

Pauli 方程式の基本解の新しい構成法について 非可換解析と非可換幾何へ

井上 淳 (Atsushi Inoue 東工大 理)
前田吉昭 (Yoshiaki Maeda 慶大 理工)

1989 年 4 月 15 日

要 旨

1927 年 Pauli により提唱され (翌 1928 年 Dirac 方程式が創られその脚光の影に隠れてしまっ) た、spin をもった Schrödinger 方程式を Pauli 方程式という。この方程式の初期値問題に関する基本解を superanalysis (= superspace 上の解析) を用いて構成する。ここで用いる解析は Dirac 方程式の解法に用いる事が出来るのは勿論だが、一般の (対角化可能でない) 微分方程式系の取り扱いに新しい方法を与えるものと考えられる。

1 問題設定

$\mathbb{R}^m$ 上で次の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = (H\psi)(q,t), \\ \psi(q,0) = \psi(q). \end{cases} \quad (1)$$

但し、

$$H = - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\hbar}{i} \partial_{q_j} - A_j(q) \right)^2 + \frac{\hbar}{2i} \sum_{j,k=1}^m F_{jk}(q) \gamma^j \gamma^k + \Phi(q). \quad (2)$$

ところで (2) は、次のように書き換えられる。

$$H = \mathcal{D}_A^2 + \Phi(q), \quad \mathcal{D}_A = \sum_{j=1}^m \gamma^j \left(\frac{\hbar}{i} \partial_{q_j} - A_j(q) \right). \quad (3)$$

ここで、 $F_{jk}(q)$ は $\mathbb{R}^m$ 上で与えられる滑らかな external gauge potential $A = \sum_{j=1}^m A_j(q) dq_j$ により

$$F_{jk} = \partial_{q_j} A_k - \partial_{q_k} A_j \quad (4)$$

と書かれ、 $\Phi(q)$ は $\mathbf{R}^m$ 上で与えられる 滑らかな potential function、 $\{\gamma^j\}_{j=1}^m$ は次式を満たす ((Euclidean) Dirac 行列と呼ばれる) $r \times r$ -Hermite 行列

$$\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j = -2\delta_{jk} \quad (5)$$

を用いて表現される。この時、 $\psi(q, t)$ は $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ 上の各点 (q, t) で定義される $\mathbf{C}^r$ 値の関数となる。但し $r = 2^l$ 、 $l = [m/2]$ 、 $[\cdot]$ は Gauss 記号。

考え方を明らかにするために Feynman の heuristic argument を思い出そう。(Copenhagen 解釈によると) 量子力学においては、時刻 t における一粒子の状態は配位空間 $\mathbf{R}^m$ 上の Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R}^m)$ の元 $u(x, t)$ で表され次の Schrödinger 方程式を満たすとされている。

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\hbar^2}{2M} \Delta u(x, t) + V(x) u(x, t), \quad u(x, 0) = \phi(x). \quad (6)$$

ここで

$$H = \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\cdot) = H_0 + V \quad (7)$$

は $L^2(\mathbf{R}^m)$ 上の自己共役作用素を定め、 $e^{-\frac{i}{\hbar} t H}$ は強連続な ユニタリ群を生成する。故に Stone の定理より上の問題は 次の形の解をもつ。

$$u(x, t) = (e^{-\frac{i}{\hbar} t H} \phi)(x). \quad (8)$$

一方 Lie-Kato-Trotter の積公式より

$$e^{-\frac{i}{\hbar} t H} = s - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{t}{k} V} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{t}{k} H_0} \right)^k \quad (9)$$

となる。初期値 ϕ の性質が良い時は

$$(e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{t}{k} H_0} \phi)(x) = (2\pi i \frac{\hbar}{M} t)^{-m/2} \int e^{iM(x-y)^2/2\hbar t} \phi(y) dy \quad (10)$$

と表されるので

$$(e^{-\frac{i}{\hbar} t H} \phi)(x) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi i \frac{\hbar}{M} t)^{-m/2} \int \dots \int e^{\frac{i}{\hbar} S_t(x_k, \dots, x_0)} \phi(x_0) dx_0 \dots dx_{k-1} \quad (11)$$

となる。ここで $x_k = x$ 、また

$$S_t(x_k, \dots, x_0) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{M}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(t/k)^2} - V(x_j) \right] \frac{t}{k} \quad (12)$$

とおいた。Feynman は $\gamma(t) = x$ となる path $\gamma(\cdot)$ に対して上の $S_t(x_k, \dots, x_0)$ の $k \rightarrow \infty$ での極限が

$$S_t(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau, \quad L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) = \frac{M}{2} \dot{\gamma}(\tau)^2 - V(\gamma(\tau)) \quad (13)$$

となり、そして形式的に path space 上の測度を $d\gamma = (\text{normalizing constant}) \Pi_{0 \leq \tau \leq t} d\gamma(\tau)$ とすると、(11) は次の表示を持つことに注目した。

$$\int_{C_{t,x}} e^{\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma)} \phi(\gamma(0)) d\gamma \quad \text{where } C_{t,x} = \{\gamma \in C([0, t]; \mathbb{R}^m); \gamma(t) = x\}. \quad (14)$$

よく知られているように、 $d\gamma$ が悪名高くそして魅力的な Feynman 測度である。

藤原 [9] は 1979 年 Schrödinger 方程式の基本解の構成という形で上の議論を正当化した。より正確には、potential V が滑らかで $|\alpha| \geq 2$ に対して $|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha$ となる時、古典力学より定まる量を用いて parametrix を構成しそれが $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上で有界に成ることを示した後、時間の分割を細かくしていく時 対応する作用素の積が求めたい基本解に様に収束する事を証明した。彼の議論は Lagrangian formulation に基づき Fourier 変換を用いないものであった。それ故 $\mathbb{R}^m$ でなく より一般の多様体上の 熱方程式に対して 適用できて、物理学者のいう $(1/12)R$ の問題 (quantization problem on curved manifold) に数学としての一つの解答を与えることが出来た (井上-前田 [13])。 (古典力学的量から量子力学的量を作り出す事を、広い意味での量子化と云おう。)

さて古典力学は Lagrangian formulation から Hamiltonian formulation へと拡張されたが、その考えで 北田 [16]、そして Intissar [15] は Hamilton 関数 $H(t, x, \xi)$ に対する量子化を与えた。すなわち 適当な $H(x, \xi)$ に対して

$$(H^w(x, D)\phi)(x) = (2\pi\hbar)^{-m} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi} H\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \phi(y) dy d\xi \quad (15)$$

