

U-統計量の正規近似の下限

鹿見島大 理 前園 宜寿 (Yoshihiko Maesono)

はじめに

標準化した U-統計量の分布の正規近似の精密化は、近年いろいろ論じられている。特に Berry-Esséen bound については、kernel の 3 次の絶対モーメントが存在するという仮定の下で求められている。Edgeworth 展開については、かなり複雑な仮定の下ではあるが、 N^1 のオーダーまで得られている。他方、独立な確率変数の和の分布については、正規近似の下側の bound が研究されている。ここでは U-統計量の分布の正規近似の下限について議論する。

1. 序

$X_1, X_2, \dots, X_N$ を互いに独立で同一分布に従う確率変数とし、 $h(x_1, \dots, x_r)$ を成分の入れ替えに對して不変な r 次の symmetric kernel とする。このとき U-統計量

$$U_N = \binom{N}{r}^{-1} \sum_{C_{N,r}} h(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \quad (1)$$

について考える。ここで $\sum_{C_{N,r}}$ は $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N$ についての和を表わす。Hoeffding (1948) は $E h^2 < \infty$ の条件下で $(U_N - E U_N) / \sqrt{\text{Var } U_N}$ の極限分布が標準正規分布 $N(0, 1)$ であることを示した。また U -統計量の Berry-Esséen bound, 即ち $\Phi(x)$ を $N(0, 1)$ の分布関数とするとき

$$\Delta = \sup_x \left| P \left[\frac{U_N - E U_N}{\sqrt{\text{Var } U_N}} \leq x \right] - \Phi(x) \right|$$

の上側の bound について多くの研究がなされ, 最終的に Callaert and Janssen (1978) により, $E |h|^3 < \infty$ の条件下で, $\Delta \leq C N^{-\frac{1}{2}}$ (C : 定数) が示された。

他方, 独立な確率変数 (必ずしも同一分布ではない) の和の分布の正規近似について, 近年詳しく調べられている。

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ を独立な確率変数で $E \varepsilon_i = 0$ かつ $\sum_{i=1}^N E \varepsilon_i^2 = 1$ とする。この時 Rozovskii (1978 a, b) と Hall (1980, 1982) は,

$$\Delta^* = \sup_x \left| P \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \leq x \right] - \Phi(x) \right|$$

が漸近的に

$$\begin{aligned} \rho = & \sum_{i=1}^N E \{ \varepsilon_i^2 I[|\varepsilon_i| > 1] \} + \sum_{i=1}^N E \{ \varepsilon_i^4 I[|\varepsilon_i| \leq 1] \} \\ & + \left| \sum_{i=1}^N E \{ \varepsilon_i^3 I[|\varepsilon_i| \leq 1] \} \right| \end{aligned}$$

の大きさに等しいことを証明した。さらに Hall and Barbour (1984) は, C を定数とした時

$$\rho \leq C \left\{ \Delta^* + \sum_{i=1}^N [E \varepsilon_i^2]^2 \right\} \quad (2)$$

が成り立つことを示した。もし ε_i が同一の分布に従えば, $\sum_{i=1}^N [E \varepsilon_i^2]^2 = N^{-1}$ である。この(2)の不等式は, 2つの分布がどれだけ離れているかを示すものであり, 証明は Stein 法 (1972) で, 通常の Fourier 解析ではない点が注目される。U-統計量について, (2)に相当する不等式を求めるのが, 本論の目的である。

2. 下限を与える不等式

まず次の仮定をおく。

$$(A1) \quad E h(X_1, X_2, \dots, X_r) = 0 \quad \text{かつ} \quad E h^2(X_1, X_2, \dots, X_r) < \infty.$$

