

エントロピー減衰とアトラクターの構造

日本大学理工学部物理学科

柳田達雄

日本大学理工学部原子力研究所

島田一平

エントロピー減衰 [1] は多くのカオス力学系に対し指数関数的減衰を示す。一方、 n サイトエントロピー $H(n)$ を考えると、Feigenbaum 固定点で $\log$ 的発散を示す。これは、エントロピー減衰で言えば、べき減衰である。このように、エントロピー減衰によって、Kolmogorov-Sinai エントロピー (K.S.E.) では見られない力学系の確率構造の違いを見ることができる。K.S.E. は Lyapunov 指数、すなわち、長時間にわたる軌道の平均拡大率に等しいという意味で、アトラクターの構造と密接に結びついていた。そのことから Shannon の言う意味での情報が、力学系の軌道の不安定性によってつくり出されていると理解できた。エントロピー減衰 $g(n)$ は力学系のつくり出す信号 (文字列) について K.S.E. にはないより多くの構造を表現している。しかしながら、エントロピー減衰 $g(n)$ の構造が力学系の動的な構造のどの部分で生成されているかについては必ずしも明らかでない。そこで、アトラクターの構造を表す $L(n)$ (有限時間に対する平均軌道拡大率) を考えると、Feigenbaum 固定点で n サイトエントロピーと同様に $\log$ 的発散をする。さらに、 $L(n)$ には Feigenbaum 固定点の特徴である繰り返し構造も含まれている。このように、エントロピー減衰とアトラクターの構造が密接に結び付いていることが解った。このアトラクターの確率構造と幾何構造の関係を理解するための試みを報告する。

1 エントロピー減衰とその減衰構造

カオスの重要な性質として符号化が可能ながことが上げられる。符号化とは、状態空間に観測装置を導入することである。状態空間 V を有限個の部分集合で覆う $V = \bigcup_{i=1}^m v_i$ 。系の状態がある部分集合の中にあれば、その部

分集合の符号 (部分集合につけた名前) を表示する。系をある時間間隔 dt で観測すると、 dt おきに符号 $\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots$ が発生される。ここで σ_n は分割した部分集合の名前 $\sigma_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ である。この符号化により、力学系は符号を生成する情報源とみることができる。

最もプリミティブなカオスである Bernoulli 系では、2 値で符号化することができる。ここで符号化できるとは、長く符号列を観測すればするほど (観測を繰り返せば)、より精度よく系の初期点を決定することができるということである。

次に、符号を n 個観測したときの結合確率を

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (1)$$

と表せば、 n サイトのエントロピーは

$$H(n) = - \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \log[P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)] \quad (2)$$

で定義される。 n サイトエントロピーは、 n の増加にともない増加する (非減少関数)。そして、 σ_1 と σ_n が確率的に独立になると、 n サイトエントロピー $H(n)$ は n に対して線形に増加し、エントロピーは extensive となる。

例えば、Bernoulli 系では、個々の符号は確率的に独立であるから (コイン・トッシングと同等)、 n サイト・エントロピーは線形に増加する ($H(n) = n \log 2$)。また、Markov 過程では、 $H(n)$ は $n \geq 2$ で n に対し線形に増加する。このとき $H(n)$ の増加率が Kolmogorov-Sinai・エントロピー (K.S.E.) となる。[2]

$$K.S.E. = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n)/n \quad (3)$$

いままでは、K.S.E. により力学系の性質が調べられてきた。しかし、このような定常量では、とらえられない性質を調べるため、K.S.E. への収束の仕方を見る。(eq 3) には $(1/n)$ の項が含まれており収束を見るのに適していない。そこで $H(n)$ の階差

$$g(n) = H(n+1) - H(n) \quad (4)$$

の収束の仕方を見る。簡単な計算により、これは条件付きエントロピー

$$g(n) = - \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} P(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \times \sum_{\sigma_{n+1}} \frac{P(\sigma_{n+1} \cap \sigma_1, \dots, \sigma_n)}{P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \log \left[\frac{P(\sigma_{n+1} \cap \sigma_1, \dots, \sigma_n)}{P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right] \quad (5)$$