とおくと、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H^w(x, D)\psi, \quad \psi(0) = \psi \quad (16)$$

の初期値問題の基本解、より正確には parametrix は

$$(E^w(t, s)\psi)(x) = (2\pi\hbar)^{-m} \iint \mu_H(t, s, \frac{x+y}{2}, \xi) e^{\frac{i}{\hbar}\{(x-y)\xi + \phi_H(t, s, \frac{x+y}{2}, \xi)\}} \psi(y) dy d\xi \quad (17)$$

なる形で与えられる。但し、 $z = (x, \xi)$ 、 $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ とし、

$$\begin{cases} \partial_t \phi_H(t, s, z) + H(z - \frac{1}{2} J \partial_z \phi_H(t, s, z)) = 0, \\ \phi_H(t, t, z) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \partial_t \mu_H(t, s, z) + \langle J \partial_z H(z - \frac{1}{2} J \partial_z \phi_H(t, s, z)), \partial_z \mu_H \rangle - \frac{1}{8} \text{tr}(H'' J \phi_H'' J) \mu_H = 0, \\ \mu_H(t, t, z) = 1. \end{cases} \quad (19)$$

但し、 H'' と ϕ_H'' は H と ϕ_H それぞれの Hessian 行列の $z - (1/2)J\partial_z \phi_H(t, s, z)$ での値とする。上式より $\phi_H(t, s, x, \xi)$ は Hamilton-Jacobi 方程式を、 $\mu_H(t, s, x, \xi)$ は 連続の方程式を満たす事がわかる。

ここで Feynman & Hibbs [8] の 355 頁より次を引用しよう：

“... path integrals suffer grievously from a serious defect. They do not permit a discussion of spin operators or other such operators in a simple and lucid way. They find their greatest use in systems for which coordinates and their conjugate momenta are adequate. Nevertheless, spin is a simple and vital part of real quantum-mechanical systems. It is a serious limitation that the half-integral spin of the electron does not find a simple and ready representation. It can be handled if the amplitudes and quantities are considered as quaternions instead of ordinary complex numbers, but the lack of commutativity of such numbers is a serious complication.”

もう一つ、岩波現代物理学の基礎 量子力学 I (第2版) 246 頁より:

スピン角運動量の演算子は軌道角運動量 $L = x \times p$ のように正準変数で表す事が出来ない。あるのは行列表示のみである。

我々は、Pauli 方程式を行列及びそれが働く縦ベクトルとして表現せずに、非可環代数上に単独の方程式が与えられたと考える。これにより、Pauli 方程式に対応する古典的 Hamiltonian (= super Hamiltonian) を定めることが出来、それから決まる古典力学 (= pseudo classical mechanics) を考え Intissar 等の議論を繰り返す事ができる。即ち、Feynman の言の最後の部分を quaternion algebra ではなく Grassmann algebra を持ちいる事によってほぼ裏付け、更に上の日本語の引用とは異なり スピン角運動量の演算子は非可換体上の古典力学を考える事により正準変数 (の Fourier 変換) で表しうる事になる。これの具体的表示とか、我々の構成した基本解の kernel の各点収束等は近い将来に論じる事にする。また、何故 (Dirac でなく) 今更 Pauli 方程式かという疑問にはこれも別の機会に論じよう。(詳しくは、井上-前田 [14] を参照。)

なおこの文の最後に、Schrödinger 方程式と Pauli 方程式の基本解の構成法の比較を一覧表にしておく。

2 Clifford algebras, spinors と super Hamiltonian

正定値の内積 $(\cdot, \cdot)$ をもった N 次元の実ベクトル空間 V_N を考え、 $\{e_A\}_{A=1}^N$ をその正規直交基底とする。基底の間に積 $e_A e_B$ (Clifford 積) を

$$[e_A, e_B]_+ = e_A e_B + e_B e_A = -2\delta_{AB} \quad (20)$$

なるように定義し、Clifford algebra $Cl(V_N)$ を次のように導入する。

$$w = \sum_{|a| \leq N} w_a e^a \quad \text{with } w_a \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

以下 $a, b, c, \dots$ は各成分が 0 或は 1 の多重添字で $a = (a_1, \dots, a_N) \in \{0, 1\}^N$ に対し $|a| = \sum_{A=1}^N a_A$, $e^a = e_1^{a_1} \cdots e_N^{a_N}$ とする。((20) に現れた Clifford 積の具体的な構成に関しては Brackx, Delanghe & Sommen [3] 等を見よ。)

$N = 2l$ の場合は V_N に新しいベクトル $\{e_{-1}, e_0\}$ を付け加えた空間 V_{N+2} に内積を拡張し $\{e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_N\}$ が正規直交基底となるようにし、 $j = 0, 1, \dots, l$ に対し

$$\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j-1} + ie_{2j}), \quad \bar{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j-1} - ie_{2j}) \quad (22)$$

とおく。 $N = 2l + 1$ の時は $\{e_0, e_1, \dots, e_N\}$ を V_{N+1} の正規直交基底にとり $j = 0, 1, \dots, l$ に対し

$$\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j} + ie_{2j+1}), \quad \bar{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j} - ie_{2j+1}) \quad (23)$$

とおく。こうすると N の偶奇にかかわらず、 $j, k = 0, 1, \dots, l$ に対し

$$[\sigma_j, \sigma_k]_+ = 0, \quad [\bar{\sigma}_j, \bar{\sigma}_k]_+ = 0 \quad \text{and} \quad [\sigma_j, \bar{\sigma}_k]_+ = -2\delta_{jk} \quad (24)$$

が成立する。

定義 2.1 1. $Gr(l+1)$ を $\{1, \sigma_0, \dots, \sigma_l\}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上の free algebra、 $\bar{Gr}(l+1)$ を $\{1, \bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_l\}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上の free algebra とし、それらを polarized Grassmann algebras と呼ぶ。

2. $Gr(l+1)$ (resp. $\bar{Gr}(l+1)$) の元で

$$\psi = \sum_{|a|=even} \psi_a \sigma^a \quad \text{with} \quad \psi_a \in \mathbb{C} \quad (\text{resp.} \quad \psi = \sum_{|b|=even} \psi_b \bar{\sigma}^b \quad \text{with} \quad \psi_b \in \mathbb{C}) \quad (25)$$