次に Hoeffding (1961) による U_N の forward martingale への分解を与える。 $1 \leq k \leq r$ に対し

$$a_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = E[h(X_1, X_2, \dots, X_r) \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k],$$

$$g_1(x_1) = a_1(x_1), \quad g_2(x_1, x_2) = a_2(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^2 g_1(x_i), \quad \dots, \quad ,$$

$$g_r(x_1, x_2, \dots, x_r) = a_r(x_1, x_2, \dots, x_r) - \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i_j=1}^r c_{r,j} g_j(x_1, x_2, \dots, x_{i_j}),$$

$$A_{k,N} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N c_{N,k} g_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}),$$

とおく。この時 (1) で与えられた U_N は,

$$U_N = \binom{N}{r}^{-1} \sum_{k=1}^r \binom{N-k}{r-k} A_{k,N}$$

と表わすことができる。さらに g_k の定義より $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \neq \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ ならば

$$E[g_k(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) | X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_s}] = 0.$$

従って, $E|\pi g_k| < \infty$ を満たす任意の関数 $\pi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ に対し

$$E[\pi(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_s}) g_k(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})] = 0. \quad (3)$$

この性質を用いて, Maesono (1981) は, kernel h の p 次の絶対モーメントが存在するとき, $m_p = [8(p-1) \max(1, 2^{p-3})]^p$ に対して

$$E|A_{k,N}|^p \leq (m_p)^k E|g_k(X_1, X_2, \dots, X_k)|^p N^{\frac{pk}{2}} \quad (4)$$

が成り立つことを示している。また U_N の分散 σ_N^2 は $\xi_k^2 = E[g_k^2(X_1, \dots, X_k)]$ とおくとき,

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 = \text{Var } U_N &= \binom{N}{r}^{-1} \sum_{k=1}^r \binom{p-k}{r-k}^2 \binom{N}{k} \xi_k^2 \\ &= \frac{r^2}{N} \xi_1^2 + \frac{[r(r-1)]^2}{N(N-1)2!} \xi_2^2 + \dots + \frac{r!}{N(N-1)\dots(N-r+1)} \xi_r^2 \end{aligned}$$

となる。

本論では正規分布での近似を考えるので, kernel が degenerate していない, 即ち

$$(A2) \quad E g_1^2(X_1) = \xi_1^2 > 0$$

を仮定する。

モーメントの存在条件を緩めるために, 次の記号を準備す

る。 $N \rightarrow \infty$ の時 $\alpha(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}} \alpha(N) \uparrow \infty$ とする $\alpha(N)$ に対して

$$\beta(N) = \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \alpha(N)} g_1^2(x) dP(X_1 \leq x),$$

$$\gamma(N) = \max(\beta^{\frac{1}{2}}(N), \alpha(N)).$$

とおく。このとき仮定(A1)より、 $N \rightarrow \infty$ の時 $\gamma(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}} \gamma(N) \uparrow \infty$ となりさらに

$$\int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \gamma(N)} g_1^2(x) dP(X_1 \leq x) \leq \gamma^2(N) \quad (5)$$

が成り立つ。

また Stein 法を使うために関数 $g(x)$ と $f(x) = g''(x) - xg(x)$ を考え、次のことを仮定する。

$$(A3) \quad g^{(4)}(x), g^{(2)}(x), g^{(3)}(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x) \text{ が有界で} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(2)}(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(1)}(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(3)}(x)| dx < \infty.$$

この条件を満たすものとしては、 $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ または $g(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 等の関数がある。(Hall and Barbour (1984) 参照)。ここで、部分積分を使うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(4)}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

となる。従って $G \in N(0, 1)$ に従う確率変数とすると $E f(G) = 0$ が成り立つ。

記号として次のものを準備する。

$$d_{k,N} = \sigma_N^{-1} \binom{N}{r}^{-1} \binom{N-k}{r-k} \quad k=1, 2, \dots, r,$$

$$R^1 = N d_{1,N} E [g_1(x_1) \{ f(g + d_{1,N} g_1(x_1)) - f(g) - d_{1,N} g_1(x_1) f'(g) \}],$$