となることがわかる。条件付きエントロピーは、 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ までの符号を知ったとき、 σ_{n+1} の不確定性を表す量である。これもまた、K.S.E. に収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = K.S.E.$$

我々は $g(n)$ の減衰の仕方を見ることによってカオスを特徴づけることができた。[1] すなわち、減衰の仕方により、Markov 過程として近似可能な系と不可能な系に分類することができた。また、Grassberger 等 [3] はエントロピー減衰の漸近的振舞いを “Complexity” として導入し議論している。

しかし、このようなエントロピー減衰の漸近的振舞いだけではなく、我々は減衰の仕方そのものに着目する。この減衰の仕方には漸近的な振舞いではみられない詳しい情報（構造）が含まれている。特に、エントロピー減衰のこの構造は、Feigenbaum 固定点や準周期運動の臨界点で顕著に現れる。この減衰構造とは、臨界点での特徴を表す階段構造であり、Feigenbaum 固定点では、 2^n 分岐の反映がみられ (fig 1)、階段のステップが 2 倍ずつ長くなり、各ステップ間隔は $1/2$ ずつ狭まっていく。また、準周期運動では、回転数の連分数展開に関連した階段構造が現れる。特に、回転数が黄金比 ($W = (\sqrt{5} - 1)/2$) の場合には Fibonacci 数列的構造が現れ (fig 2)、各ステップが Fibonacci 数列で長くなっていき、ステップ間隔は Fibonacci 数列の逆で狭まっていく。

さらに、周期運動の場合にも分岐や回転数に関連した構造がみられる。黄金比は以下のように Fibonacci 数列 ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = 1, F_1 = 1$) の極限として表すことができる。

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} \quad (6)$$

そこで、回転数が黄金比である準周期運動を、回転数が $W = F_n/F_{n+1}$ の周期解で近似し n を大きくすることにより、逐次黄金比に近づけていくことができる。このように、逐次近似精度をあげていくと、階段構造の成長がみられる。(fig 3)-(fig 5)

