

# d o p をもつ $\omega$ -categorical $\omega$ -stable な理論について

筑波大 池田 宏一郎

( Kōichirō Ikeda )

【定義】  $\omega$ -stable な理論  $T$  が dimensional order property ( d o p ) をもつとは

$$p \perp M_1 M_2, p \perp M_1, p \perp M_2, M_1 \downarrow M_2 \mid M_0, M_0 \subset M_1, M_0 \subset M_2$$

となるようなモデル  $M_0, M_1, M_2$  およびタイプ  $p$  があることである.

d o p をもつ理論の例として次の理論  $T_1$  がよく知られている.

【例 1】  $E, F$  を無限濃度のクラスを無限個もつ同値関係で  $E$  のクラスと  $F$  のクラスの交わりは常に無限個であるようなものし, 理論  $T_1$  を同値関係  $E, F$  をもつ理論とする.

d o p をもつ理論として更に次の様な理論  $T_2, T_3$  が考えられる.

【例 2】 言語  $L = \{E, V, R\}$ ,  $E, V$  は 1 変数述語,  $R$  を 3 変数述語とする. このとき  $L$  における理論  $T_2$  の公理を次の様にする:  $T_2$  の任意のモデルは  $V$  と  $E$  の合併;  $R \subset V \times V \times E$ ;  $V$  の異なる 2 元  $u, v$  に対して  $R(uve)$  を満たす  $E$  の元  $e$  が無限個ある;  $E$  の元  $e$  に対して  $R(uve)$  を満たす非順序対  $\{u, v\}$  がただ 1 つ決まる.

【例 3】  $A = \omega \times (\mathbb{Z}_2)^\omega$ ,  $R \subset A \times A \times A$  で

$R((a, g), (b, h), (c, k))$  を  $g + h = k$  と定義する. このとき  $T_3 = Th(A, R)$ .

この3つの例はそれぞれ  $\text{dop}$  をもつのであるが更に  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable でもある。そこでここでは  $\text{dop}$  をもつ  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable な理論が与えられたとき、その様な理論は“本質的に”この3つのいずれかである事を示す。その際、次の事実を使う。

【事実1】 strongly minimal  $\omega$ -categorical set は locally modular .

【事実2】  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable な理論は 1-based .

【事実3】  $M$  を  $\omega$ -stable  $\omega$ -categorical transitive な構造とする。このとき任意の  $a \in M$  と  $A \subset M$  に対して  $\text{RM}(c/A) = 1$  なる  $c \in \text{acl}(aA)$  がある。

【事実4】  $D$  が strongly minimal nontrivial locally modular であるとき  $D$  と非直交であるような definable strongly minimal group  $G$  が存在する。

以後、理論  $T$  は  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable であるとする。

【補題1】  $T$  を  $\text{dop}$  をもつ理論とする。このとき次の条件を満たす  $a, b, d, F$  (in  $C^{\omega}$ ) がとれる：

- ①  $d/a b F \perp a F, d/a b F \perp b F, a \downarrow_F b$ .
- ②  $\text{tp}(d/a b F)$  は strictly minimal modular .
- ③  $\text{tp}(a/F), \text{tp}(b/F)$  は strictly minimal modular .

【証明】  $T$  を  $\text{dop}$  をもつ  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable な理論とする。このとき次のことはあきらか。

主張1.  $p \perp a b F, p \perp a F, p \perp b F, a \downarrow b \mid F$ , となるような有限集合  $F$  および  $F$  上 nonalgebraic な  $a, b, c$  および  $c F$  上の stationary type  $p$  が存在する。

主張2.  $\text{tp}(a/F), \text{tp}(b/F)$  は strongly minimal であると仮定し

てよい.

