

On the C_p -classes in a von Neumann algebra

東北大 理 武元英夫

§ 1. 序

Hilbert space H における completely continuous operators 全体からなる ideal $C(H)$ において, C_p -classes なるものが定義され, 議論がなされていることは Dunford-Schwartz [3] によって知られている。 $C(H)$ の元 a に対して a の絶対値 $|a| = (a^*a)^{1/2}$ の eigenvectors $\mu_1(a), \mu_2(a), \dots$ を 0 に収束する様に単調減少に並べ換え列とした時, C_p -classes は $C_p = \{a \in C(H); |a|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p)^{1/p} < \infty\}$ によって定められている。

ここでは, type I von Neumann algebra M において, 上の C_p -classes を拡張して行くことを目的とする。まず, H. Halpern [6] が type I von Neumann algebra のある maximal CCR-ideal を上の $C(H)$ に対応させることによって, 一種の spectral decomposition を行っている。(定理 1.) 私は, その H. Halpern の結果から, Dunford-Schwartz の著書にも書かれている characteristic numbers の議論を type I von Neumann

algebra において進めて行き、更に classes- C_p を定義する。
最後に、定義された C_p -classes ($p \geq 1$) に対して、 M の center Z を module とする Z -linear functional の意味で C_p -classes dual space がどうなるか調べて行く。

§ 2. Completely continuous elements の spectral decomposition と characteristic operators 。

M は type I von Neumann algebra とし、その center Z の spectrum を X とする。今、 M における all abelian projections によって generate される uniformly closed ideal を $C_0(M)$ とする。その時、 $C_0(M)$ が maximal CCR-ideal になることは今までに知られている。 $X \ni \lambda$ に対して、ideal $[\lambda]$ を Z における maximal ideal λ を含む M における最小の closed ideal とする。その時、Hilbert space $H(\lambda)$ が存在して $M/[\lambda]$ が $H(\lambda)$ 上に既約に表現されることが Glimm [4] で分っている。
以上の事柄から H. Halpern [6] は次の事を示している。

定理 1. $M, Z, C_0(M)$ を前に述べたものとする。その時、 $C_0(M)$ の任意の positive element a に対して、次の性質を満す Z の positive elements の列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ と abelian projections の列 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する。(1) $\{e_i\}$ は互いに直交し、 $e_i \geq e_{i+1} \vee v_i$; (2) $a_i \geq a_{i+1} \vee v_i$, $\lim a_i = \infty$ if $\{a_i\}$ が無限個; (3) $\text{supp}(a_i) = Z(e_i)$;

(4) $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ in uniform topology.

定理 1 において定まった $C_{\infty}(M)$ の positive element の表現を spectral decomposition と呼ぶ。

定義 1. $C_{\infty}(M)$ の任意の元 a に対して, $|a|$ のスペクトル分解 $|a| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ の時, a の n -th characteristic operator を $\mu_n(a)$ と表わし, それを a_n とする。

上の定義から, Hilbert space 上の completely continuous operators に対する characteristic number の議論が拡張されることは, 次の補題 1 から分る。そこで, 補題 1 とそれによって分る二・三の性質を列記する。

補題 1. $C_{\infty}(M) \ni a, X \ni \lambda$ に対して, $\mu_n(a(\lambda))$ を $H(\lambda)$ 上の $a(\lambda)$ の n -th characteristic number とすると, $\mu_n(a)^{\wedge}(\lambda) = \mu_n(a(\lambda))$ が成立する。

補題 2. $C_{\infty}(M)$ の元 a, b に対して, 次が成立する。

$$\mu_{n+m+1}(a+b) \leq \mu_{n+1}(a) + \mu_{m+1}(b),$$

$$\mu_{n+m+1}(ab) \leq \mu_{n+1}(a) \mu_{m+1}(b)。$$

補題3。 $C_\infty(M)$ の元 a, b と M の元 t に対して次が成立つ。

- (1) $\|\mu_n(a) - \mu_n(b)\| \leq \|a - b\|$; (2) $\mu_n(at) \leq \mu_n(a)\|t\|$, $\mu_n(ta) \leq \|t\|\mu_n(a)$; (3) $\mu_n(au) = \mu_n(a)$ if $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$, $u \in M$ 。

§ 3。 Completely continuous elements の classes $C_p(M)$ 。

この § では, $C_\infty(M)$ において classes $C_p(M)$ を定義し, 更に classes $C_p(M)$ が Banach algebra になることを示す。

定義2。 $1 \leq p < \infty$ に対して, $C_p(M) = \{a \in C_\infty(M) ; \|a\|_p = \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p \right\}^{1/p} \right\| < \infty\}$ 特には, $C_\infty(M)$ において uniform topology と異なる。

すると, 次の事が分る。

補題4。

- (a) $C_p(M) \subset C_{p'}(M)$ if $p \leq p'$, $\|a\|_p \downarrow$ for $p \uparrow$;
 (b) $a, b \in C_p(M) \Rightarrow a+b \in C_p(M)$ and $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$;
 (c) $a \in C_p(M)$, $b \in C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) $\Rightarrow ab \in C_1(M)$ and $\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$;
 (d) $a \in C_p(M)$, $t \in M \Rightarrow ta, at \in C_p(M)$ and $\|ta\|_p \leq \|a\|_p \|t\|$, $\|at\|_p \leq \|t\| \|a\|_p$ 。

