

$SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンについて

待田 芳徳 (沼津高専)

Yoshinori MACHIDA (Numazu College of Technology)

1. はじめに

1.1. 束の合成と分解

次の 2 種類 (1), (2) のファイバー束を考える.

(1) 4 元 Hopf 束

$$Sp(1)(\cong SU(2) \cong S^3) \longrightarrow S^7 \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4$$

に対して, 複素 Hopf 束と Penrose 束

$$U(1)(\cong S^1) \longrightarrow S^7 \longrightarrow \mathbb{C}P^3, \quad \mathbb{C}P^1(\cong S^2) \longrightarrow \mathbb{C}P^3 \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4 :$$

$$\begin{array}{ccc} & S^7 & \\ & \searrow^{U(1)} & \\ Sp(1) \downarrow & & \mathbb{C}P^3 \\ & \swarrow_{\mathbb{C}P^1} & \\ & S^4 & \end{array}$$

(2) $V = \mathbb{C}^3$ での 1, 2 次元部分空間の旗多様体 $F_{12} = SU(3)/U(1) \times U(1)$ を考えて, $\mathbb{C}P^2 = SU(3)/S(U(2) \times U(1))$, $N^7 = SU(3)/U(1)$ として,

$$Sp(1)(\cong SU(2) \cong S^3) \longrightarrow N^7 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$$

に対して,

$$U(1)(\cong S^1) \longrightarrow N^7 \longrightarrow F_{12}, \quad \mathbb{C}P^1(\cong S^2) \longrightarrow F_{12} \longrightarrow \mathbb{C}P^2 :$$

$$\begin{array}{ccc} & N^7 & \\ & \searrow^{U(1)} & \\ Sp(1) \downarrow & & F_{12} \\ & \swarrow_{\mathbb{C}P^1} & \\ & \mathbb{C}P^2 & \end{array}$$

を考えると, (1), (2) とも互いにファイバー束の合成, 分解になっている. それらの上の接続についても同様なことがいえるが, 特別なクラス同志, 特に, よく知られた S^4 , $\mathbb{C}P^2$ 上の $Sp(1)$

インスタントンに対して、それぞれ $\mathbb{CP}^3$, F_{12} 上の「 $U(1)$ インスタントン」の対応やモジュライについてはどうであろうか。

1.2. $U(1)$ ゲージ場

ここで、通常のインスタントンは Hodge の $*$ 作用素からの自己双対性に基づくので、4次元多様体上の束でしか定義されない。 $U(1)$ Yang-Mills 接続は Yang-Mills 汎関数の臨界点として任意次元の多様体 M 上の $U(1)$ 束で定義されるが、モジュライ空間は商空間 $H^1(M; \mathbb{R})/H^1(M; \mathbb{Z})$ と 1 対 1 対応するため、単連結な $\mathbb{CP}^3$, F_{12} では自明なものしか存在しない [M-I]。

ここでは、6次元多様体上に幾何構造としての $SU(3)$ 構造 (特に, nearly Kähler 構造) を考え、そのもとで自然に定義される主 $U(1)$ 束上にインスタントンを考える。それを、 S^4 , $\mathbb{CP}^2$ のそれぞれツイスター空間である $\mathbb{CP}^3$, F_{12} に適用してみることを考える。

6次元 nearly Kähler 多様体 $(M^6, g, J, \omega, \Phi = \phi + i\psi)$ 上の $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン A の議論は、M理論コンパクト化でのタイプ IIA 背景空間における NS-NS 場の計量 g , 2-形式 ω と R-R 場の 3-形式 $\Phi = \phi + i\psi$, S^1 束からのゲージポテンシャルである 1-形式 A , 場の強さ R_A が登場人物として展開する話である。

