtration を $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ とする. X の Laplace 指数を

$$\psi(\lambda) := \log \mathbb{E}_0[e^{\lambda X_1}], \quad \lambda \geq 0 \quad (2.1)$$

で定義する. このとき Laplace 指数は,

$$\psi(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{\{x > -1\}}) \Pi(dx) \quad (2.2)$$

で与えられる. ただし, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ であり, Lévy 測度 Π は $\Pi[0, \infty) = 0$ および $\int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty$ を満たす. また逆 Laplace 指数を

$$\Phi(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = \theta\}, \quad \theta \geq 0 \quad (2.3)$$

で定義する. 任意の非負実数 $q \geq 0$ に対して, q -スケール関数 $W^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ が対応する. それは $(-\infty, 0)$ 上では $W^{(q)} = 0$ であり, $[0, \infty)$ 上では連続で, Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \beta > \Phi(q) \quad (2.4)$$

を満たす関数として定まる. スケール関数は以下の性質を持つことが知られている.

補題 2.1 (See, e.g., [3, Chapter 8]). $q \geq 0$ に対して,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{W^{(0)}(\epsilon)}{W^{(q)}(\epsilon)} = 1 \quad (2.5)$$

が成り立つ.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, 以下のように停止時刻を定義する:

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\}, \quad (2.6)$$

$$\tau_x^- = \inf\{t > 0 : X_t < x\}, \quad (2.7)$$

$$T_x = \inf\{t > 0 : X_t = x\}. \quad (2.8)$$

定理 2.2 (See, e.g., [3, Chapter 8]). $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ に対して,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right] = \frac{W^{(q)}(x-b)}{W^{(q)}(a-b)} \quad (2.9)$$

が成り立つ.

定理 2.3 (See, e.g., [3, Chapter 8]). $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ および非負可測関数 f に対して以下が成り立つ:

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_a^+ \wedge \tau_b^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right] = \int_b^a f(y) \left(\frac{W^{(q)}(x-b)}{W^{(q)}(a-b)} W^{(q)}(a-y) - W^{(q)}(x-y) \right) dy, \quad (2.10)$$

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_b^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right] = \int_b^\infty f(y) (e^{-\Phi(q)(y-b)} W^{(q)}(x-b) - W^{(q)}(x-y)) dy, \quad (2.11)$$

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right] = \int_{-\infty}^\infty f(y) (\Phi'(q) e^{-\Phi(q)(y-x)} - W^{(q)}(x-y)) dy. \quad (2.12)$$

数え上げ測度 N を次のように定義する:

$$N(A) = \#\{t > 0 : (t, X_t - X_{t-}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}((0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

このとき N は Poisson 点過程であり, 次の補正公式が成立する.

定理 2.4 (See, e.g., [3, Chapter 4]). $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ は以下を満たすとする:

- (i) $g(t, x, \omega)$ は $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ -可測関数である.
- (ii) $t \geq 0$ に対して, $g(t, \cdot, \cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_t$ -可測関数である.
- (iii) 確率 1 で $x \in \mathbb{R}$ に対して, $g(\cdot, x, \omega)$ は左連続な関数である.

このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_x \left[\int_{(0, \infty) \times \mathbb{R}} g(t, y, \omega) N(dt \times dy) \right] = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} g(t, y, \omega) \Pi(dy) \right]. \quad (2.14)$$

3 Gerber-Shiu 測度

スケール関数, Lévy 測度および逆 Laplace 指数を用いて, Gerber-Shiu 測度の $\underline{X}_{\tau_0^-}$ を含む一般化が次のように表されることが知られている.

定理 3.1 ([1]; See also [3, Chapter 10]). $q \geq 0$, $x > 0$ および非負可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^-}, \underline{X}_{\tau_0^-}) : \tau_0^- < T_0 \right] = \int f(u, v, y) H_x^{(q)}(du \, dv \, dy) \quad (3.1)$$

が成り立つ. ただし, $H_x^{(q)}$ は $(-\infty, 0) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$H_x^{(q)}(du \, dv \, dy) = 1_{\{v \geq y\}} e^{-\Phi(q)(v-y)} (W^{(q)'}(x-y) - \Phi(q)W^{(q)}(x-y)) \Pi(du - v) dy dv. \quad (3.2)$$

本報告では $\underline{X}_{\tau_0^-}$ を含まない公式に着目し, 定理 3.1 を用いない簡単な証明を与える.