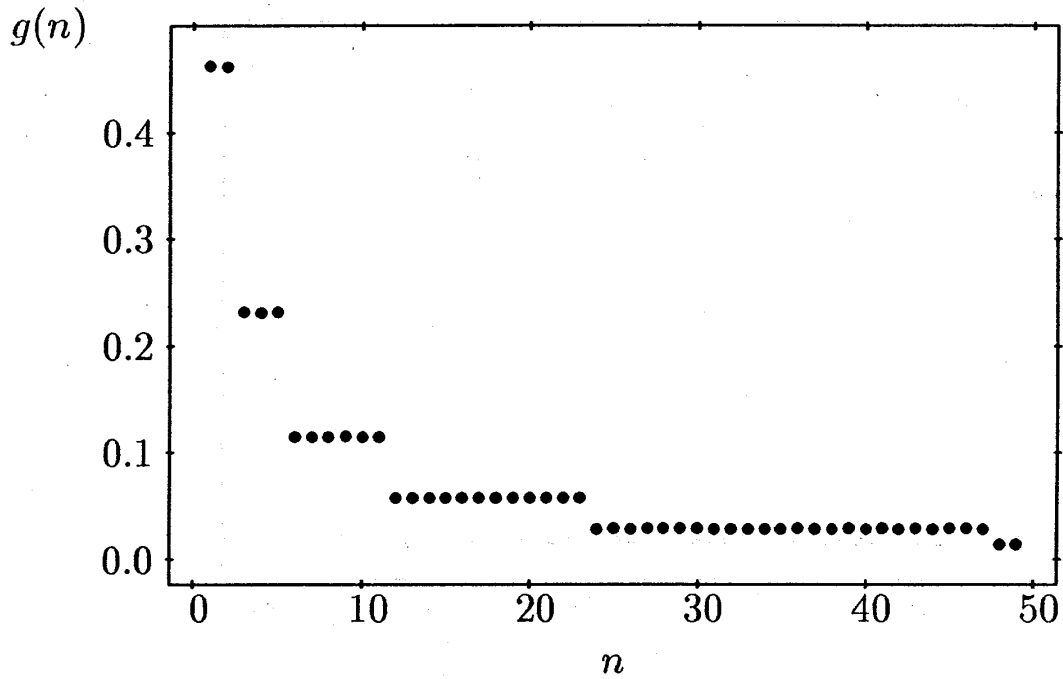


図 1: Logistic 写像のエントロピー減衰

Feigenbaum 臨界点で 2^n 的階段構造が現れる。階段のステップの長さが 2 倍に増加し、各ステップ間隔は $1/2$ 倍に狭まっていく。

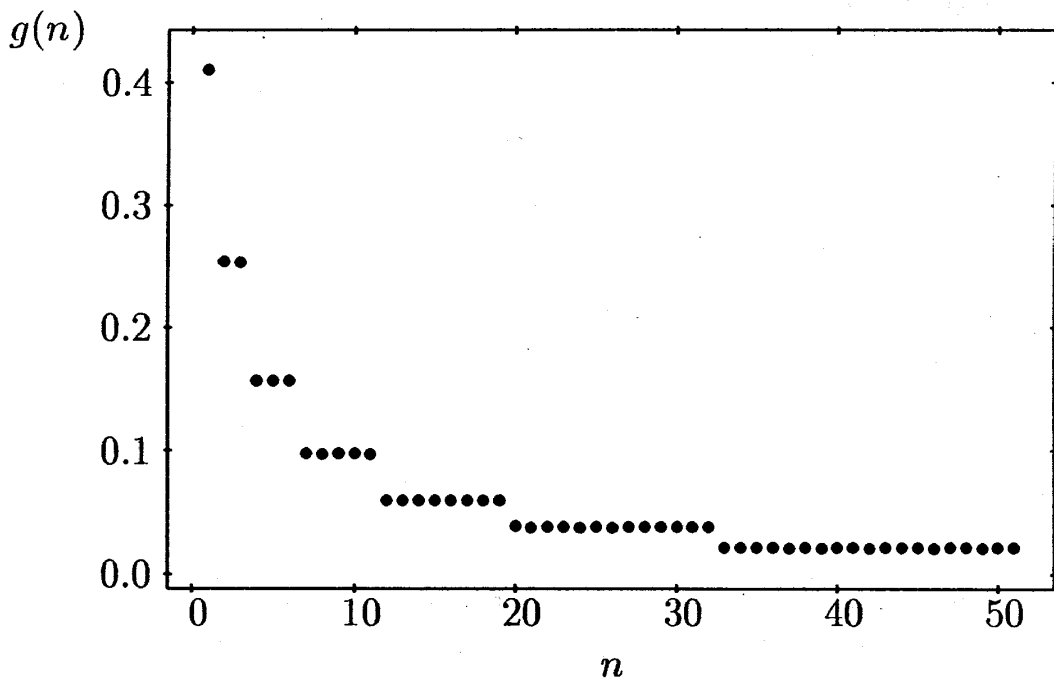


図 2: Circle 写像のエントロピー減衰

回転数が黄金比の場合、黄金比の連分数展開に関連した Fibonacci 的階段構造がみられる。各ステップの長さが Fibonacci 数列で長くなり、ステップ間隔は Fibonacci 数列の逆で狭くなる。