証明.  $tp(a/F)$  について示す. 事実3より  $rk(a'/F) = 1$  であるような  $a' \in acl(aF)$  が取れる. いま  $p \perp a' b F$  であるならば  $a'$  を  $a$  とおもい, 必要ならば  $F$  を  $acl(F)$  に膨らましてやれば  $tp(a/F)$  は strongly minimal. そこで  $p \perp a' b F$  であるとする.  $F' = acl(a' F)$  とする. このとき  $p \perp a b F'$ ,  $p \perp a F'$ ,  $p \perp b F'$ ,  $rk(b/F) = rk(b/F')$  である. 一方,  $rk(a/F) = rk(a/F') + 1$  であるのでこの操作を続けてゆけば  $tp(a/F)$  は strongly minimal と思ってよい.

主張3.  $p$  は strongly minimal であると仮定してよい.

証明. 事実3よりあきらか.

主張4.  $p$  は  $a b F$  上のタイプと思ってよい.

証明.  $p \perp r$  なる strongly minimal type  $r \in S(a b F)$  が存在することを示せば十分. 簡単の為,  $a b F = \emptyset$  とする. 主張3より  $p (= p_0)$  は modular type であると仮定してよい. いま  $p_0 \perp \emptyset$  であるので,  $c' \downarrow c$  かつ  $stp(c') = stp(c)$  なる  $c'$  に対して  $p_0 \perp p_0$  なる  $p_0$  のコピー  $p_0$  がある.  $p_0$  は modular であるので  $d \models p_0 \upharpoonright c c'$  なる  $d$  に対して  $d \downarrow d' \upharpoonright c c'$  なる  $d' \models p_0 \upharpoonright c c'$  が存在する. よって  $d c \downarrow d' c'$ ,  $d c \downarrow c'$ ,  $d' c' \downarrow c$ . いま  $e = c b(d c / d' c')$  とすると 1-based より  $e \in acl(d c) \cap acl(d' c')$ . よって  $r = tp(e)$  とすると  $rk(r) = 1$ ,  $p \perp r$ .

いま strongly minimal type  $p$ ,  $tp(a/F)$ ,  $tp(b/F)$  は strictly minimal であると仮定して構わない. そこで  $d$  を  $p$  の解とすれば  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $F$  は補題を満たしている. ■

【補題2】.  $\langle a, b, d, F \rangle$  が補題1の①, ②, ③を満たすような組であるとする. このとき

- 1)  $tp(a/F) = tp(b/F)$  と思ってよい.
- 2)  $tp(a/F)$ ,  $tp(b/F)$  が共に trivial であるならば,  $a, b \in acl(dF)$ .

【証明】簡単の為、 $F = \emptyset$ とする。

1)  $tp(a) \perp tp(b)$ であるとする  $\text{modularity}$  より

$tp(ab') = tp(a'b)$ となるような  $a' \in \text{acl}(b)$ ,

$b' \in \text{acl}(a)$ が存在する。そこで新たに  $\text{acl}(ab')$ を  $a$ ,

$\text{acl}(a'b)$ を  $b$ としてとりなおせばよい。

2) いまこの主張が成り立たないとすると  $wlog$ ,  $a \notin \text{acl}(d)$ . 故に

$a \downarrow d$ .

主張1.  $b \downarrow d$ .

証明.  $b \downarrow d$ とすると  $b \in \text{acl}(d)$ であるので  $a \downarrow d \mid b$ . これは  $p \perp b$ に矛盾。

主張2.  $tp(a) = tp(b)$ .

証明.  $tp(a) \perp tp(b)$ であるとする  $\text{特に}$   $a \downarrow b \mid d$ . これはやはり  $p \perp a$ に矛盾。

$c = cb(d/ab)$ とする。

主張3.  $c \in \text{acl}(ab)$ ,  $c \downarrow a$ ,  $c \downarrow b$ .

証明.  $c \in \text{acl}(ab)$ はあきらか。また  $tp(d/ab)$ は 1-based であるので  $c \in \text{acl}(d)$ . よって  $a \downarrow d$ ,  $b \downarrow d$ より  $a \downarrow c$ ,  $b \downarrow c$ .