$$R^2 = \frac{1}{2} N(N-1) d_{2,N} E [g_2(x_1, x_2) \{ f^{(2)}(g + d_{1,N}(g_1(x_1) + g_1(x_2))) \\ - f^{(2)}(g) - d_{1,N}(g_1(x_1) + g_1(x_2)) f^{(2)}(g) \}],$$

$$R_N = R^1 - R^2.$$

このとき次の定理が成り立つ。

【定理】 (A1), (A2), (A3) の仮定が成り立つ時, 定数 C が存在して,

$$|R_N| \leq C \{ \Delta + r(N) N^{-\frac{1}{2}} + N^{-1} + \delta_N + \eta_N \}. \quad (6)$$

ここに

$$\delta_N = \left(\sup_x |f^{(4)}(x)| + \sup_x |f^{(3)}(x)| + \sup_x |g^{(2)}(x)| \right) \sum_{k=3}^r d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \xi_k,$$

$$\eta_N = \frac{[r(r-1)]^2 \xi_2^2}{(N-1) 2! r^2 \xi_1^2} + \frac{[r(r-1)(r-2)]^2 \xi_3^2}{(N-1)(N-2) 3! r^2 \xi_1^2} + \dots + \frac{r! \xi_r^2}{(N-1) \dots (N-r+1) r^2 \xi_1^2}.$$

【注意 1】 δ_N, η_N とともに漸近的に $O(N^{-1})$ である。

【注意 2】 Δ と $d_{k,N}$ ($k=1, 2, \dots, r$) の定義の中の σ_N^{-1} の代わりに $N^{\frac{1}{2}}(r\xi_1)^{-1}$ でおきかえても定理の不等式は成り立つ。

3. 定理の証明

簡単のために次の記号を準備する。

$$Y_i = d_{1,N} g_1(X_i), \quad Z_{i,j} = d_{2,N} g_2(X_i, X_j), \quad W = \sum_{i=1}^N Y_i, \\ V = \sum_{i,j} Z_{i,j}, \quad T = W + V, \quad S = \Omega_N^{-1} U_N, \quad L_k = \sum_{i=1}^k Y_i, \\ W_k = W - L_k.$$

また $W^0, T^0, S^0, L_k^0, W_k^0$ はそれぞれ W, T, S, L_k, W_k のコピーで, $X_1, X_2, \dots, X_N$ とは独立とする。

定理の証明の前に次の補題を示す。

〔補題〕 D を W_k と独立で, $ED=0, ED^2<\infty$ となる確率変数とする。また $Q(x)$ を 3 回微分可能で, その微分が有界, かつ $\int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx < \infty$ な関数とする。このとき (A1) の仮定の下で次の不等式が成立する。

$$|E[DAQ(W_k+L_k)] - E[DAQ(G+L_k)] + E[DL_k] E[VQ^{(2)}(W)]| \\ \leq E|DL_k| \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx \Delta + E|DL_k| \left\{ \frac{1}{2} \sup_x |Q^{(3)}(x)| (EL_k^2 + EV^2) \right. \\ \left. + \sup_x |Q^{(2)}(x)| E|S^0 - T^0| \right\} + |E[DV^0\{Q''(W^0+L_k) - Q''(W^0) - L_k Q^{(2)}(W^0)\}]|$$

(証明) $a_1, a_2, \dots, a_5$ を次のようにおく。

$$a_1 = E[DL_k \int_0^1 E\{Q''(W_k+tL_k) - Q''(W^0+tL_k) | Y_1, \dots, Y_k, D\} dt],$$

$$a_2 = E[DL_k \int_0^1 E\{Q''(W^0+tL_k) + V^0 Q^{(2)}(W^0+tL_k) - Q''(T^0+tL_k) | Y_1, \dots, Y_k, D\} dt],$$

$$a_3 = E[DL_k \int_0^1 E\{Q''(T^0+tL_k) - Q''(S^0+tL_k) | Y_1, \dots, Y_k, D\} dt],$$

$$a_4 = E[DL_k \int_0^1 E\{Q''(S^0+tL_k) - Q''(G+tL_k) | Y_1, \dots, Y_k, D\} dt],$$

$$a_5 = E[D V^0 \{Q^{(1)}(W^0 + L_k) - Q^{(1)}(W^0) - L_k Q^{(2)}(W^0)\}].$$

この時 Hall and Barbour (1984) の手法より.