2. $SU(3)$ 構造, 特に, nearly Kähler 構造

2.1. $U(n)$ 構造

$2n$ 次元多様体 M^{2n} に対して、 g を Riemann 計量、 J を $g(JX, JY) = g(X, Y)$ となる複素構造、 ω を $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ となる基本 2-形式を考える。そのとき、 M は概 Hermite 構造、 $U(n)$ 構造をもつという。3つのうち2つを与えれば、他の1つは定まる。 g の Levi-Civita 接続 ∇ に対して、 $\nabla J = 0$ ($\nabla \omega = 0$) のとき、構造は可積分 (振率 0, 平坦) といい、Kähler であるという。

M の各点で次の $U(n)$ 既約分解をもつ ($[C-S]$, $[Sa]$) : $T^* = T^*M, \Lambda^\bullet = \Lambda^\bullet T^*M$ として、

$$\begin{aligned} T^* &\cong [\Lambda^{1,0}], \\ \Lambda^2 T^* &\cong [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}, \\ \Lambda^3 T^* &\cong [\Lambda^{3,0}] \oplus [\Lambda_0^{2,1}] \oplus T^*, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ここで、 $T_{\mathbb{C}}^* = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ として、

$$\begin{aligned} \Lambda^r T_{\mathbb{C}}^* &= \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}, [\Lambda^{p,q}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{p,q} \oplus \Lambda^{q,p}, [\Lambda^{p,p}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{p,p}, \\ \Lambda^1 &= [\Lambda^{1,0}], \Lambda^1 + i\Lambda^1 = \Lambda^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}, \\ \Lambda_{\mathbb{C}}^2 &= \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2}, \Lambda^2 = [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda^{1,1}] = [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}. \end{aligned}$$

最後の式は、 $\Lambda^2 = \mathfrak{so}(2n)$, $[\Lambda^{2,0}] = \mathfrak{u}(n)^\perp$, $\Lambda^{1,1} = \mathfrak{u}(n)$, $[\Lambda_0^{1,1}] = \mathfrak{su}(n)$, $\mathbb{R} = \langle \omega \rangle$ と同一視される。

2.2. $SU(n)$ 構造

$U(n)$ 構造をもつ $2n$ 次元多様体 M に対して, M の各点で 2 次元 $[\Lambda^{n,0}]$ の単位円 S^1 をファイバーとする単位 (実) 標準束 B を考える:

$$\begin{array}{ccc} B & \longleftarrow & S^1 \subset [\Lambda^{n,0}] \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

この束の切断を指定するとき, M は $SU(n)$ 構造をもつという ([C-S], [Sa]). 束 B は主 S^1 束だから, そのとき自明束である. 可積分な $U(n)$ 構造のときは Calabi-Yau といい, Ricci 平坦な Kähler である.

$SU(n)$ 構造をもつことは実 n -形式 ϕ を指定することであり, 付随する $(n, 0)$ -形式

$$\Phi = \phi + i\psi, \quad \psi = J\phi$$

が定義される. 束 B の各ファイバーは,

$$S^1 = \{a\phi + b\psi \mid a^2 + b^2 = 1\} \subset [\Lambda^{n,0}]$$

である.

2.3. $SU(3)$ 構造

6 次元について考える. $U(3)$ 構造から $SU(3)$ 構造への簡約は局所的に存在する: $\{e^1, \dots, e^6\}$ を T^* での局所的な正規直交基底場とすると, $Je^1 = -e^2$, $Je^3 = -e^4$, $Je^5 = -e^6$ であり,

$$\begin{aligned} \omega &= e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6, \\ \Phi &= (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6) \\ &= e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245} + i(e^{136} + e^{145} + e^{235} - e^{246}) \\ &= \phi + i\psi, \end{aligned}$$

ここで $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, である. そのとき,

$$\omega \wedge \phi = 0, \quad \omega \wedge \psi = 0, \quad \phi \wedge \psi = \frac{2}{3}\omega^3$$

を満たす.

2.4. nearly Kähler 構造

$U(n)$ 構造をもつ $2n$ 次元多様体 (M, g, J, ω) が nearly Kähler であるとは, Levi-Civita 接続 ∇ に対して $(\nabla_X J)X = \nabla_X JX - J\nabla_X X = 0$ ($X \in TM$) を満たすときをいう. 特に, $\nabla J = 0$ のときは Kähler である, 以後 non Kähler とする.