補題4によって classes $C_p(M)$ は normed algebra である。更に次の事から, $C_p(M)$ が Banach algebra となる。

定理 2. $C_p(M)$ における列 $\{a_n\}$ が $\|a_n - a_m\|_p \rightarrow 0$ as $n, m \rightarrow \infty$ を満たす時, $C_p(M)$ の元 a が存在して, $\|a_n - a\|_p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ が成立する。

Hilbert space における finite rank の operator に代って $F = \{a \in C_\infty(M) : |a| = \sum_{i=1}^N a_i e_i, N < \infty\}$ によって F を定義する。その時, 次の様に F が ideal となる。更に, classes $C_p(M)$ において dense であることが分る。

補題 5. $F \ni a, M \ni b \Rightarrow ab, ba \in F$ が成立する。

補題 6. $C_\infty(M) \ni a$ に対して, F において次の性質を満たす列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する。

- (1) $\|b_n - a\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$;
- (2) $\|b_n - a\|_p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ if $a \in C_p(M)$;
- (3) $\|b_n\|_p \rightarrow \|a\|_p$ as $n \rightarrow \infty$ if $a \in C_p(M)$.

§ 4. type I von Neumann algebra M における classes $C_p(M)$ の duality .

$C_1(M)$ の positive element a の spectral decomposition $a = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ に対して, $\text{Tr}(a) = \sum_{i=1}^\infty a_i$ とおく。その時, $X \ni \xi$ に対して,

$\text{Tr}(a)^\wedge(z) = \text{Tr}(a(z))$ が成立する。そこで、 $\text{Tr}(a(z))$ は $B(H(z))$ の trace を表わす。今、 $C_1(M) \ni a$ に対して、 $a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$ ($a_i \geq 0$) と表わした時、 $\text{Tr}(a) = \text{Tr}(a_1) - \text{Tr}(a_2) + i(\text{Tr}(a_3) - \text{Tr}(a_4))$ によって、 Tr を定義した時、 Tr は次の性質をもつ。(1) $a, b \in C_1(M)$
 $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Tr}(ca + db) = c\text{Tr}(a) + d\text{Tr}(b)$; (2) $a \in C_1(M), u \in M, u \Rightarrow \text{Tr}(u^* a u) = \text{Tr}(a)$ (3) $a \in C_1(M) \Rightarrow \varphi(b) = \text{Tr}(ba)$ for $b \in M$
 は M 上の continuous $\mathbb{Z}$ -linear functional である。

そこで $C_p(M)$ の duality を考えるにあたり、 $C_p(M)$ 上の continuous functional として、 $\|\cdot\|_p$ -continuous $\mathbb{Z}$ -linear functional を表わす。その意味で $C_p(M)^* = C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) が成立する。最初に次の事を示す。

定理3. $1 < p < \infty$, $a \in C_p(M)$ に対して、次が成立する。

$$\|a\|_p = \sup_{b \in F} \frac{\|\text{Tr}(ab)\|}{\|b\|_q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

H. Halpern は $C_1(M)^* = M$, $C_\infty(M)^* = C_1(M)$ であることを示している。しかし、彼の議論は Kaplansky の結果、即ち $C_2(M)$ が Modular Hilbert space であることを使っている。しかし、 $p \neq 1, \infty$ に対しては、定理3が必要になって来る。最後に、定理3を用いることによって、 $1 < p < \infty$ に対して $C_p(M)^* = C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) になることを示す。

定理 4. $a_0 \in C_b(M)$ に対し $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_0)$ for $a \in C_p(M)$
 $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ によって定義され $C_p(M)$ 上の $\mathbb{Z}$ -linear functional
 φ は continuous となる。更に、 $C_p(M)$ 上の任意の continuous
 $\mathbb{Z}$ -linear functional φ に対し $C_b(M) \ni a_\varphi$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) が
一意に定まると、 $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_\varphi)$ for $\forall a \in C_p(M)$ and $\|\varphi\| = \|\varphi\|_q$
が成立する。

References

- [1] J. Dixmier; Les algebres d'opérateurs dans l'espace hilbertien,
Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [2] J. Dixmier; Les C^* -algebres et leurs representation, Gauthier-
Villars, Paris, 1964.
- [3] N. Dunford and J.T. Schwartz; Linear operators II.
- [4] J. Glimm; A Stone-Weierstrass theorem for C^* -algebras, Ann.
of Math., 72(1960), 216-244.
- [5] J. Glimm; Type I C^* -algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.
- [6] H. Halpern; A spectral decomposition for self-adjoint element
in the maximal GCR-ideal of a von Neumann algebra with
applications to non-commutative integration theory,
Trans. Amer. Math. Soc., 133(1968), 281-306.
- [7] S. Sakai; The theory of W^* -algebras, Lecture Note, 1962.