と表されるものを S (resp. $\bar{S}$) とおき、 $\psi \in S$ は spinor (resp. $\bar{\psi} \in \bar{S}$ は anti-spinor) という。 S (resp. $\bar{S}$) は複素 2^l -次元ベクトル空間をなす。

3. (複素) 共役 $*$: $S \rightarrow \bar{S}$ (resp. $*$: $\bar{S} \rightarrow S$) を (25) で表示される ψ に対して $*\psi = \sum_a \bar{\psi}_a \bar{\sigma}_a$ (resp. $*\psi = \sum_b \bar{\psi}_b \sigma_b$) と定義すると $*^2 = Id$ を満たす。 $\psi, \psi' \in S$ に対し内積を

$$(\psi, \psi') = \psi \rfloor * \psi' = \sum_a \psi_a \bar{\psi}'_a \quad (26)$$

によって定める。ここで、 S は 2^l 次元の exterior algebra、 $\bar{S}$ はその dual と考えられ、 $\rfloor$ は S と $\bar{S}$ の間の interior product とする。また、 $\psi \in S$ のノルムを $|\psi|^2 = (\psi, \psi)$ と定める。 ($|\cdot|$ は色々な意味に使われているが混乱はないだろう。)

少々天下りのだが、 $Cl(V_N)$ の spinors 上への表現 ρ_0

$$[\rho_0(e_A), \rho_0(e_B)]_+ = \rho_0([e_A, e_B]_+) = -2\delta_{AB} \quad \text{for } A, B = 1, \dots, N \quad (27)$$

を次のように定める。 $N = 2l$ の時は $j = 1, \dots, l$ に対し

$$\begin{cases} \rho_0(e_{2j-1}) = (\sigma_0 + \bar{\sigma}_0)(\sigma_j + \bar{\sigma}_j), \\ \rho_0(e_{2j}) = i(\sigma_0 + \bar{\sigma}_0)(\sigma_j - \bar{\sigma}_j) \end{cases} \quad (28)$$

とおき、 $N = 2l + 1$ の時は $j = 1, \dots, l$ に対し

$$\begin{cases} \rho_0(e_{2j-1}) = i(\sigma_0 + \bar{\sigma}_0)(\sigma_j - \bar{\sigma}_j), \\ \rho_0(e_{2j}) = -(\sigma_0 + \bar{\sigma}_0)(\sigma_j + \bar{\sigma}_j), \\ \rho_0(e_{2l+1}) = i(\sigma_0 + \bar{\sigma}_0)(\sigma_0 - \bar{\sigma}_0) \end{cases} \quad (29)$$

とおく。例えば、 $N = 3$ の時

$$\rho_0(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とできる。

定義 2.2 1. $\mathbf{R}^m$ 上の二つの *vector bundles* $\pi : \mathcal{S} = \mathbf{R}^m \times S \rightarrow \mathbf{R}^m$ と $\bar{\pi} : \bar{\mathcal{S}} = \mathbf{R}^m \times \bar{S} \rightarrow \mathbf{R}^m$ は、それぞれ *spin bundle*、*anti-spin bundle* と呼ばれる。

2. $\Gamma(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ 上の連続な *sections*, $\Gamma_0(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ 上の連続な *sections* で $\mathbf{R}^m$ 上コンパクトな台を持つものとする。 $\Gamma^\infty(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ 上の滑らかな *sections*、 $\Gamma_0^\infty(\mathcal{S})$ で $\Gamma^\infty(\mathcal{S}) \cap \Gamma_0(\mathcal{S})$ を表す。

3. (25) を用いて、 $\Gamma_0(\mathcal{S})$ に内積とノルムを

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int_{\mathbf{R}^m} (\psi(q), \psi'(q)) dq, \quad \|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle \quad (30)$$

と定める。また、 $L^2(\mathcal{S})$ で $\Gamma_0(\mathcal{S})$ の完備化を表し $\mathcal{S}$ 上の二乗可積分な *sections* という。

次に無限次元の Grassmann algebra Λ^G 及びそれから定まる superspace を用意し、 $\Gamma^\infty(\mathcal{S})$ の元とその superspace 上の偶 superdifferentiable 関数の対応を定める: $(m, l+1)$ 次元 superspace $\mathbf{R}^{m, l+1}$ の偶座標を $x_1, \dots, x_m$ 、奇座標を $\theta_0, \dots, \theta_l$ とし、 $\mathbf{R}^{m, l+1}$ 上の偶 superdifferentiable 関数全体を $C_e^\infty(\mathbf{R}^{m, l+1})$ 、写像 $\# : \Gamma^\infty(\mathcal{S}) \rightarrow C_e^\infty(\mathbf{R}^{m, l+1})$ を

$$(\# \psi)(x, \theta) = \sum_{|a|=\text{even}} \psi_a(x) \theta^a \quad (31)$$

と定義する。ここで $\psi(q) = \sum_{|a|=even} \psi_a(q) \sigma^a$, $\psi_a(x)$ は $\psi_a(q) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ の偶の Grassmann continuation である。逆に、 $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}^{m,0}$ 上の点の body part と考えて $u(x, \theta) \in C_e^\infty(\mathbb{R}^{m,l+1})$ に対し

$$(bu)(q) = u(q_1, \dots, q_m, \sigma_0, \dots, \sigma_l) \quad (32)$$

と定める。ここで $C_{e0}^\infty(\mathbb{R}^{m,l+1})$ 上の L^2 -ノルム $\|\cdot\|$ を標準的に定めると $\psi \in \Gamma_0^\infty(S)$ と $u \in C_{e0}^\infty(\mathbb{R}^{m,l+1})$ の間に次式が成立する。

$$\|\# \psi\| = \|\psi\|, \quad \|bu\| = \|u\|. \quad (33)$$

これより、正の定数 $\hbar$ ($0 < \hbar \leq 1$) と上に定めた $\#$ と b を用いて、 $Cl(V_N)$ の表現で $\# \rho b$ が $\mathbb{R}^{m,l+1}$ 上の偶の微分作用素なるものを構成できる。即ち、 $N = 2l$ の時 $j = 1, \dots, l$ に対して

$$\begin{cases} \rho(e_{2j-1}) = \frac{i}{\hbar} b(\theta_0 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0})(\theta_j + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}) \#, \\ \rho(e_{2j}) = \frac{-1}{\hbar} b(\theta_0 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0})(\theta_j - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}) \# \end{cases} \quad (34)$$