6 次元のときの性質としては ([C], [C-S]),

- (i) 標準束 K は自明, 即ち, 第 1 Chern 類 $c_1(M) = 0$, ($2n$ 次元でもよい)
- (ii) 正の Einstein, 従って完備ならばコンパクト,
- (iii) 計量錐 $C(M)$: $dr^2 + r^2 g$ は G_2 ホロノミーをもつ,

(iv) 等質空間は次の4つである： S^6 , $\mathbb{C}P^3$, F_{12} , $S^3 \times S^3$.

さらに,

$$d\omega = 3\nabla\omega \in [\Lambda^{3,0}]$$

が成り立つ. 大事なことは, 基本2-形式 ω と複素体積形式 $\Phi = \phi + i\psi \in \Lambda^{3,0}$ が存在して,

$$d\omega = 3\phi \ (\Rightarrow d\phi = 0), \quad d\psi = -2\omega \wedge \omega \ (\Rightarrow d(\omega \wedge \omega) = 0)$$

を満たすことであり, $SU(3)$ 構造を定義する. $(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0$ に注意して,

$$\phi(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z), \quad \psi(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, JZ) \in [\Lambda^{3,0}]$$

とすればよい.

3. $SU(3)$ 型インスタントン

3.1. $SU(3)$ 型インスタントン

$SU(3)$ 型インスタントンを定義する前に, 通常4次元多様体上の束のインスタントンを復習して, $SU(3)$ 型インスタントンの定義の自然さ, 類似性をみる一助としよう.

向き付けられた4次元 Riemann 多様体 N での2-形式の空間 $\Lambda^2 \cong \mathfrak{so}(4)$ の $SO(4)$ 既約分解

$$\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)_+ \cong \Lambda_+^2, \quad \mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{su}(2)_- \cong \Lambda_-^2$$

を考える. これは, Hodge の $*$ 作用素の ± 1 の固有分解でもある.

P をコンパクト半単純 Lie 群 H を構造群とする N 上の主束とし, その上の接続形式 A の曲率形式 R_A が,

$$R_A \in \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda_+^2) (\subset \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^2))$$

$(\text{ad}P = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{h})$ を満たすとき, P 上の A をインスタントンという. そのとき, インスタントン A に対する楕円複体

$$0 \longrightarrow \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{D_1} \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda_-^2) \longrightarrow 0$$

ができる, ここで $D_0 = D_A$, $D_1 = p_- \circ D_A$ は共変外微分 ($p_- : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda_-^2$ は直交射影) である.

N が $U(2)$ 構造 (概 Hermite 構造) をもつとき, Λ^2 の $U(2)$ 既約分解

$$\Lambda^2 = [\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle \oplus [\Lambda_0^{1,1}], \quad \Lambda_+^2 = [\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle, \quad \Lambda_-^2 = [\Lambda_0^{1,1}]$$

をもつ. そのとき, A として反インスタントンのほうを考える:

$$R_A \in \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda_-^2).$$

次に, $U(3)$ 構造 (概 Hermite 構造) をもつ6次元多様体 M での2-形式の空間 $\Lambda^2 \cong \mathfrak{so}(6)$ の $U(3)$ 既約分解

$$\Lambda^2 = [\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle \oplus [\Lambda_0^{1,1}], \quad \mathfrak{g}^\perp = [\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3) \cong [\Lambda_0^{1,1}]$$

を考える.