$$E[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W_k + tL_k) | \gamma_1, \dots, \gamma_k, D\} dt] = E[D\{Q(W_k + L_k) - Q(W_k)\}]$$

が成り立つ。他の項についても同様なことが成り立つ。条件より D と W_k は独立で $ED = 0$ であるから

$$\begin{aligned} & |E[DQ(W_k + L_k)] - E[DQ(W_k)] + E[DL_k] E[VQ^{(2)}(W)]| \\ &= |a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5| \leq \sum_{i=1}^5 |a_i|. \end{aligned}$$

ここで L_k^0 と W_k^0 が独立で $EL_k^0 = 0$ より.

$$\begin{aligned} |a_1| &= |E[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W_k + tL_k) + L_k^0 Q^{(2)}(W_k^0 + tL_k) \\ &\quad - Q^{(1)}(W^0 + tL_k) | \gamma_1, \dots, \gamma_k, D\} dt]| \end{aligned}$$

$$\leq E|DL_k| \frac{1}{2} E(L_k^0)^2 \sup_x |Q^{(3)}(x)|.$$

また

$$|a_2| \leq E|DL_k| \frac{1}{2} E(V^0)^2 \sup_x |Q^{(3)}(x)|,$$

$$|a_3| \leq E|DL_k| E|S^0 - T^0| \sup_x |Q^{(2)}(x)|$$

は簡単に示せる。Hall and Barbour (1984) p.109 より 任意の定数 δ に対し

$$|E\{Q^{(1)}(S^0 + \delta) - Q^{(1)}(T^0 + \delta)\}| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx \Delta.$$

従って

$$|a_4| \leq E|DL_k| \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx \Delta.$$

(証明終)

$d_{1,N}$ と $d_{2,N}$ の定義より

$$d_{1,N} \leq N^{-\frac{1}{2}} \zeta_1^{-1}, \quad d_{2,N} \leq r N^{-\frac{3}{2}} \zeta_1^{-1} \quad (7)$$

条件 (A2) と (4) 式より

$$\begin{aligned} & |E f(w) + E [V f''(w)] - E f(S)| \\ & \leq |E f(w) + E [V f''(w)] - f(T)| + |E f(T) - E f(S)| \\ & \leq E(V^2) \frac{1}{2} \sup_{\lambda} |f^{(2)}(x)| + \sup_{\lambda} |f''(x)| \sum_{k=3}^r d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \zeta_k \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{\lambda} |f^{(2)}(x)| (m_2 \zeta_1^{-1} \zeta_2 r)^2 N^{-1} + \sup_{\lambda} |f''(x)| \sum_{k=3}^r d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \zeta_k. \quad (8) \end{aligned}$$

$E f(w)$ と $E [V f''(w)]$ の近似を求める。

($E f(w)$ の近似)

b_1, b_2, b_3 を次のようにおく。

$$b_1 = E [g^{(1)}(w) - g^{(1)}(w_1) - Y_1 g^{(2)}(w_1)],$$

$$b_2 = N E [Y_1 \{g(w_1 + Y_1) - g(w_1) - Y_1 g^{(1)}(w_1)\}],$$

$$b_3 = (1 - N d_{1,N}^2 \zeta_1^2) E [g^{(1)}(w_1)].$$

このとき Y_1 と w_1 は独立で $E Y_1 = 0$ だから、

$$E f(w) = b_1 - b_2 + b_3.$$

(7) より

$$|b_1| \leq \frac{1}{2} \sup_{\lambda} |g^{(3)}(x)| d_{1,N}^2 E[g_1^2(x)] \leq \frac{1}{2} \sup_{\lambda} |g^{(3)}(x)| N^{-1}.$$