そこで  $r = tp(a) = tp(b)$ ,  $q = tp(c)$ とすると  $r \perp q$ . ここで  $r$ は modular type.  $wlog$ ,  $q$ も modular であると思ってよいので  $\text{acl}(c) = \text{acl}(a')$ なる  $r$ の解  $a'$ がある。主張3より  $a' \downarrow ab$ ,  $a' \downarrow a$ ,  $a' \downarrow b$ であるので  $r$ は nontrivial. これは矛盾。■

【補題3】 $\langle a, b, d, F \rangle$ が補題1の①, ②, ③を満たす様な組であるとし

$c = cb(d/abF)$ とする。このとき  $a, b \in \text{acl}(dF)$ かつ

$tp(a/F) \perp tp(b/F)$ であるならば、

1)  $tp(cd/F) = tp(c'd'/F)$ ,  $c \neq c'$ ならば

$tp(d/cF) \perp tp(d'/cF)$ .

2)  $a, b \in \text{dcl}(cF)$ .

【証明】簡単の為、 $F = \emptyset$ とする。

1)  $c \neq c'$ とする。  $tp(abc) = tp(a'b'c')$ となる  $a'$ ,  $b'$

をとると  $c \in dcl(ab)$  より  $a' \neq a$  もしくは  $b' \neq b$ . そこで3つの場合に分ける.

□場合1.  $a' \neq a, b' = b$  のとき.

$a' \downarrow a$  であるので  $tp(a) \perp tp(b)$  より  $ab \downarrow a'b' \mid b$  がしめせる. 故に  $c \downarrow c' \mid b$ . いま  $tp(d/c) \perp b$  であるので  $tp(d/c) \perp c'$ . 従って  $tp(d/c) \perp tp(d'/c')$ .

□場合2.  $a' = a, b' \neq b$  のとき.

場合1と同様.

□場合3.  $a' \neq a, b' \neq b$  のとき.

$tp(a) \perp tp(b)$  より  $c \downarrow c'$  が示せる. よって  $tp(d/c) \perp \emptyset$  より  $tp(d/c) \perp tp(d'/c')$ .

2) いま  $a, b \in acl(d)$  であるので  $a, b \in acl(c)$ . そこでもし  $a \notin dcl(c)$  であるとするとき  $tp(a) = tp(a')$ ,  $a \neq a'$  なる  $a'$  がとれる. このとき  $tp(a) \perp tp(b)$  より  $\{a, a', b\}$  は独立集合. よって  $2 = rk(ab) = rk(c) \geq rk(aa'b) = 3$  となり矛盾. 故に  $a \in dcl(c)$ .  $b \in dcl(c)$  に関しても同様. ■

【補題4】  $\langle a, b, d, F \rangle$  が補題1の①, ②, ③を満たす様な組であるとする. このとき  $a, b \in acl(dF)$ ,  $tp(a/F) = tp(b/F)$  で trivial であるならば次の様な  $e$  が存在する:  $c = cb(e/abF)$  とするとき

1)  $tp(ce/F) = tp(c'e'/F)$ ,  $c \neq c'$  ならば  $tp(e/cF) \perp tp(e'/cF)$ .

2)  $cF$  上の  $a$  の共役元は  $a, b$  のみ.

【証明】 次の2つの場合に分けてかんがえる. 簡単の為,  $F = \emptyset$  とする.

□場合1.  $tp(a/d) = tp(b/d)$ .

このときは  $e$  として  $d$  をとればよい.  $c = cb(d/ab)$  とするとき1) が成り立つのは補題3の1) とほぼ同様. また 1-based より  $c \in dcl(d)$  であるので  $tp(a/c) = tp(b/c)$  であることもわかる.  $c$  上の  $a$  の共役が  $a, b$  のみであることは補題3. 2) とほぼ同様.

□場合2.  $tp(a/d) \neq tp(b/d)$ .

このとき  $tp(ad) = tp(bd')$  なる  $d'$  をとる.

主張1.  $tp(dd'/ab) \perp a, tp(dd'/ab) \perp b$ .

証明.  $p = tp(d/ab), q = tp(d'/ab)$  とする.  $p \perp q$  であるならば  $tp(dd'/ab) = p \times q$  であるから主張は成り立つ.  $p \perp q$  であるならば,  $p, q$  の modularity より  $d' \in acl(d)$  と思える. よってこの場合も主張は成り立つ.