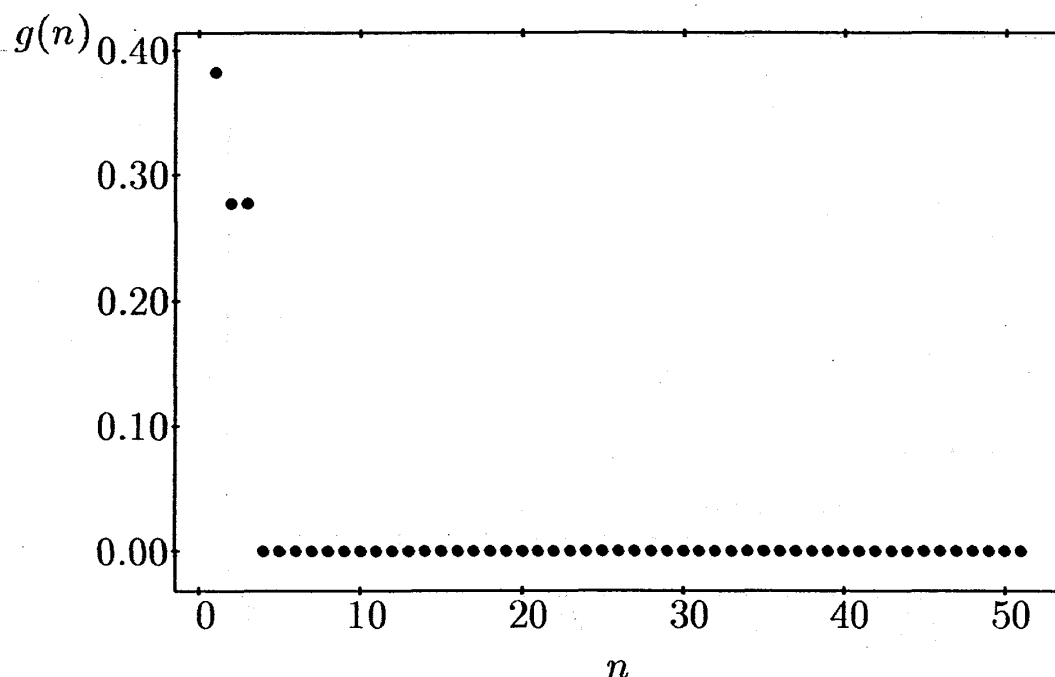


図 3: Circle 写像のエントロピー減衰 $W = F_2/F_3$

Circle 写像の周期運動のエントロピー減衰。回転数 $W = 2/3$ の連分数展開に関係した構造がみられる。この階段構造は、回転数を黄金比への近づけていくにつれ成長していく。(fig 4)-(fig 5)