また d_N^2 の定義より $|b_3| \leq \eta_N \sup_{\lambda} |g^{(1)}(x)|$ 。

ここですらに

$$\begin{aligned}
b_4 = & N E(\gamma_1^2) E[\vartheta^{(1)}(w_1) + \gamma_1 \vartheta^{(2)}(w_1) - \vartheta^{(1)}(w^0)] \\
& + N E(\gamma_1^2) E[\vartheta^{(1)}(w^0) + V^0 \vartheta^{(2)}(w^0) - \vartheta^{(1)}(T^0)] \\
& + N E(\gamma_1^2) E[\vartheta^{(1)}(T^0) - \vartheta^{(1)}(S^0)] \\
& + N E(\gamma_1^2) E[\vartheta^{(1)}(S^0) - \vartheta^{(1)}(x)]
\end{aligned}$$

とかく、(3) 式より

$$\begin{aligned}
|b_2 - R'| = & |N E[\gamma_1 \{\vartheta(w_1 + \gamma_1) - \vartheta(x + \gamma_1)\}] \\
& + N E(\gamma_1^2) E[V \vartheta^{(2)}(w)] - b_4|.
\end{aligned}$$

(補題) より

$$\begin{aligned}
& N |E[\gamma_1 \{\vartheta(w_1 + \gamma_1) - \vartheta(x + \gamma_1)\}] + E(\gamma_1^2) E[V \vartheta^{(2)}(w)]| \\
& \leq N E(\gamma_1^2) \int_{-\infty}^{\infty} |\vartheta^{(1)}(x)| dx \Delta + N E(\gamma_1^2) \left\{ \frac{1}{2} \sup_x |\vartheta^{(2)}(x)| (E(\gamma_1^2) + E(V^2)) \right. \\
& \quad \left. + \sup_x |\vartheta^{(1)}(x)| E|S^0 - T^0| \right\} + |b_5|. \quad (9)
\end{aligned}$$

ここで $b_5 = N E[\gamma_1 V^0 \{\vartheta^{(1)}(w^0 + \gamma_1) - \vartheta^{(1)}(w^0) - \gamma_1 \vartheta^{(2)}(w^0)\}]$ である。

(4), (7) 及び (A3) より (9) の不等式の第1項と2項は $C\{\Delta + N^{-1}\}$ で押さえられる。また同様にして $|b_4| \leq C\{\Delta + N^{-1}\}$ であることを示せる。

$|b_5|$ の評価のために次の記号を準備する。

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_1(x) &= \begin{cases} g_1(x) & |g_1(w)| \leq N^{\frac{1}{2}} \delta(N) \text{ の時} \\ 0 & \text{他} \end{cases} \\
\widehat{\gamma}_i &= d_{1,N} \widehat{g}_1(x_i).
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
|b_5| &\leq N |E[Y, V^0 \{g^{(1)}(w^0 + \gamma_i) - g^{(1)}(w^0 + \tilde{\gamma}_i)\}]| \\
&\quad + N |E[Y, V^0 \{\tilde{\gamma}_i - \gamma_i\} g^{(2)}(w^0)]| \\
&\quad + N |E[Y, V^0 \{g^{(1)}(w^0 + \tilde{\gamma}_i) - g^{(1)}(w^0) - \tilde{\gamma}_i g^{(2)}(w^0)\}]|.
\end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
&|E[Y, V^0 \{g^{(1)}(w^0 + \gamma_i) - g^{(1)}(w^0 + \tilde{\gamma}_i)\}]| \\
&\leq E|V^0| E|Y_i(\gamma_i - \tilde{\gamma}_i)| \sup_x |g^{(2)}(x)| \\
&\leq E|V^0| d_{1,N}^2 \{E[g_i^2(x_i)]\}^{\frac{1}{2}} \{E[\gamma_i(x_i) - \tilde{\gamma}_i(x_i)]^2\}^{\frac{1}{2}} \sup_x |g^{(2)}(x)|.
\end{aligned}$$