P を M 上の主 H 束とする:

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

その上の接続形式 A の曲率形式 R_A が,

$$R_A \in \Gamma(\text{ad}P \otimes \mathfrak{g}) (\subset \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^2))$$

を満たすとき, P 上の A を $SU(3)$ 型 H インスタントンという ([C]). そのとき, インスタントン A に対する系列

$$0 \rightarrow \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{D_1} \Gamma(\text{ad}P \otimes ([\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle)) \xrightarrow{D_2} \Gamma(\text{ad}P \otimes [\Lambda^{3,0}]) \rightarrow 0$$

は楕円的となる. M が可積分な $U(3)$ 構造, 即ち, Kähler であるか, または, nearly Kähler であるとき, 系列は複体となる. そのとき, M がさらにコンパクトならば, Atiyah-Singer の指数定理が適用できる. M を, P 上の $SU(3)$ 型 H インスタントン全体の集合の P のゲージ変換群による商空間であるモジュライ空間とする. そのとき, $SU(3)$ 型 H インスタントンの変形モジュライ $T_A \mathcal{M}$ は, $H^1 = \text{Ker} D_1 / \text{Im} D_0$ で与えられる.

3.2. 作用積分と運動方程式

6次元 nearly Kähler 多様体 $(M^6, g, J, \omega, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える: $d\omega = 3\phi$, $d\psi = -2\omega^2$. P を M 上の主 H 束とする.

命題

A が $SU(3)$ 型 H インスタントンである: $R_A \in \Gamma(\text{ad}P \otimes \mathfrak{su}(3))$

$$\iff (\text{運動方程式}) R_A \wedge \phi = 0, \quad R_A \wedge \omega^2 = 0$$

$$\iff (\text{作用積分}) S(A) = \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A^3) \wedge \Phi \text{ の臨界点である.}$$

$A_t = A + t\alpha$ ($\alpha \in \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^1)$) に対して,

$$\left. \frac{dS(A_t)}{dt} \right|_{t=0} = 2 \int_M \text{Tr}(R_A \wedge \alpha) \wedge \Phi$$

となり, 臨界点は $R_A \wedge \phi = 0$, $R_A \wedge \psi = 0$ で特徴づけられる.

3次元多様体の場合の Chern-Simons 汎関数の作用積分と同様に, この作用積分はゲージ不変ではない. Φ のかわりに実部 ϕ をとって作用積分 $S_{re}(A) = \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A^3) \wedge \phi$ を考え, $H = U(1)$, あるいは CP^3, F_{12} のような $H^3 = 0$ であれば, ゲージ不変となる.

4. ツイスター理論

4.1. 一般論

向き付けられた 4次元 Riemann 多様体 (N, h) の $T_x N (x \in N)$ での正の直交複素構造全体

$$Z_x = \{J \in \text{End}(T_x N) \mid J^2 = -\text{id}, h(JX, JY) = h(X, Y), J \gg 0\} \cong S(\Lambda_-^2) \cong SO(4)/U(2) \cong CP^1$$

をファイバーとする N 上のツイスター空間 $Z = Z(N) = \bigcup_{x \in N} Z_x$ を考える. 射影を $\pi: Z \rightarrow N$ とする. TZ を, h の Levi-Civita 接続による水平リフト H とファイバー $\mathbb{CP}^1$ に接する垂直成分 V に分解する: $TZ = H \oplus V$. そのとき, 次が知られている ([B], [Sa]).

Z 上の概複素構造 J を, H 上ではトートロジカルな J^h , V 上では $\mathbb{CP}^1$ からの標準的な J^v をとることによって定義する: $J = J^h \oplus J^v$.

命題 ツイスター空間 Z の概複素構造 J が積分可能である $\iff N$ が半共形的平坦 ((反) 自己双対的) である.

命題 コンパクトな N のツイスター空間 Z が Kähler である $\iff$ 半共形的平坦な N が正の Einstein である $\iff N$ が $S^4, \mathbb{CP}^2$ である.

4.2. $Z(S^4)$ と $Z(\mathbb{CP}^2)$

N を $S^4, \mathbb{CP}^2$ とする. それぞれのツイスター空間 Z は $\mathbb{CP}^3, F_{12}$ である. Z 上の概複素構造に対して ([E-S], [Sa], [H]),

命題 通常の $J_1 = J^h \oplus J^v$ は積分可能である, 一方 $J_2 = J^h \oplus -J^v$ は積分可能ではない.