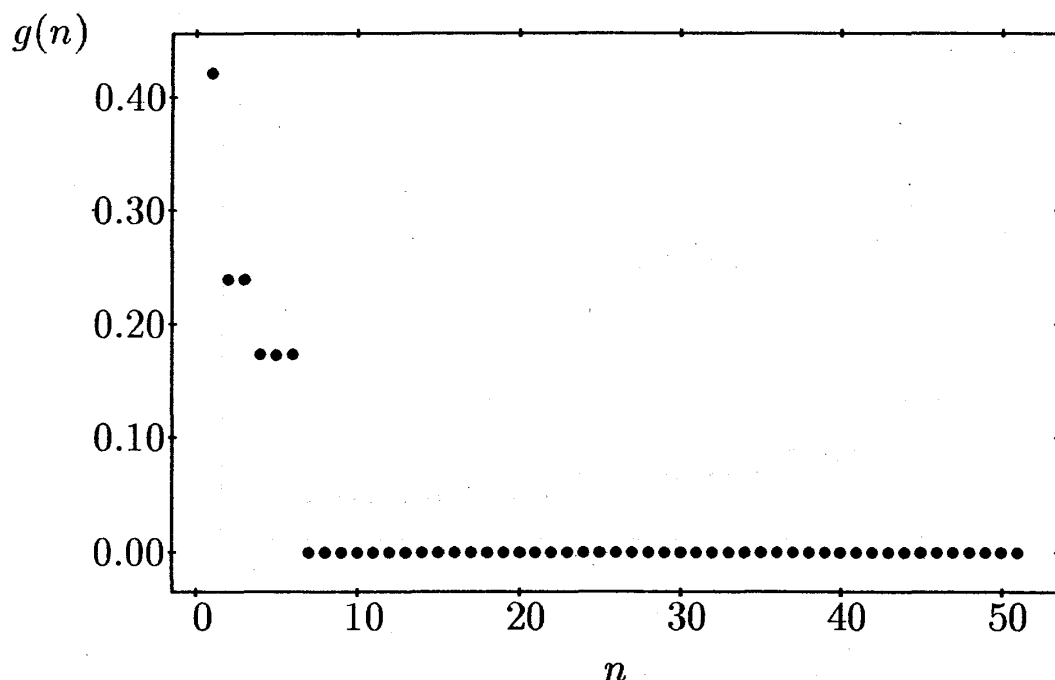


図 4: Circle 写像のエントロピー減衰 $W = F_3/F_4$

Circle 写像の周期運動のエントロピー減衰。回転数 $W = 3/5$ の連分数展開に関係した構造がみられる。

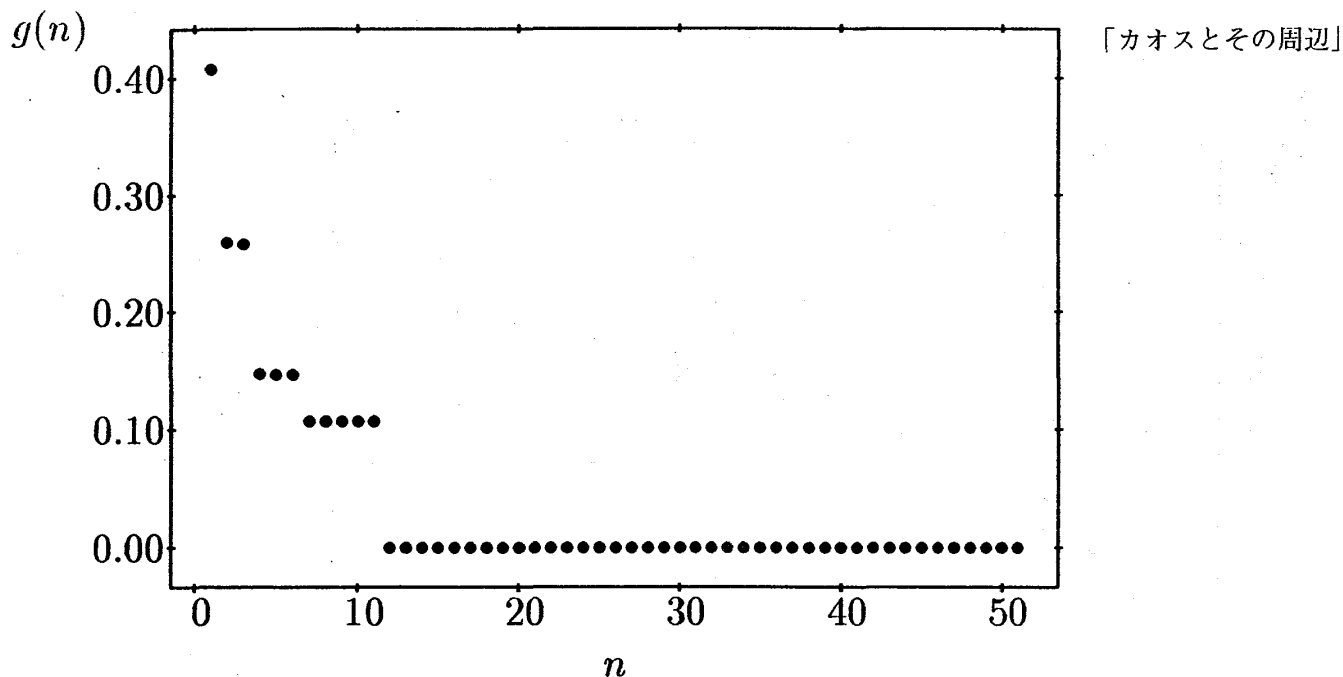


図 5: Circle 写像のエントロピー減衰 $W = F_4/F_5$

Circle 写像の周期運動のエントロピー減衰。回転数 $W = 5/8$ の連分数展開に係した構造がみられる。

これらの臨界点での振舞いは、K.S.E. をみていたのでは周期運動と区別することができない（ともに $K.S.E.=0$ ）。さらに、このような臨界点で、 n サイト・エントロピー $H(n)$ は $\log$ 的に発散する。(fig 6) このように、 n サイト・エントロピー $H(n)$ で n に対し 1 次より低次の発散を見ることができる。