とおく。 $N = 2l + 1$ の時 $j = 1, \dots, l$ に対しては

$$\begin{cases} \rho(e_{2j-1}) = \frac{-1}{\hbar} b(\theta_0 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0})(\theta_j - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}) \#, \\ \rho(e_{2j}) = \frac{-i}{\hbar} b(\theta_0 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0})(\theta_j + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}) \#, \\ \rho(e_{2l+1}) = \frac{-1}{\hbar} b(\theta_0 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0})(\theta_0 - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_0}) \# \end{cases} \quad (35)$$

とおく。これらの表現と Appendix で定めた Fourier 変換を用いると、(2) で与えられた作用素の symbol $H = H(x; \xi, \theta; \pi)$ が $H(x; \xi, \theta; \pi) = H_B + H_S$ と定義できる。ここで、

$$H_B = H_B(x; \xi, \theta; \pi) = \sum_{\mu=1}^m (\xi_\mu - A_\mu(x))^2 + \Phi(x). \quad (36)$$

また、 $H_S = H_S(x; \xi, \theta; \pi)$ は次のように与えられる。

• $m = 2l$ の時

$$\begin{aligned} H_S = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \{ & (F_{2j,2k}(x) - F_{2j-1,2k-1}(x) - 2iF_{2j,2k-1}(x))\theta_j\theta_k \\ & + (F_{2j,2k}(x) - F_{2j-1,2k-1}(x) + 2iF_{2j,2k-1}(x))\pi_j\pi_k \\ & - 2(F_{2j,2k}(x) + F_{2j-1,2k-1}(x) - iF_{2j-1,2k}(x) + iF_{2j,2k-1}(x))\theta_j\pi_k \}. \end{aligned} \quad (37)$$

• $m = 2l + 1$ に対しては

$$H_S = \sum_{k=1}^l \{ (F_{2l+1,2k-1}(x) + iF_{2l+1,2k}(x))\theta_0\theta_k + (F_{2l+1,2k-1}(x) - iF_{2l+1,2k}(x))\pi_0\pi_k$$

$$\begin{aligned}
& -(F_{2l+1,2k-1}(x) - iF_{2l+1,2k}(x))\theta_0\pi_k + (F_{2l+1,2k-1}(x) + iF_{2l+1,2k}(x))\theta_k\pi_0\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \{ -(F_{2j,2k}(x) - F_{2j-1,2k-1}(x) - 2iF_{2j,2k-1}(x))\theta_j\theta_k \\
& \quad - (F_{2j,2k}(x) - F_{2j-1,2k-1}(x) + 2iF_{2j,2k-1}(x))\pi_j\pi_k \\
& \quad - 2(F_{2j,2k}(x) + F_{2j-1,2k-1}(x) - iF_{2j-1,2k}(x) + iF_{2j,2k-1}(x))\theta_j\pi_k \}. \quad (38)
\end{aligned}$$

例えば、 $m = 2$ の時

$$H_S = i(F_{12}(x) - F_{21}(x))\theta_1\pi_1,$$

$m = 3$ に対しては

$$\begin{aligned}
H_S = & (F_{31}(x) + iF_{32}(x))\theta_0\theta_1 + (F_{31}(x) - iF_{32}(x))\pi_0\pi_1 \\
& - (F_{31}(x) - iF_{32}(x))\theta_0\pi_1 + (F_{31}(x) + iF_{32}(x))\theta_1\pi_0 - i(F_{12}(x) - F_{21}(x))\theta_1\pi_1
\end{aligned}$$

となる。

3 Super Hamiltonian と Super oscillatory integral.

以下、この節では $l = [m/2]$ を仮定しない一般の次元で考える。super cotangent space $T^*\mathbf{R}^{m,l+1} = \mathbf{R}^{2m,2l+2}$ 上に次の仮定を満たす super Hamiltonian 関数 $H(x; \xi, \theta; \pi)$ を与える。

仮定 A.

$$(A.1) \quad H(x; \xi, \theta; \pi) \in C_e^\infty(\mathbf{R}^{2m,2l+2}).$$

$$(A.2) \quad H(x_B; \xi_B, 0; 0) \text{ は } T^*\mathbf{R}^m \text{ 上の実数値関数。}$$

$$(A.3) \quad |\alpha| + |\beta| + |a| + |b| \geq 2 \text{ をみたす } \alpha, \beta, a \text{ と } b \text{ に対し次を満たす正の定数 } C_{\alpha, \beta, a, b} \text{ がある。}$$

$$|(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\partial}_\theta^a \tilde{\partial}_\pi^b H)(x_B; \xi_B, 0; 0)| \leq C_{\alpha, \beta, a, b}. \quad (39)$$

これに対応する古典力学的運動を表す次の super Hamiltonian flow を考察しよう。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \partial_\xi H(x(t); \xi(t), \theta(t); \pi(t)) = \{H, x\}, \\ \frac{d}{dt}\xi(t) = -\partial_x H(x(t); \xi(t), \theta(t); \pi(t)) = \{H, \xi\}, \\ \frac{d}{dt}\theta(t) = -\tilde{\partial}_\pi H(x(t); \xi(t), \theta(t); \pi(t)) = \{H, \theta\}, \\ \frac{d}{dt}\pi(t) = -\tilde{\partial}_\theta H(x(t); \xi(t), \theta(t); \pi(t)) = \{H, \pi\}. \end{cases} \quad (40)$$

ここで $t = s$ での初期値を

$$(x(s); \xi(s), \theta(s); \pi(s)) = (y; \eta, \omega; \rho) \in T^*\mathbf{R}^{m,l+1} \quad (41)$$

とする。(但し、 $\{\cdot, \cdot\}$ は super Poisson bracket である。) 上の super Hamiltonian 方程式に関する初期値問題 (40), (41) は仮定 A のもとで一意的に、かつ時間に関し大域的に解け、その解を $(x(t, s); \xi(t, s), \theta(t, s); \pi(t, s))$ 或は $(x(t, s, y; \eta, \omega; \rho); \xi(t, s, \dots), \theta(t, s, \dots); \pi(t, s, \dots))$ と表示する。更に、十分小さい $\delta_1 > 0$ と $|t - s| < \delta_1$ を満たす任意の t, s 及び任意にとつた (η, ρ) に対し写像

$$(y, \omega) \in T^*\mathbf{R}^{m, l+1} \rightarrow (x(t, s, y; \eta, \omega; \rho), \theta(t, s, y; \eta, \omega; \rho)) \in T^*\mathbf{R}^{m, l+1} \quad (42)$$