$\{d, d'\}$  を表す imaginary element を  $e$  とする.  $c = cb(e/ab)$  とする. このとき 1), 2) が成り立つことは場合1と同様.

【定義】1)  $M_1 = (A, E_1, E_2)$  は  $E_1, E_2$  が無限濃度のクラスを無限個もつような  $A$  上の同値関係で任意の  $E_1$  クラス  $(a/E_1)$  と  $E_2$  クラス  $(b/E_2)$  に対して  $|(a/E_1) \cap (b/E_2)| = 1$ , であるような構造.

2)  $M_2 = (P, L, \varepsilon)$  は, 1点を通る直線は無限個あり, 異なる2点を通る直線は丁度1つで, どの直線も丁度2つの点を含むような incidence geometry.

【定理】 $T$  を  $\omega$ -categorical  $\omega$ -stable な理論とする. このとき  $T$  が  $dop$  をもつことと次のことは同値: 有限集合  $F$  と atom  $C$  と

$$(\star) \quad c, c' \in C, c \neq c' \text{ ならば } \phi(x, c) \perp \phi(x, c')$$

を満たすような  $c$   $F$  上の complete formula  $\phi(x, c)$  が存在して, 以下の条件を満たすように構造  $M_1, M_2$ , もしくは群  $(G, \cdot)$  が  $C^{eq}$  の中に  $F$  上定義出来る:

(1) 構造  $M_1$  に関しては:  $A = C$ ;  $c \in A$  に対して

$(c/E_1) \downarrow (c/E_2) \mid F$  かつ  $(c/E_1), (c/E_2)$  は non-algebraic over  $F$ .

(2) 構造  $M_2$  に関しては:  $L = C$ ;  $P$  は strictly minimal atom.

(3) 群  $G$  に関しては:  $G - \{1\} = C$ ;  $G$  は strictly minimal.

【証明】( $\leftarrow$ ) 1) 構造  $M_1$  が (1) のように定義されているとする.

$p_c = \phi(x, c), a = (c/E_1), b = (c/E_2)$  とする. 簡単の為,  $F = \emptyset$  とする. このとき  $T$  が  $dop$  をもつ為にはつぎの事が示せばよい.

主張.  $p \perp a b, p \perp a, p \perp b. a \downarrow b, tp(a), tp(b)$  は nonalgebraic.

証明.  $a, b$  が独立で nonalgebraic であることは (1) よりあきらか.

$c \in acl(ab)$  より  $p \perp a b$  も明か. いま

$stp(c'/a) = stp(c/a), c' \downarrow c | a$  を満たす  $c'$  を取ったとき,  $a \downarrow b$  であることより  $c \neq c'$ . よって  $p \perp p.$  であるので  $p \perp a.$

$p \perp b$  に関しても同様.

2) 構造  $M_2$  が (2) のように定義されているとする.  $p_0 = \phi(xc)$  とする.

$a, b \in c$  なる  $a, b \in P$  をとる. このとき

主張.  $p_0 \perp a b, p_0 \perp a, p_0 \perp b. a \downarrow b, tp(a), tp(b)$  は nonalgebraic.

証明.  $P$  が strictly minimal であることより  $a \downarrow b$ . 更に

$tp(a) = tp(b)$  も non-algebraic.  $p_0 \perp a b, p_0 \perp a, p_0 \perp b$  については 1) と同様.

3) 群  $G$  が (3) のように定義されているとする.  $G$  が  $p_0 = \phi(xc)$  とする.

このとき (★) より  $p_0 \perp \emptyset$ . いま  $G$  が strictly minimal であることより

$c = a \cdot b, c \downarrow a, c \downarrow b, a \downarrow b$  なる  $a, b$  が取れる.

主張.  $p_0 \perp a b, p_0 \perp a, p_0 \perp b$ .