2 減衰構造とアトラクターの構造

力学系を符号化することにより、力学系は情報源と考えることができた。さらに、K.S.E. と軌道不安定性を表す Lyapunov 指数には、ある条件のもとで

$$K.S.E. = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (7)$$

なる関係があった [4]。ここで、 λ_i は Lyapunov 指数で

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\|T^{n-1} \dots T^0 \delta \vec{x}\|}{\|\delta \vec{x}\|} \quad (8)$$

$\delta \vec{x}$: tangent vector T^n : tangent map

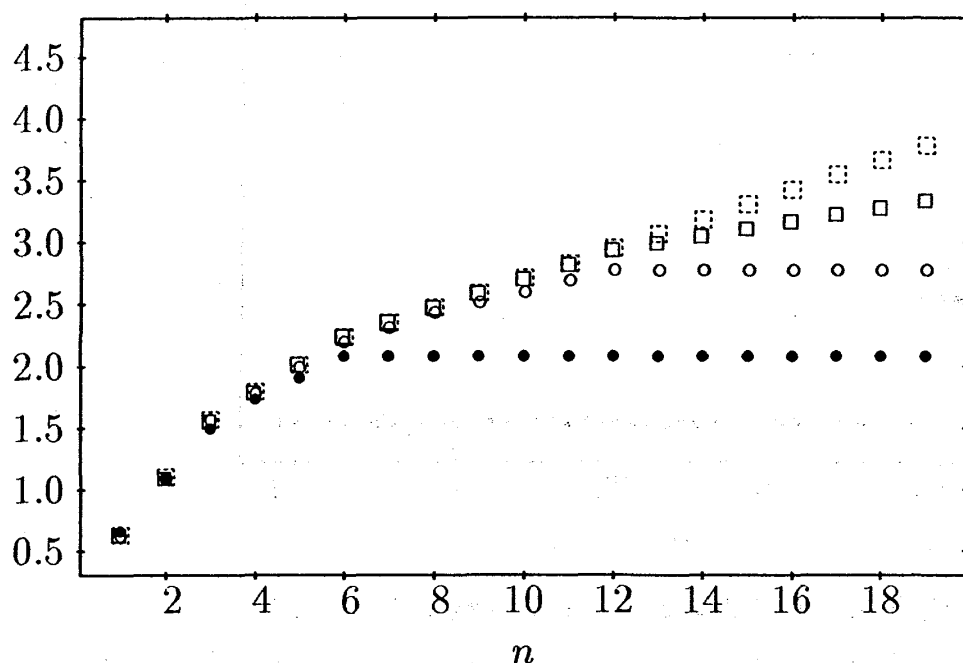
$H(n)$ 

図 6: Logistic 写像のサイト・エントロピー

n サイト・エントロピーは Feigenbaum 臨界点で $\log$ 的発散を示す (□)。周期運動では、その周期以上のサイトエントロピーは一定となる (○, ●)。カオス状態では、漸近的傾きが Kolmogorov-Sinai・エントロピーとなる (⊙)。

である。この関係から、K.S.E. を力学系が生成した Shannon の情報量と考えれば、情報は軌道不安定性により作り出されていると理解することができる。しかし、エントロピー減衰の減衰構造が、アトラクターのどのような構造の反映であるのか明らかではない。この両者の関係を理解するため、アトラクターの構造を反映する量を導入する。この際、エントロピー減衰 $g(n)$ はすべての n に対して統計量であるので、アトラクターの構造を見る量にもなんらかの統計的操作をする必要がある。そこで、以下のような局所的平均軌道拡大率を考え両者の対応を見る。

$$L(n) = \log \left\langle \frac{\|T^{n-1} \dots T^0 \delta \vec{x}\|}{\|\delta \vec{x}\|} \right\rangle_{time av.} \quad (9)$$

特に、エントロピー減衰の構造が豊かに現れた Feigenbaum 固定点や回転数が黄金比の準周期運動などの臨界点において、局所的平均軌道拡大率 $L(n)$ の振舞いをみる。エントロピー減衰でみられた階段構造は、 $L(n)$ では反復構造として現れる。(fig 7), (fig 8)