命題 Z 上の Riemann 計量を $g_t = \pi^*h + th^v (t > 0)$ とすると, $t = t_1 = 12/\tau, t = t_2 = 6/\tau$ (τ は Einstein な N の正のスカラー曲率) のとき, g は Einstein である, そして $(g_1 = g_{t_1}, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler, $(g_2 = g_{t_2}, J_2, \omega_2)$ は nearly Kähler である.

5. $\mathbb{CP}^3$ と F_{12} での $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン

5.1. $\mathbb{CP}^3$ の場合

nearly Kähler な $(\mathbb{CP}^3, g_2, J_2, \omega_2, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える. $(\mathbb{CP}^3, g_1, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler であることに注意する. $\mathbb{CP}^3$ 上で複素 Hopf 束による $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを考える:

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^7 \\ & & \pi \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^3 \end{array}$$

Einstein-Kähler な $(\mathbb{CP}^3, g_1, J_1, \omega_1)$ での Kähler 形式 ω_1 は, $\omega_1 \in \Lambda_0^{1,1}(J_2)$, 即ち, $\omega_1 \in \langle \omega_2 \rangle^\perp \subset \Lambda^{1,1}(J_2)$ である. 従って, ω_1 を π によって引き戻した曲率をもつ接続 A は, $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンであることがわかる:

$$R_A = \pi^*\omega_1 \in \Gamma(\text{ad}S^7 \otimes \Lambda_0^{1,1}(J_2)).$$

これを基礎インスタントンとして, BPST 構成の類似の方法によって ([M-I], [K]), 中心の位置と強さのスケールによる $6+3=9$ 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを構成する.

次の図式を考える:

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{H}^2 - \{0\} = \mathbb{C}^4 - \{0\} \longleftarrow \mathbb{C}^* \\ \cup \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
Sp(1) & \longrightarrow & S^7 & \longleftarrow & U(1) \\
& & \downarrow & \searrow & \\
& & \mathbb{H}P^1 & & \mathbb{C}P^3 \longleftarrow \mathbb{C}P^1 \\
& & & \swarrow &
\end{array}$$

$\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ での標準座標を $\mathbb{H}^2 : (q_0, q_1)$, $\mathbb{C}^4 : (z_0, z_1, z_2, z_3)$ とする. $\mathbb{C}^4 - \{0\}$ 上の 1-形式

$$\theta = \frac{1}{|z|^2} \sum_{i=0}^3 \bar{z}_i dz_i$$

を S^7 上に制限すると, $u(1)$ -値 1-形式であり, $\mathbb{C}P^3$ の主 $U(1)$ 束 S^7 上の接続を定義する. $S^7 \rightarrow \mathbb{C}P^3$ の U_0 上の切断 $z \mapsto (\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_3}{\sqrt{1+|z|^2}})$ によって, θ を U_0 に引き戻すと,

$$\theta_{U_0} = \text{Im}(\frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^3 \bar{z}_i dz_i),$$

ここで, $U_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \mid z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^3$, $z = [1, z_1, z_2, z_3] = (z_1, z_2, z_3)$ とする. 曲率を U_0 上でみてみると,

$$\begin{aligned}
\omega_{U_0} &= d\theta_{U_0} \\
&= \frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^3 d\bar{z}_i \wedge dz_i - \frac{1}{(1+|z|^2)^2} \sum_{i < j} (z_i \bar{z}_j d\bar{z}_i \wedge dz_j)
\end{aligned}$$

となり, $\mathbb{C}P^3$ での Kähler 形式 ω_1 の非同次座標表示にほかならない.

$a = (a_1, a_2, a_3) \in U_0 = \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ ($\lambda_i > 0$) に対して,

$$\theta_{(a_i, \lambda_i)} = \text{Im}(\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 |z_i - a_i|^2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\bar{z}_i - \bar{a}_i) dz_i)$$

とおくことによって, $\omega_{(a_i, \lambda_i)} = d\theta_{(a_i, \lambda_i)}$ を π によって引き戻した曲率をもつ接続 $A_{(a_i, \lambda_i)}$ は, $6 + 3 = 9$ 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである. 以下の 5.3. Atiyah-Singer の定理を適用して, 次がわかる.