(5) 式より

$$E[\gamma_i(x_i) - \tilde{\gamma}_i(x_i)]^2 = \int_{|g_i(x)| > N^{\frac{1}{2}} r(N)} g_i^2(x) dP(X_i \leq x) \leq r^2(N).$$

従って (4) 式と合わせると

$$N |E[Y, V^0 \{g^{(1)}(w^0 + \gamma_i) - g^{(1)}(w^0 + \tilde{\gamma}_i)\}]| \leq C N^{-\frac{1}{2}} r(N).$$

同様に

$$N |E[Y, V^0 \{\tilde{\gamma}_i - \gamma_i\} g^{(2)}(w^0)]| \leq C N^{-\frac{1}{2}} r(N).$$

また

$$\begin{aligned}
&N |E[Y, V^0 \{g^{(1)}(w^0 + \tilde{\gamma}_i) - g^{(1)}(w^0) - \tilde{\gamma}_i g^{(2)}(w^0)\}]| \\
&\leq N E|V^0| \frac{1}{2} E|\tilde{\gamma}_i|^2 \sup_x |g^{(3)}(x)| \leq N E|V^0| \frac{1}{2} E|\tilde{\gamma}_i| d_{1,N} N^{\frac{1}{2}} r(N) \\
&\leq C N^{-\frac{1}{2}} r(N).
\end{aligned}$$

よって $|b_5| \leq C N^{-\frac{1}{2}} r(N).$

以上をまとめると

$$|E f(w) + R'| \leq C \{ \Delta + N^{-\frac{1}{2}} r(N) + N^{-1} \}. \quad (10)$$

(E[Vf''(w)] の近似)

定義より

$$E[Vf''(w)] = \frac{N(N-1)}{2} E[Z_{1,2} f''(w_2 + L_2)].$$

(3) より $E[Z_{1,2} L_2] = 0$ であるから, (補題) より.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{N(N-1)}{2} E[Z_{1,2} f''(w_2 + L_2)] - R^2 \right| \\ & \leq \frac{1}{2} N(N-1) \left[E|Z_{1,2} L_2| \int_{-\infty}^{\infty} |f'''(x)| dx \Delta + E|Z_{1,2} L_2| \left\{ \frac{1}{2} \sup_x |f'''(x)| \right. \right. \\ & \quad \times (E L_2^2 + E V^2) + \sup_x |f'''(x)| E|S - T| \left. \left. \right\} \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} N(N-1) \left| E[Z_{1,2} V^0 \{ f''(w^0 + L_2) - f''(w^0) - L_2 f'''(w^0) \}] \right|. \end{aligned}$$

ここで (4) の評価と同様に $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ を使って,

$$\frac{1}{2} N(N-1) \left| E[Z_{1,2} V^0 \{ f''(w^0 + L_2) - f''(w^0) - L_2 f'''(w^0) \}] \right| \leq C N^{-\frac{1}{2}} h(N)$$

が成り立つ。従って (4), (7) 及び (A3) より

$$|E[Vf''(w)] - R^2| \leq C \left\{ \Delta + N^{-\frac{1}{2}} h(N) + N^{-1} \right\}. \quad (11)$$

最後に Hall and Barbour (1984) P108 より.

$$|E f(S)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f'''(x) [P(S \leq x) - \Phi(x)] dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'''(x)| dx \Delta. \quad (12)$$