定理 3.2. $q \geq 0$, $x > 0$ および非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^-}) : \tau_0^- < T_0 \right] = \int f(u, v) G_x^{(q)}(du \, dv). \quad (3.3)$$

ただし, $G_x^{(q)}$ は $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$G_x^{(q)}(du \, dv) = (e^{-\Phi(q)v} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-v)) \Pi(du - v) dv. \quad (3.4)$$

証明. f が連続関数の場合に証明すれば十分である. f が連続関数のとき,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^-}) : \tau_0^- < T_0 \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_{(0,\infty) \times (-\infty,0)} e^{-qt} f(X_t, X_{t-}) 1_{\{X_{t-} > 0, X_t < 0\}} N(dt dy) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= \mathbb{E}_x \left[\int_{(0,\infty) \times (-\infty,0)} e^{-qt} f(X_{t-} + y, X_{t-}) 1_{\{X_{t-} > 0, X_{t-} + y < 0\}} N(dt dy) \right] \quad (3.6)$$

が成り立つ. 定理 2.4 より,

$$(3.6) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty dt \int_{(-\infty,0)} e^{-qt} f(X_{t-} + y, X_{t-}) 1_{\{X_{t-} > 0, X_{t-} + y < 0\}} \Pi(dy) \right] \quad (3.7)$$

$$= \int_{(-\infty,0)} \Pi(dy) \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t + y, X_t) 1_{\{X_t > 0, X_t + y < 0\}} dt \right] \quad (3.8)$$

$$= \int_{(-\infty,0)} \Pi(dy) \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t + y, X_t) 1_{\{X_t < -y\}} dt \right] \quad (3.9)$$

が成り立つ. (2.11) より,

$$(3.9) = \int_{(-\infty,0)} \Pi(dy) \int_0^{-y} f(v + y, v) (e^{-\Phi(q)v} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x - v)) dv \quad (3.10)$$

となり, (3.3) が得られた. $\square$

注 3.3. 標本路がジャンプで 0 未満に到達するのではなく, 連続的に 0 未満に到達する場合において, 以下の等式が成り立つことが知られている (see, e.g., [3, Chapter 10]):

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^-}) : \tau_0^- = T_0 \right] = \frac{\sigma^2}{2} (W^{(q)'}(x) - \Phi(q)W^{(q)}(x)) f(0, 0). \quad (3.11)$$

4 周遊測度における Gerber-Shiu 測度

X は非有界変動な標本路を持つ, つまり $\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge |x|) \Pi(dx) = \infty$ もしくは $\sigma > 0$ を満たすものとする. このとき, X において原点は自分自身に対して正則であり, 次の意味で正規化された 0 のまわりの周遊測度 n を持つ:

$$n[1 - e^{-qT_0}] = \frac{1}{\Phi'(q)}, \quad q > 0. \quad (4.1)$$

また, 周遊理論の一般論より, $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対して次の式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right] = \frac{n \left[\int_0^{T_0} e^{-qt} f(X_t) dt \right]}{n[1 - e^{-qT_0}]}. \quad (4.2)$$

定理 4.1 ([4]). $q \geq 0, a > 0$ および非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$n[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty] = \frac{1}{W^{(q)}(a)}, \quad (4.3)$$

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = \int_0^\infty f(y) e^{-\Phi(q)y} dy. \quad (4.4)$$

証明. i) $q \geq 0$ と $a > 0$ に対して,

$$c(q, a) := W^{(q)}(a) n[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty] \quad (4.5)$$

が q, a によらない定数であることを示す. 単調収束定理, 強 Markov 性, 補題 2.1 および定理 2.2 より,

$$\frac{n[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty]}{n[\tau_a^+ < \infty]} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{n[e^{-q\tau_\epsilon^+} (e^{-q\tau_a^+} 1_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty]}{n[e^{-q\tau_\epsilon^+} (1_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty]} \quad (4.6)$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{n[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty] \mathbb{E}_\epsilon[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_0^-]}{n[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty] \mathbb{E}_\epsilon[\tau_a^+ < \tau_0^-]} \quad (4.7)$$

$$= \frac{W^{(0)}(a)}{W^{(q)}(a)} \quad (4.8)$$

となるから, $c(q, a) = c(0, a)$ が成り立つ. また, $0 < a_1 < a_2$ に対して, 強 Markov 性と定理 2.2 より,

$$\frac{n[\tau_{a_2}^+ < \infty]}{n[\tau_{a_1}^+ < \infty]} = \frac{n[(1_{\{\tau_{a_2}^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}) \circ \theta_{\tau_{a_1}^+} : \tau_{a_1}^+ < \infty]}{n[\tau_{a_1}^+ < \infty]} = \mathbb{E}_{a_1}[\tau_{a_2}^+ < \tau_0^-] = \frac{W^{(0)}(a_1)}{W^{(0)}(a_2)} \quad (4.9)$$