定理 上のように構成した $\mathbb{C}P^3$ の主 $U(1)$ 束 S^7 上の接続 $A_{(a, \lambda)}$ ($(a, \lambda) \in \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_+^3$) は, 9 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである.

5.2. F_{12} の場合

nearly Kähler な $(F_{12}, g_2, J_2, \omega_2, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える. $(F_{12}, g_1, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler であることに注意する. F_{12} 上で $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを考える:

$$\begin{array}{ccc}
U(1) & \longrightarrow & N^7 \\
& & \downarrow \pi \\
& & F_{12}
\end{array}$$

Einstein-Kähler な $(F_{12}, g_1, J_1, \omega_1)$ での Kähler 形式 ω_1 は, $\omega_1 \in \Lambda_0^{1,1}(J_2)$, 即ち, $\omega_1 \in \langle \omega_2 \rangle^\perp \subset \Lambda^{1,1}(J_2)$ である. 従って, ω_1 を π によって引き戻した曲率をもつ接続 A は, $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンであることがわかる:

$$R_A = \pi^* \omega_1 \in \Gamma(\text{ad} N^7 \otimes \Lambda_0^{1,1}(J_2)).$$

Donaldson 構成の類似の方法によって ([D]), $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを構成する.
自然な埋め込み

$$\begin{array}{ccc} S^{11} \leftarrow N^7 & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & F_{12} \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^{2*} \hookrightarrow \mathbb{C}P^5 & \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{H}P^2 \leftarrow \mathbb{C}P^2 & & \end{array}$$

のもとで, 次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{H}^3 - \{0\} = \mathbb{C}^6 - \{0\} \longleftarrow \mathbb{C}^* & & & & \\ \cup & & & & \\ Sp(1) \longrightarrow S^{11} \longleftarrow U(1) & & & & \\ \downarrow & \searrow & & & \\ & \mathbb{C}P^5 \longleftarrow \mathbb{C}P^1 & & & \\ \downarrow & \swarrow & & & \\ & \mathbb{H}P^2 & & & \end{array}$$

$\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}^6 = \mathbb{R}^{12}$ での標準座標を $\mathbb{H}^3 : (q_0, q_1, q_2)$, $\mathbb{C}^6 : (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ とする. $\mathbb{C}^6 - \{0\}$ 上の 1-形式

$$\theta = \frac{1}{|z|^2} \sum_{i=0}^5 \bar{z}_i dz_i$$

を S^{11} 上に制限すると, $u(1)$ -値 1-形式であり, $\mathbb{C}P^5$ の主 $U(1)$ 束 S^{11} 上の接続を定義する. $S^{11} \longrightarrow \mathbb{C}P^5$ の U_0 上の切断 $z \mapsto (\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_3}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_4}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_5}{\sqrt{1+|z|^2}})$ によって, θ を U_0 に引き戻すと,

$$\theta_{U_0} = \text{Im}(\frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^5 \bar{z}_i dz_i),$$

ここで, $U_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] \mid z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^5$, $z = [1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ とする. 曲率を U_0 上でみると,

$$\begin{aligned} \omega_{U_0} &= d\theta_{U_0} \\ &= \frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^5 d\bar{z}_i \wedge dz_i - \frac{1}{(1+|z|^2)^2} \sum_{i < j} (z_i \bar{z}_j d\bar{z}_i \wedge dz_j) \end{aligned}$$

となり, $\mathbb{C}P^5$ での Kähler 形式 ω の非同次座標表示にほかならない.

$\mathbb{C}P^5$ での Kähler 形式 ω の埋め込み $\iota: F_{12} \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^{2*} \hookrightarrow \mathbb{C}P^5$ からの引き戻しが, F_{12} での Kähler 形式 ω_1 にほかならない: $\omega_1 = \iota^* \omega$.