は、空間に関し大域的な diffeomorphism を与える。これより $T^*\mathbf{R}^{m, l+1}$ 上に

$$y = y(t, s, x; \eta, \theta; \rho), \quad \omega = \omega(t, s, x; \eta, \theta; \rho) \quad (43)$$

なる写像が定義される。ここで

$$L(x; \xi, \theta; \pi) = \sum_{j=1}^m \xi_j \partial_{\xi_j} H(x; \xi, \theta; \pi) + \sum_{r=0}^l \pi_r \vec{\partial}_{\pi_r} H(x; \xi, \theta; \pi) - H(x; \xi, \theta; \pi), \quad (44)$$

$\langle \xi | y \rangle = \sum_{j=1}^m \xi_j y_j$, $\langle \rho | \omega \rangle = \sum_{r=0}^l \rho_r \omega_r$ とおく。また、

$$u(t, s, y; \eta, \omega; \rho) = \langle \eta | y \rangle - \langle \rho | \omega \rangle + \int_s^t L(x(\tau); \xi(\tau), \theta(\tau); \pi(\tau)) d\tau, \quad (45)$$

$$\phi(t, s, x; \eta, \theta; \rho) = u(t, s, y(t, s, x; \eta, \theta; \rho); \eta, \omega(t, s, x; \eta, \theta; \rho); \rho) \quad (46)$$

と定義する。更に、

$$J(t, s, x; \eta, \theta; \rho) = s \det \begin{bmatrix} \partial_x y(t, s) & \vec{\partial}_\theta y(t, s) \\ \partial_x \omega(t, s) & \vec{\partial}_\theta \omega(t, s) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mu(t, s, x; \eta, \theta; \rho) = J(t, s, x; \eta, \theta; \rho)^{1/2} \quad (48)$$

とおく。但し、 $s \det A$ は行列 A の super determinant である。 ϕ 及び μ はそれぞれ Hamiltonian $H(x; \xi, \theta; \pi)$ に関する Hamilton-Jacobi の方程式 及び連続の方程式を満たす事が示される。

上で定めた ϕ と μ を用いて $u \in C_{\infty}^\infty(\mathbf{R}^{m, l+1})$ に対し積分変換を次のように定義する。

$$(E(t, s)u)(x, \theta) = (2\pi\hbar)^{-m/2} \hbar^{(l+1)/2} \iota_{l+1} \int_{\mathbf{R}^{m, l+1}} \mu(t, s, x; \xi, \theta; \pi) \times e^{i\hbar^{-1}\phi(t, s, x; \xi, \theta; \pi)} (\mathcal{F}u)(\xi, \pi) d\xi d\pi \quad (49)$$

但し、Appendix にあるように $\iota_{l+1} = (-i)^{(l+1)^2/2}$,

$$(\mathcal{F}u)(\xi, \pi) = (2\pi\hbar)^{-m/2} \hbar^{(l+1)/2} \iota_{l+1} \int_{\mathbf{R}^{m, l+1}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\langle \xi | y \rangle - \langle \pi | \omega \rangle)} u(y, \omega) dy d\omega.$$

これらは superspace 上の振動積分で、super oscillatory integral と呼ばれる。

4 主結果

前節の (49) と (31) 及び (32) を結び付けて、 $\Gamma_0^\infty(S)$ 上に働く次の作用素

$$(E(t, s)\psi)(q) = (bE(t, s)\#\psi)(q) \quad (50)$$

を考える。ここで $T > 0$ を任意に固定し、 Δ を $[-T, T]$ の部分集合 $[s, t]$ の分割

$$\Delta : s = t_0 < t_1 < \cdots < t_L = t$$

とする。 $\delta(\Delta) = \max_{1 \leq j \leq L} |t_j - t_{j-1}|$ と定め $\delta(\Delta)$ が十分小さな Δ に対し $E(\Delta|t, s)$ を次のように定義する。

$$E(\Delta|t, s) = E(t, t_{L-1})E(t_{L-1}, t_{L-2}) \cdots E(t_1, s). \quad (51)$$

また

$$E(\Delta|t, s) = bE(\Delta|t, s)\# \quad (52)$$

とおく。

我々の得た結果は次のようになる。

定理 1 T を任意に定めた正数、 $t, s \in [-T, T]$ とする。 $H(x; \xi, \theta; \pi)$ を仮定をみたすものとする。この時、正数 $\delta_1(T)$ で以下を満たすものが存在する。

1. $|t - s| < \delta_1(T)$ となる t, s に対し $E(t, s)$ は $L^2(S)$ 上の線形な有界連続作用素を定める。
2. $\delta(\Delta) \rightarrow 0$ の時 $E(\Delta|t, s)$ は $L^2(S)$ 上の有界で可逆な線形作用素 $F(t, s)$ に収束する。更に、 $\hbar, \Delta$ と t, s に無関係な C があって次式を満たす。

$$\|F(t, s) - E(\Delta|t, s)\| \leq C\hbar|t - s|e^{C|t-s|}\delta(\Delta). \quad (53)$$

3. 作用素の族 $\{F(t, s) | t, s \in [-T, T]\}$ は以下を満たす。

$$(a) F(s, s) = Id.$$

(b) 任意の $\psi \in L^2(S)$ に対し $F(t, s)\psi$ は $(t, s) \in [-T, T] \times [-T, T]$ に関し $L^2(S)$ -値の連続関数で

$$F(t_1, t_2)F(t_2, t_3)\psi = F(t_1, t_3)\psi \quad \text{for any } t_1, t_2, t_3 \in [-T, T]. \quad (54)$$

(c) もし $\psi \in \Gamma_0^\infty(S)$ ならば、 $F(t, s)\psi$ は $(t, s) \in [-T, T] \times [-T, T]$ に関し $L^2(S)$ -値 differentiable 関数で次を満たす。

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} F(t, s)\psi + H^w F(t, s)\psi = 0, \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial s} F(t, s)\psi - F(t, s)H^w \psi = 0. \end{cases} \quad (55)$$