となるから, $c(0, a_1) = c(0, a_2)$ が成り立つ. よって, $c = c(q, a)$ は q, a によらない.

ii) $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対して,

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = c \int_0^\infty f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \quad (4.10)$$

が成り立つことを示す. 単調収束定理と強 Markov 性より,

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+} \left(\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) 1_{\{X_t > \epsilon\}} dt\right) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \quad (4.11)$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty] \mathbb{E}_\epsilon\left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) 1_{\{X_t > \epsilon\}} dt\right] \quad (4.12)$$

が成り立つ. *i*), (2.11) および単調収束定理より,

$$(4.12) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{c}{W^{(q)}(\epsilon)} \int_{\epsilon}^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} W^{(q)}(\epsilon) dy \quad (4.13)$$

$$= c \int_0^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \quad (4.14)$$

が成り立つ. よって, (4.10) が得られた.

iii) $c = 1$ を示す. (4.1), (4.2) および *ii*) より, $x < 0$ で $f(x) = 0$ となる非負可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{\infty} e^{-qt} f(X_t) dt \right] = \frac{n \left[\int_0^{T_0} e^{-qt} f(X_t) dt \right]}{n[1 - e^{-qT_0}]} \quad (4.15)$$

$$= \Phi'(q)n \left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right] \quad (4.16)$$

$$= \Phi'(q)c \int_0^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \quad (4.17)$$

が成り立つ. (2.12) と比べることにより, $c = 1$ であることがわかる. $\square$

定理 4.2 ([4]). $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$n \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0 \right] = \int f(u, v) K^{(q)}(du, dv). \quad (4.18)$$

ただし, $K^{(q)}$ は $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$K^{(q)}(du, dv) = e^{-\Phi(q)v} \Pi(du - v) dv. \quad (4.19)$$

証明. 単調収束定理と強 Markov 性より,

$$\begin{aligned} & n \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n \left[e^{-q\tau_{\epsilon}^+} \left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) 1_{\{\tau_0^- < T_0\}} 1_{\{X_{\tau_0^- -} > \epsilon\}} \right) \circ \theta_{\tau_{\epsilon}^+} : \tau_{\epsilon}^+ < \infty \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n \left[e^{-q\tau_{\epsilon}^+} : \tau_{\epsilon}^+ < \infty \right] \mathbb{E}_{\epsilon} \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0, X_{\tau_0^- -} > \epsilon \right] \quad (4.21)$$

が成り立つ. 定理 4.1, 定理 3.2 および単調収束定理より,

$$(4.21) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{W^{(q)}(\epsilon)} \int f(u, v) e^{-\Phi(q)v} W^{(q)}(\epsilon) 1_{\{v > \epsilon\}} \Pi(du - v) dv \quad (4.22)$$

$$= \int f(u, v) e^{-\Phi(q)v} \Pi(du - v) dv \quad (4.23)$$

が成り立ち, (4.18) が得られた. $\square$

参考文献

- [1] E. Biffis and A. E. Kyprianou. A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes. *Insurance Math. Econom.* 46 (2010), no. 1, 85–91.
- [2] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance Math. Econom.* 21 (1997), no. 2, 129–137.
- [3] A. E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures.* Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.
- [4] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.
- [5] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. The excursion measure away from zero for spectrally negative Lévy processes. arXiv:1507.05225, July 2015.
- [6] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. Lévy insurance risk processes with parisian type severity of debt. arXiv:1507.07255, July 2015.
- [7] 野場啓. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 第 8 回白浜研究集会報告集, to appear.
- [8] 野場啓, 矢野孝次. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (20), 共同研究レポート 352, 118–126, 2016.
- [9] 野場啓, 矢野孝次. 一般化屈折 Lévy 過程の屈折複合 Poisson 過程による近似. 第 13 回城崎新人セミナー報告集, 87–91, 2016.