(8), (10), (11) 及び (12) の式をまとめると定理の証明に存る。

4. 3次のモーメントの存在を仮定した結果

定理の結果の (b) 式をもっと分かり易い不等式にすること

を考える。そのために

$$(A4) \quad E |h(x_1, x_2, \dots, x_r)|^3 < \infty$$

を仮定する。

$\alpha(N)$ の時と同様に 次の記号を準備する。 $N \rightarrow \infty$ の時 $\alpha(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}} \alpha(N) \uparrow \infty$ なる $\alpha(N)$ に対して。

$$\nu(N) = \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \alpha(N)} |g_1^3(x)| dP(x_1 \leq x),$$

$$\mu(N) = \max(\nu^{\frac{1}{3}}(N), \alpha(N))$$

とおく。この時 $\mu(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}} \mu(N) \uparrow \infty$ である。

$$\int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \mu(N)} |g_1^3(x)| dP(x_1 \leq x) \leq \mu^3(N) \quad (13)$$

がある。

(A4) の条件の下で

$$R' = N E \left[Y_1 \left\{ g(\alpha + Y_1) - g(\alpha) - Y_1 g'(\alpha) - \frac{1}{2} Y_1^2 g^{(2)}(\alpha) \right\} \right] \\ + \frac{1}{2} N E \left[Y_1^3 g^{(2)}(\alpha) \right]$$

となる。 $\hat{g}_1(x)$ と同様に、

$$g_1^*(x) = \begin{cases} g_1(x) & |g_1(x)| \leq N^{\frac{1}{2}} \mu(N) \text{ の時} \\ 0 & \text{他,} \end{cases}$$

$$Y_{\alpha}^* = d_{1,N} g_1^*(X_{\alpha})$$

とおく。この時 $|h_5|$ の評価と同様にして R' の最初の項の評価が得られる。即ち

$$\begin{aligned}
& |N E [Y_1 \{ g(x+Y_1) - g(x) - Y_1 g'(x) - \frac{1}{2} Y_1^2 g''(x) \}]| \\
& \leq N |E [Y_1 \{ g(x+Y_1) - g(x+Y_1^*) \}]| \\
& + N |E [Y_1 (Y_1^* - Y_1) g''(x)]| \\
& + N |E [Y_1 \frac{1}{2} (Y_1^{*2} - Y_1^2) g''(x)]| \\
& + N |E [Y_1 \{ g(x+Y_1^*) - g(x) - Y_1^* g'(x) - \frac{1}{2} Y_1^{*2} g''(x) \}]|
\end{aligned}$$

となる。これら4つの項について、|45|の評価と同じ方法で
 上限を求めることができる。ここでは第2項についてだけ示
 (7)おく。定義より、

$$\begin{aligned}
& N |E [Y_1 (Y_1^* - Y_1) g''(x)]| \\
& \leq N d_{1,N}^2 E |g_1(x_1) \{ g_1^*(x_1) - g_1(x_1) \}| |E [g''(x)]| \\
& \leq N d_{1,N}^2 \{ E |g_1^3(x_1)| \}^{\frac{1}{3}} \{ E |g_1^*(x_1) - g_1(x_1)|^{\frac{2}{3}} \}^{\frac{2}{3}} |E [g''(x)]|.
\end{aligned}$$

ここで不等式(13)より

$$\begin{aligned}
E |g_1^*(x_1) - g_1(x_1)|^{\frac{3}{2}} &= \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \mu(N)} |g_1(x)|^{\frac{3}{2}} dP(X_1 \leq x) \\
&\leq N^{-\frac{3}{4}} \mu^{-\frac{3}{2}}(N) \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}} \mu(N)} |g_1^3(x)| dP(X_1 \leq x) \\
&\leq N^{-\frac{3}{4}} \mu^{\frac{3}{2}}(N).
\end{aligned}$$

従って(7)式と条件(A4)より、

$$N |E [Y_1 (Y_1^* - Y_1) g''(x)]| \leq C N^{-\frac{1}{2}} \mu(N).$$

他の項も同様にして、結局

$$|N E [Y_1 \{g(x+Y_1) - g(x) - Y_1 g'(x) - \frac{1}{2} Y_1^2 g''(x)\}]| \leq C N^{-\frac{1}{2}} \mu(N)$$