証明.  $c \in acl(ab)$  より  $p_0 \perp a b$  については ok. また  $p_0 \perp \emptyset, c \downarrow a$  であるので  $p_0 \perp a. p_0 \perp b$  に関しても同様.

(→) 理論  $T$  は  $dop$  をもつとすると補題 1 より ①②③ を満たす

$\langle a, b, d, F \rangle$  がある. 簡単の為,  $F = \emptyset$  とする. 補題 2 より  $a, b, d$  は次の 3 つの場合のいずれかを満たしていると考えられる:

場合 1.  $a, b \in acl(d), tp(a) \perp tp(b).$

場合 2.  $a \in acl(d), tp(a) = tp(b);$  trivial.

場合 3.  $tp(a)$  もしくは  $tp(b)$  は nontrivial.

□ 場合 1.  $c = cb(d/ab), C = tp(c)$  とする.  $\phi(xc)$  を

$tp(d/c)$  を生成する atom とする. このとき補題 3. 1) より

主張 1.  $c, c' \in C, c \neq c'$  ならば  $\phi(xc) \perp \phi(xc').$

いま補題 3. 2) より  $a, b \in dcl(c)$  であるので  $f(d) = a,$

$g(d) = b$ なる定義可能関数  $f, g$  が存在する.  $A = C$  とする. このとき  $A$  上の2変数述語  $E_1(xy), E_2(xy)$  をそれぞれ  $f(x) = f(y),$

$g(x) = g(y)$  と定義する. このとき

主張2. 構造  $(A, E_1, E_2)$  は  $M_1$ .

証明.  $E_1, E_2$  が無限濃度のクラスを無限個もつような同値関係であることはあきらか.  $c_1/E_1, c_2/E_2$  をそれぞれ任意の  $E_1$  および  $E_2$  クラスとする. このとき  $a_1 = f(c_1), b_2 = g(c_2)$  とすると  $tp(a) \perp tp(b)$  より  $a_1 \downarrow b_2$ . よって  $a_1 b_2 \equiv a b$  であるので  $f(c') = a_1, g(c') = b_2$  をみたす  $c'$  がただ一つ存在する.

主張3.  $c/E_1 \downarrow c/E_2, c/E_1, c/E_2$  は nonalgebraic  $\neq \emptyset$ .

証明.  $dcl(c/E_1) = dcl(a), dcl(c/E_2) = dcl(b)$  であるので.

口場合2. 補題4の  $e, c$  に対して  $C = tp(c), \phi(xc)$  を  $tp(e/c)$  を生成する論理式とする. このとき

主張1.  $c, c' \in C, c \neq c'$  ならば  $\phi(xc) \perp \phi(xc')$ .

$L = C, P = tp(a) = tp(b)$  とする.  $x \varepsilon y$  を  $tp(xy) = tp(ac)$  と定義する. このとき補題4より  $tp(ac) = tp(bc)$  に注意すると次のことが示せる.

主張2. 構造  $(L, P, \varepsilon)$  は  $M_2$ .

主張3.  $P$  は strictly minimal.

口場合3.  $Wlog, tp(a)$  が nontrivial であるとする. このとき  $tp(a/b)$  も nontrivial modular である. さらに  $d/ab \perp b$  である. 簡単の為,  $b = \emptyset$  とする. このとき事実4より

主張1.  $tp(a) \perp G$  であるような strictly minimal definable group  $G$  が存在する.

$C = G - \{1\}$  とする.  $tp(a)$  および  $G$  の modularity より  $acl(a) = c$  なる  $c \in C$  がある. このとき

主張2.  $d/c \perp \emptyset$ .

証明.  $tp(d/a)$  と  $tp(d/c)$  は平行であるので  $d/a \perp \emptyset$  より.

$\phi(xc)$  を  $tp(d/c)$  を生成している論理式とする.



主張3.  $c, c' \in C, c \neq c'$  ならば  $\phi(xc) \perp \phi(xc')$ .

証明.  $c \neq c'$  とすると  $C$  の strict minimality より  $c \downarrow c'$ . よって主張2より  $\phi(xc) \perp \phi(xc')$ . ■