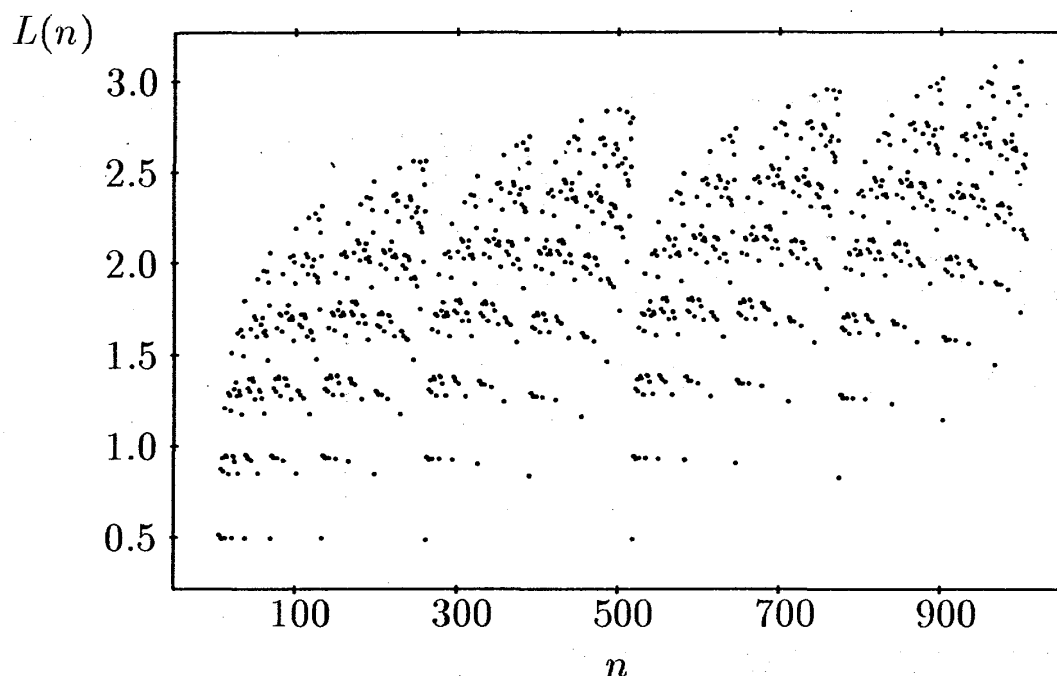


図 7: Logistic 写像の局所平均軌道拡大率

Feigenbaum 固定点で $L(n)$ は Log 的発散を示す。さらに、エントロピー減衰の階段構造に対応している反復構造がみられる。この反復構造は 2^n の繰り返し運動である。

これらの反復構造もまた、エントロピー減衰でみた階段構造と同様に、Feigenbaum 固定点では、 2^n 分岐の反映が、回転数が黄金比の準周期運動では、Fibonacci 的構造が現れる。このように、K.S.E. が Lyapunov 指数と関係していたように、エントロピー減衰 $g(n)$ は局所平均軌道拡大率 $L(n)$ に対応している。

3 まとめ

Kolmogorov-Sinai エントロピー (K.S.E.) だけではとらえられない性質を、エントロピー減衰 $g(n)$ により特徴づけることができた。エントロピー減衰の仕方により、Markov 過程として近似することができる系と、できない系に分類することができた。さらに、K.S.E. が 0 である系でも、周期運動とことなり n サイト・エントロピー $H(n)$ が Log 的発散をする系がある。このような発散は、Feigenbaum 固定点や準周期運動でみられた。さらに、エントロピー減衰には、アトラクターの構造を反映する減衰構造がみられる。この構造とは、Feigenbaum 固定点では 2^n 階段構造として現れ (fig 1)、準周期運動では、回転数の連分数展開に関する階段構造が現れる。特に、回