ここで $H^w = \hbar H^w \#$ 、 H^w は $u \in C_{\infty}^\infty(\mathbb{R}^{m, l+1})$ に対し

$$(H^w u)(x, \theta) = (2\pi\hbar)^{-m} \hbar^{l+1} \int_{\mathbb{R}^{m, l+1}} H\left(\frac{x+y}{2}; \xi, \frac{\theta+\omega}{2}; \pi\right) \times e^{i\hbar^{-1}(\langle \xi|x-y \rangle - \langle \pi|\theta-\omega \rangle)} u(y, \omega) dy d\omega d\xi d\pi \quad (56)$$

と定義される次数が 2 以下の普通の擬微分作用素 (系) である。

A Super space 上の解析

A.1 Superspace

無限個の生成元 $\{\sigma_j\}_{j=1}^\infty$ 持つ $\mathbb{C}$ 上の Grassmann algebra を Λ^C と呼ぶ。即ち、各生成元の間には次ぎの関係式が成りたち、

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0 \quad \text{for all } j, k = 1, \dots, \infty. \quad (57)$$

Λ^C は次ぎのように表示される。

$$z = z_B + z_S = z_B + \sum_{1 \leq |a| < \infty} z_a \sigma^a \quad z_a \in \mathbb{C}. \quad (58)$$

但し、 $a = (a_1, a_2, \dots) \in \{0, 1\}^N$ は有限個の A を除いて $a_A = 0$ 、 $|a| = \sum_A a_A$ 、そして $\sigma^a = \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \dots$ とする。 z_B は z の body (part)、残りの z_S は soul (part) といわれる。

非負の整数 j に対して

$$\Lambda_{(j)}^C = \{z \in \Lambda^C; z = \sum_{|a|=j} z_a \sigma^a\} \quad (59)$$

とおくと、

$$\Lambda^C = \prod_{j=0}^{\infty} \Lambda_{(j)}^C \quad \text{and} \quad z = \sum_{j \geq 0} z_{(j)} \quad \text{where} \quad z_{(j)} = \sum_{|a|=j} z_a \sigma^a \quad (60)$$

と一意的に分解される。ここで $z_{(j)}$ は z の第 j 次成分と呼ばれる。

Λ^C は以下に与えられる積によって associative, non-commutative algebras をなすことは明らかであろう。

$$zw = \sum_k (zw)_{(k)} \quad \text{with} \quad (zw)_{(k)} = \sum_{k'+k''=k} z_{(k')} w_{(k'')}. \quad (61)$$

但し、 $z = \sum_{k'} z_{(k')}$ 、 $w = \sum_{k''} z_{(k'')}$ 。

Λ^C は単純位相、即ち $z^{(n)} = \sum_a z_a^{(n)} \sigma^a \in \Lambda^C$ が $z = \sum_a z_a \sigma^a \in \Lambda^C$ に収束するとは C のなかで各 a 毎に $z_a^{(n)}$ が z_a に収束すること、で完備な局所凸空間をなす。

π_B で Λ^C から C への写像で $\pi_B(z) = z_B$ で定義される (body projection とか augmentation map と呼ばれる) ものとし、 $\Lambda = \pi_B^{-1}(R)$ 、 $\Lambda_{(k)} = \Lambda \cap \Lambda_{(k)}^C$ とおく。

更に、 Λ^C の任意の元は偶奇の部分に分解され、それぞれ even number と odd number と呼ばれる。即ち、

$$z = z_{ev} + z_{od} = \sum_{|a|=even} z_a \sigma^a + \sum_{|a|=odd} z_a \sigma^a. \quad (62)$$

そこで $\Lambda_{ev}^C = \{z \in \Lambda^C; z = \sum_{|a|=even} z_a \sigma^a\}$ 、 $\Lambda_{od}^C = \{z \in \Lambda^C; z = \sum_{|a|=odd} z_a \sigma^a\}$ とおいてベクトル空間 $\Lambda = \Lambda_{ev} \oplus \Lambda_{od}$ を得る。偶奇性 p を $z \in \Lambda_{ev}$ に対しては $p(z) = 0$ 、 $z \in \Lambda_{od}$ に対しては $p(z) = 1$ と定める。 Λ^C の元 z が homogeneous とは $p(z) = 0$ 或は 1 なることを云う。

定義 A.1 次元が (m, n) の superspace は

$$R^{m,n} = (\Lambda_{ev})^m \times (\Lambda_{od})^n \quad (63)$$

で定義され、その元を $X = (X_1, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n}) = (x_1, x_2, \dots, x_m, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in R^{m,n}$ と書く。また、 $R^{m,n}$ の位相は Λ^C の位相から導入される。 $R^{m,0} = (\Lambda_{ev})^m$ から R^m への射影も同じ記号 π_B で表し body projection と呼ぶ。即ち、 $\pi_B(x_1, \dots, x_m) = (x_{1,B}, \dots, x_{m,B})$ 。以降 $R^{m,0}$ の連結開集合 U_{ev} で $\pi_B^{-1}(\pi_B(U_{ev})) = U_{ev}$ なるもののみを考えそれを super (even) domain と云う。

A.2 $R^{m,n}$ 上の superdifferentiable 関数

U_{ev} を $R^{m,0}$ の super domain で $U_B = \pi_B(U_{ev})$ なるものとする。 U_B から Λ^C への滑らかな関数 f に対しその Grassmann continuation と呼ばれる拡張 $\tilde{f}$ を U_{ev} から Λ^C への関数として次ぎのように定義する事ができる。 $x = x_B + x_S$ に対し

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (\partial_q^\alpha f)(x_B) x_S^\alpha. \quad (64)$$

但し、 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 、 $x_B = (x_{1,B}, \dots, x_{m,B}) = (q_1, \dots, q_m) = q \in U_B$ 、 $x_S = (x_{1,S}, \dots, x_{m,S})$
 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ 。

定義 A.2 1. super domain $U_{ev} \in R^{m,0}$ に対し U_{ev} から Λ^C への写像 $\tilde{f}$ を考える。 $\tilde{f}$ が $U_B = \pi_B(U_{ev})$ から Λ^C への滑らかな写像 f の Grassmann continuation になっている

る時 $\tilde{f}$ を *superdifferentiable* と云う。 $C^\infty(U_{ev}, \Lambda^C)$ で U_{ev} 上の *superdifferentiable* な関数のなす環を表す。以降簡単のため $\tilde{f}$ を単に f と記す。