$\mathbb{CP}^5$ の主 $U(1)$ 束 S^{11} 上の接続 θ を、埋め込み ι から引き戻すことによって、 F_{12} の主 $U(1)$ 束 N^7 上に上記の接続 A が定義される： $A = \iota^* \theta$, $R_A = \pi^* \omega_1 = \pi^* \iota^* \omega$.

$\mathbb{CP}^3$ の場合と同様に、 F_{12} 上に θ, A から中心の位置と強さのスケールによる $6+3=9$ 次元パラメーターの $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン $A_{(a, \lambda_i)}$ が構成できる.

さらに、複素 Hopf 束を考える：

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^5 \\ & & \pi \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^2 \end{array}$$

$\mathbb{CP}^2$ 上の Kähler 形式 ω を S^5 に引き戻した曲率をもつ S^5 上の接続 θ から、 $\mathbb{CP}^3$ の場合と同様に、 $b = (b_1, b_2) \in U_0 = \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ ($\mu > 0$) に対して、中心の位置と強さのスケールによる接続 $\theta_{(b, \mu)}$ ができる. 束 $\varpi : F_{12} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ による引き戻し $\varpi^* \theta_{(b, \mu)}$ によって、 F_{12} 上に 6 次元パラメーターの $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン $B_{(b, \mu)}$ が構成できる. 以下の 5.3. Atiyah-Singer の定理を適用して、次がわかる.

定理 上のように構成した F_{12} の主 $U(1)$ 束 N^7 上の接続 $A_{(a, \lambda)}$ ($(a, \lambda) \in F_{12} \times \mathbb{R}_+^3$) と $B_{(b, \mu)}$ ($(b, \mu) \in \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{R}_+^2$) は、15 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである.

5.3. Atiyah-Singer の指数定理の適用

M をコンパクトな 6 次元 nearly Kähler 多様体とし、 P をコンパクト半単純 Lie 群 H を構造群とする M 上の主束とする. 3.1. の話から、 A が P 上の $SU(3)$ 型 H インスタントンのとき、 A に対する槽円複体の系列ができる：

$$0 \rightarrow \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(\text{ad}P \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{D_1} \Gamma(\text{ad}P \otimes ([\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle)) \xrightarrow{D_2} \Gamma(\text{ad}P \otimes [\Lambda^{3,0}]) \rightarrow 0.$$

Atiyah-Singer の指数定理によって $([\text{Sh}], [\text{K}])$,

$$h^0 - h^1 + h^2 - h^3 = - \frac{\text{ch}(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \text{Ad}P \otimes \Lambda_{\mathbb{C}}^i) \text{td}(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)} [M],$$

ここで $h^i = \dim H^i$, $H^i = \text{Ker} D_i / \text{Im} D_{i-1}$, そして $\text{ch}(\text{Ad}P \otimes \Lambda_{\mathbb{C}}^i) = \text{ch}(\text{Ad}P) \text{ch}(\Lambda_{\mathbb{C}}^i)$,

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^i = \begin{cases} \Lambda^0 \otimes \mathbb{C}, & i = 0, \\ \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}, & i = 1, \\ \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \mathbb{C} \omega, & i = 2, \\ \Lambda^{3,0} \oplus \Lambda^{0,3}, & i = 3. \end{cases}$$

左辺は D_i に関する解析的指数, 右辺は Chern 指標, Todd 類, Euler 類に関する位相的指数を表わす.

$H = U(1)$ とする. そのとき, $h^0 = 1$, $\text{ch}(\text{Ad}P) = 1$ となる. T_C を M の複素接束, $\bar{T}_C$ をその複素共役束とする：

$$TM \otimes \mathbb{C} = T_C \oplus \bar{T}_C, \quad T^*M \otimes \mathbb{C} = T_C^* \oplus \bar{T}_C^*.$$

全 Chern 類を

$$\begin{aligned} c(TM \otimes \mathbb{C}) &= c(T_C) \cdot c(\bar{T}_C) \\ &= (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \end{aligned}$$