が成り立つ。

R^2 については次の変形ができる。

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{2} N(N-1) E [Z_{1,2} \{f''(x+Y_1+Y_2) - f''(x+Y_1) - Y_2 f''(x+Y_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} Y_2^2 f'''(x+Y_1)\}] \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) E [Z_{1,2} Y_2 \{f''(x+Y_1) - f''(x) - Y_1 f'''(x)\}] \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) E [Z_{1,2} \frac{1}{2} Y_2^2 \{f'''(x+Y_1) - f'''(x)\}] \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) E [Z_{1,2} Y_1 Y_2 f'''(x)]. \end{aligned} \quad (14)$$

R^1 の時と全く同様に

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} N(N-1) |E [Z_{1,2} \{f''(x+Y_1+Y_2) - f''(x+Y_1) - Y_2 f''(x+Y_1) - \frac{1}{2} Y_2^2 f'''(x+Y_1)\}]| \\ &\leq C N^{-\frac{1}{2}} \mu(N). \end{aligned}$$

同様に (14) 式の第 2 項は,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} N(N-1) |E [Z_{1,2} Y_2 \{f''(x+Y_1) - f''(x) - Y_1 f'''(x)\}]| \\ &\leq \frac{1}{2} N(N-1) |E [Z_{1,2} Y_2 \{f''(x+Y_1) - f''(x+Y_1^*)\}]| \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) |E [Z_{1,2} Y_2 (Y_1^* - Y_1) f'''(x)\}]| \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) |E [Z_{1,2} Y_2 \{f''(x+Y_1^*) - f''(x) - Y_1^* f'''(x)\}]| \\ &\leq C N^{-\frac{1}{2}} \mu(N). \end{aligned}$$

第 3 項も $C N^{-\frac{1}{2}} \mu(N)$ で押さえられる。

$g(x)$ 及び $f(x)$ の定義より, 部分積分を使うと

$$E[f^{(r)}(g)] = -r E[g^{(r-1)}(g)].$$

このことに注意すれば次の系が得られる。

【系】 (A1) ~ (A4) を仮定する。このとき定数 C が存在して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} N d_{1,N}^3 |E[g^{(2)}(g)] \{E[g^3(x)] + 3(r-1)E[g_1(x)g_1(x_2)g_2(x_1, x_2)]\}| \\ & \leq C [\Delta + N^{-\frac{1}{2}}(\delta(N) + \mu(N)) + N^{-1} + \varepsilon_N + \eta_N]. \end{aligned}$$

【注意3】 $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の時 $E[g^{(2)}(g)] = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$g(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の時 $E[g^{(2)}(g)] = 0$.

参考文献

- Callaert H, Janssen P (1978) The Berry-Esseen theorem for U-statistics. Ann. Stat. **6**:417-421
- Hall P (1980) Characterizing the rate of convergence in the central limit theorem. Ann. Prob. **8**:1037-1048
- Hall P (1982) Rates of convergence in the central limit theorem. London: Pitman
- Hall P, Barbour A D (1984) Reversing the Berry-Esseen inequality. Proc. American Math. Soc. **90**:107-110
- Hoeffding W (1948) A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Stat. **19**:293-325

- Hoeffding W (1961) The strong law of large numbers for
U-statistics. N.C. Inst. of Statist. Mimeo Series #302
- Maesono Y (1987) Edgeworth expansion for one-sample
U-statistics. Bull. Informatics and Cybernetics
22:189-197
- Rozovskii L V (1978a) A lower bound to the remainder term in
the central limit theorem (Russian). Mat. Zametki
24:403-410
- Rozovskii L V (1978b) On the precision of an estimate of the
remainder term in the central limit theorem. Theor.
Prob. Appl. **23**:712-730
- Stein C (1972) A bound for the error in the normal
approximation to the distribution of a sum of dependent
random variables. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math.
Stat. Prob. Vol.2, Berkeley: U.C. Press, pp.583-602