2. $U = U_{ev} \times (\Lambda_{od})^n$ を $\mathbb{R}^{m,n}$ 上の *super domain* という。 U から Λ^C への写像 f が次の形をしている時 *superdifferentiable* と云う。

$$f(x, \theta) = \sum_{|a| \leq n} f_a(x) \theta^a \quad (65)$$

但し、 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, $\theta^a = \theta_1^{a_1} \dots \theta_n^{a_n}$, $f_a(x) \in C^\infty(U_{ev}, \Lambda^C)$. 以降 特に断らない限り、 *superdifferentiable* 関数は *homogeneous* (i.e., 各 a に対し $f_a(x)$ が *homogeneous*) とし、それらを $C^\infty(U, \Lambda^C)$ と記す。

3. また、 U 上の *superdifferentiable* 関数が各 a に対し $f_a(x_{1,B}, \dots, x_{m,B}) \in \mathbb{R}$ の時、実係数を持つという。
4. $f \in C^\infty(U, \Lambda^C)$ の時、 $j = 1, 2, \dots, m$ と $s = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$\begin{cases} F_j(X) = \sum_{|a| \leq n} \partial_j f_a(x) \theta^a, \\ F_{s+m}(X) = \sum_{|a| \leq n} (-1)^{s(a)+p(f_a(x))} f_a(x) \theta_1^{a_1} \dots \theta_s^{a_s-1} \dots \theta_n^{a_n} \end{cases} \quad (66)$$

とおく。但し、 $s(a) = \sum_{j=1}^{s-1} a_j$, $\theta_s^{-1} = 0$. $F_A(X)$ を $X = (x, \theta)$ での X_A に関する偏微分といい、単に

$$F_j(X) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, \theta) = \partial_{x_j} f(x, \theta), \quad F_{m+s}(X) = \frac{\vec{\partial}}{\partial \theta_s} f(x, \theta) = \vec{\partial}_{\theta_s} f(x, \theta) \quad (67)$$

と書く。ここに、 $j = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, n$.

注意。

1. 上で定義した微分は奇変数に関する左微分と呼ばれる。勿論、右微分も同様に定義されるがここでは考えない。
2. 無限次元の Grassmann algebras を用いた為に、上の表示は一意的である。即ち、 U 上で $\sum_a f_a(x) \theta^a \equiv 0$ ならば $f_a(x) \equiv 0$ である。
3. 偶奇性に注意すれば、高階の偏微分、微分の線形性、積の微分公式、合成関数の微分、陰関数の定理そして Taylor 展開も同様に定義される。例えば、Taylor 展開は次の様に定式化される。

命題 A.1 $Y = (y, \rho)$ を $\mathbb{R}^{m,n}$ における点とし、 U を *super domain* で $U_B = \pi_B(U) = \{x_B \in \mathbb{R}^m; |x_B - y_B| < r_0\}$ なるものとする。 U で定義された関数が *superdifferentiable* ならば *Taylor* の公式 が成り立つ。即ち、正整数 p に対して

$$f(x, \theta) = \sum_{|\alpha|+|a|\leq p} \frac{1}{\alpha!} (x-y)^\alpha (\theta-\rho)^a \partial_x^\alpha \bar{\partial}_\theta^a f(y, \rho) + \tau_p(x, \theta). \quad (68)$$

ここで、

$$\tau_p(x, \theta) = \sum_{|\alpha|+|a|=p+1} (x-y)^\alpha (\theta-\rho)^a \int_0^1 \frac{1}{p!} (1-t)^p \partial_x^\alpha \bar{\partial}_\theta^a f(y + t(x-y), \rho + t(\theta-\rho)) dt. \quad (69)$$

A.3 Integration (even case)

まず、偶変数の関数 $u(x)$ に対して、一変数の正則関数の積分に似せてその積分を定義しよう。

定義 A.3 $u(x)$ を $\Lambda_e (= \mathbb{R}^{1,0})$ 上の領域 D で定義された Λ^C に値をとる *superdifferentiable* とする。 $\lambda = \lambda_B + \lambda_S$, $\mu = \mu_B + \mu_S \in D$ 及び C^1 -curve $c: [\lambda_B, \mu_B] \rightarrow D$ で $c(\lambda_B) = \lambda$, $c(\mu_B) = \mu$ なるものが与えられたとする。その時

$$\int_c u(x) dx = \int_{\lambda_B}^{\mu_B} u(c(t)) \dot{c}(t) dt \in \Lambda^C \quad (70)$$

と定義し、それを曲線 c に沿った u の積分 と云う。

この定義は well-defined で、もし $[\lambda_B, \mu_B] \subset D$ ならば

$$\int_{\lambda_B}^{\mu_B} u(x) dx = \int_{\lambda_B}^{\mu_B} u(t) dt \quad (71)$$

なることが示され、更に $\mathbb{R}^{m,0}$ の任意の有界な *super domain* Ω に対して積分 $\int_\Omega u(x) dx$ が定義される。同様に、広義積分も定義される。

定義 A.4 ($\mathbb{R}^{m,0}$ 上の関数空間)

1.

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}^{m,0}, \Lambda^C) &= \{u(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_{x_B}^\alpha u(x_B) x_S^\alpha; u(x_B) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \Lambda^C)\}, \\ C_0^\infty(\mathbb{R}^{m,0}, \Lambda^C) &= \{u(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_{x_B}^\alpha u(x_B) x_S^\alpha; u(x_B) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \Lambda^C)\}, \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m,0}, \Lambda^C) &= \{u(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_{x_B}^\alpha u(x_B) x_S^\alpha; u(x_B) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m, \Lambda^C)\}. \end{aligned}$$

以降誤解を生じない限り、 $C^\infty(\mathbb{R}^{m,0}, \Lambda^C)$ 等は簡単の為に $C^\infty(\mathbb{R}^{m,0})$ 等と記される。

2. また (無限大の値も許すことにして), $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{m,0})$ に対し内積と L^2 -ノルムを

$$\langle u, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^{m,0}} u(x) \overline{w(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} u(x_B) \overline{w(x_B)} dx_B, \quad \|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \quad (72)$$