のように分裂原理によって分解する. そのとき, 次がいえ:

$$\text{ch}\left(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \Lambda_C^i\right) = \text{ch}\left(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \Lambda^{i,0}\right) + \text{ch}\left(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \Lambda^{0,i}\right) = \prod_{i=1}^3 (1 - e^{-x_i}) + \prod_{i=1}^3 (1 - e^{x_i}),$$

$$\text{td}(TM \otimes \mathbb{C}) = \text{td}(T_C) \cdot \text{td}(\bar{T}_C) = \prod_{i=1}^3 \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \cdot \prod_{i=1}^3 \frac{-x_i}{1 - e^{x_i}},$$

$$e(TM) = c_3(T_C) = \prod_{i=1}^3 x_i.$$

よって, 位相的指数である右辺は,

$$\begin{aligned} & - \left\{ \left(\prod_{i=1}^3 (1 - e^{-x_i}) + \prod_{i=1}^3 (1 - e^{x_i}) \right) \prod_{i=1}^3 \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \cdot \prod_{i=1}^3 \frac{-x_i}{1 - e^{x_i}} / \prod_{i=1}^3 x_i \right\} [M] \\ &= - \left(\prod_{i=1}^3 \frac{-x_i}{1 - e^{x_i}} - \prod_{i=1}^3 \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \right) [M] \\ &= -(\text{td}(\bar{T}_C) - \text{td}(T_C)) [M] \\ &= (\text{td}(T_C) - \text{td}(\bar{T}_C)) [M] \\ &= 2\text{td}(T_C) [M] \end{aligned}$$

となる. もし M が複素多様体ならば, Todd 類を M 上で積分した $\text{td}(T_C)[M]$ は算術種数に等しいことに注意する.

以上から, A の $SU(3)$ 型 H インスタントンの変形モジュライの次元は, 空でないとして,

$$h^1 = \dim H^1 = -2\text{td}(T_C)[M] + h^2 - h^3 - 1$$

である.

5.4. おわりに

(1) $\mathbb{CP}^3$ 上の主 $U(1)$ 束の同型類は $H^2(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であるが, 主 $U(1)$ 束のため, 他の束の $U(1)$ インスタントンのモジュライの次元は変わらない. 通常の S^4 上の $Sp(1)$ インスタントンのモジュライの次元は $8k - 3$ であることと比較せよ.

(2) nearly Kähler な $S^6, S^3 \times S^3$ 上の $U(1)$ インスタントンは, $H^2 = 0$ のため, 自明なものしか存在しない.

(3) 通常の Einstein-Kähler な $(\mathbb{CP}^3, g_1, J_1, \omega_1)$ 上の $U(1)$ インスタントンは, 自明なものしか存在しない.

(4) 通常の $N = S^4, \mathbb{CP}^2$ 上の H インスタントンのそれぞれ nearly Kähler な $Z = \mathbb{CP}^3, F_{12}$ への引き戻しは, 概複素構造の定め方より, $SU(3)$ 型 H インスタントンである.

References

- [B] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
- [C] R.R. Carrión, *A generalization of the notion of instanton*, Diff. Geom. Appl. 8 (1998) pp.1–20.
- [C-S] S. Chiossi-S. Salamon, *The intrinsic torsion of $SU(3)$ and G_2 structures*, Differential geometry, Valencia 2001, pp.115–133, World Sci. Pub., 2002.
- [D] S.K. Donaldson, *Vector bundles on the flag manifold and the Ward correspondence*, Geometry of today, Roma 1984, pp.109–119, Birkhäuser, 1985.
- [E-S] J. Eells-S. Salamon, *Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12 (1985) pp.589–640.
- [H] N.J. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. 43 (1981) pp.133–150.
- [K] 小林, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.
- [M-I] 茂木-伊藤, 微分幾何学とゲージ理論, 共立出版, 1986.
- [Sa] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes Math. Ser. 201, Longman Scientific & Technical, 1989.
- [Sh] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer index theorem*, Lecture Notes Math. 638, Springer-Verlag, 1978.