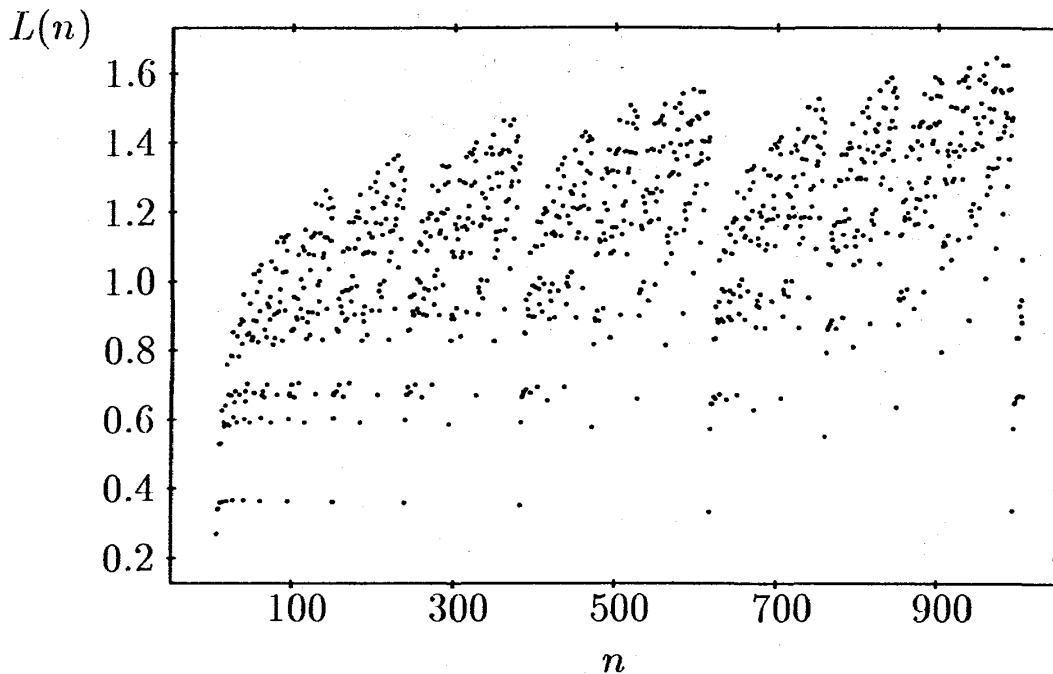


図 8: Circle 写像の局所平均軌道拡大率

写像の周期運動のエントロピー減衰。回転数 $W = (\sqrt{5} - 1)/2$ 回転数の連分数展開に関連した構造がみられる。すなわち、Fibonacci 数列に関連した反復構造がある。

転数が黄金比の場合には、Fibonacci 数列の構造が現れる。(fig 2)

K.S.E. を力学系の生成した Shannon の情報とみれば、情報は軌道不安定性によって作り出されていると理解できた。しかし、エントロピー減衰の構造（臨界点では階段構造がみられた）がアトラクターのどのような構造の反映かは明らかではない。我々は、局所的平均軌道拡大率 $L(n)$ を導入して、その対応関係をみた。臨界点でエントロピー減衰にみられた階段構造は、局所平均軌道拡大率 $L(n)$ では反復構造として現れる。(fig 7) (fig 8) この反復構造もまた、エントロピー減衰でみた減衰構造と類似した構造をもっている。すなわち、Feigenbaum 固定点では、 2^n 的な繰り返しがみられ、回転数が黄金比の準周期運動では、Fibonacci 的繰り返し構造がみられる。このように、エントロピー減衰の構造が、軌道の局所的平均拡大率に密接に関係していることが解った。

参考文献

- [1] T.Yanagita I.Shimada. Entropy decay for Lorenz system. *BUSSEI-KENKYUU*, 51-6, 1989.
- [2] P.Billingsley. *Ergodic Theory and Information*. New York Wiley, 1965.
- [3] P.Grassberger. How to measure Self-Generated Complexity. *Physica*, 140A, 1986.
- [4] L.S.Young. Dimension,Entropy and Lyapnov exponents in differentiable dynamical system. *Physica*, 124A, 1984.