そして非負の正数 k に対し k 次の Sobolev ノルムを

$$\|u\|_k^2 = \sum_{|\beta| \leq k} \|\partial_x^\beta u\|^2 \quad (73)$$

と定める。

定義 A.5 偶変数の関数に対する Fourier 変換 及び逆 Fourier 変換を 次のように定める。

$u, v \in S(\mathbb{R}^{m,0})$ に対し

$$\begin{aligned} (F_e u)(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^{m,0}} e^{-i\hbar^{-1}\langle \xi|y \rangle} u(y) dy, \\ (\bar{F}_e v)(y) &= (2\pi\hbar)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^{m,0}} e^{i\hbar^{-1}\langle \xi|y \rangle} v(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (74)$$

A.4 Integration (odd and mixed case)

v を奇変数 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\Lambda_{od})^n = \mathbb{R}^{0,n}$ によって定まる多項式

$$v(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{|b| \leq n} v_b \theta^b \quad \text{with} \quad v_b \in \Lambda^C$$

とし、その全体を $P_n(\Lambda^C)$ と書く。

定義 A.6 1. $v \in P_n(\Lambda^C)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{0,n}} v(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{R}^{0,n}} v(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_n \cdots d\theta_1 = (\vec{\partial}_{\theta_n} \cdots \vec{\partial}_{\theta_1} v)(0) \quad (75)$$

とおき v の $\mathbb{R}^{0,n}$ 上の 積分と云う。

2. $P_n(\Lambda^C)$ に内積と L^2 -ノルムを

$$\langle v, w \rangle = \sum_{|a| \leq n} v_a \overline{w_a}, \quad \|v\|^2 = \langle v, v \rangle \quad (76)$$

と導入する。

3. $v(\theta) \in P_n(\Lambda^C)$ と $w(\pi) \in P_n(\Lambda^C)$ に対して、Fourier 変換と逆 Fourier 変換をそれぞれ

$$(F_o v)(\pi) = \hbar^{n/2} \iota_n \int_{\mathbb{R}^{0,n}} e^{i\hbar^{-1}\langle \pi|\theta \rangle} v(\theta) d\theta, \quad (77)$$

$$(\bar{F}_o w)(\theta) = \hbar^{n/2} \iota_n \int_{\mathbb{R}^{0,n}} e^{-i\hbar^{-1}\langle \pi|\theta \rangle} w(\pi) d\pi \quad (78)$$

と定義する。ここで $\iota_n = (-i)^{n^2/2}$ とおいた。

$\mathbf{R}^{m,n}$ 上の関数の積分を次のように定めることができる。

定義 A.7 $u = u(x, \theta)$ が $u(x, \theta) = \sum_{|a| \leq n} u_a(x) \theta^a$ と与えられ、 $u_a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,0})$ の時

$$\int_{\mathbf{R}^{m,n}} u(x, \theta) dx d\theta = \int_{\mathbf{R}^{m,0}} \left\{ \int_{\mathbf{R}^{0,n}} u(x, \theta) d\theta \right\} dx \quad (79)$$

と定義する。

定義 A.8 ($\mathbf{R}^{m,n}$ 上の関数空間)

1. $C^\infty(\mathbf{R}^{m,n})$ で $\mathbf{R}^{m,n}$ 上で定義され値を Λ^C にとる関数全体で $u(x, \theta) = \sum_{|a| \leq n} u_a(x) \theta^a$ かつ $u_a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,0}, \Lambda^C)$ 、各 a 毎に homogeneous なるものとする。($C^\infty(\mathbf{R}^{m,n})$ が associative, non-commutative algebra をなすことは明らかであろう。)

2.

$$\begin{aligned} C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); u(x, -\theta) = u(x, \theta)\}, \\ C_0^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); \partial_x^\alpha \vec{\partial}_\theta^a u(x_B, 0) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m, \Lambda^C)\}, \\ S(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); \partial_x^\alpha \vec{\partial}_\theta^a u(x_B, 0) \in S(\mathbf{R}^m, \Lambda^C)\}, \\ B(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); \sup_{x_B} |\partial_x^\alpha \vec{\partial}_\theta^a u(x_B, 0)| < \infty\}, \\ C_{e0}^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C), \\ S_e(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= S(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) \cap C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C), \\ B_e(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) &= B(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C) \cap C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C). \end{aligned}$$

以降誤解を生じない限り、 $C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}, \Lambda^C)$ 等は簡単の為に $C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n})$ 等と記される。

3. $C^\infty(\mathbf{R}^{m,n})$ に内積と L^2 -ノルムを

$$\langle u, w \rangle = \sum_{|a| \leq n} \int_{\mathbf{R}^{m,0}} u_a(x) \overline{w_a(x)} dx, \quad \|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \quad (80)$$

そして非負の整数 k に対し k 次の Sobolev ノルムを

$$\|u\|_k^2 = \sum_{|\alpha|+|a| \leq k, |a| \leq n} \|\partial_{x_B}^\alpha \vec{\partial}_\theta^a u(x_B, 0)\|^2 \quad (81)$$

と定義する。そして $u \in S(\mathbf{R}^{m,n})$ に対し

$$|||u|||_k^2 = \sum_{|\alpha|+l+|a| \leq k, |a| \leq n} \|(1 + |x_B|^2)^{l/2} \partial_{x_B}^\alpha \vec{\partial}_\theta^a u(x_B, 0)\|^2 \quad (82)$$

とおく。

4. 更に、次の空間を用意する。

$$\tilde{L}^2(\mathbf{R}^{m,n}) = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); \|u\| < \infty\}, \quad \tilde{L}_e^2(\mathbf{R}^{m,n}) = \tilde{L}^2(\mathbf{R}^{m,n}) \cap C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}),$$

$$\tilde{H}^k(\mathbf{R}^{m,n}) = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^{m,n}); \|u\|_k < \infty\}, \quad \tilde{H}_e^k(\mathbf{R}^{m,n}) = \tilde{H}^k(\mathbf{R}^{m,n}) \cap C_e^\infty(\mathbf{R}^{m,n}).$$

注意。上記の関数空間には内積が定義されているがその位相で完備とは限らない。我々は無限次元 Grassmann algebra を弱い位相で考えているので、上の空間のそのノルムによる完備化は考えない。これは、Banach-Grassmann algebra を用いる [12] や [18] 等とは大いに異なるところである。

さて前と同様に

定義 A.9 $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{m,n})$ に対し Fourier 変換と逆 Fourier 変換を

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(\xi, \pi) &= (2\pi\hbar)^{-m/2} \hbar^{n/2} \iota_n \int_{\mathbf{R}^{m,n}} e^{-i\hbar^{-1}(\langle \xi|x \rangle - \langle \pi|\theta \rangle)} u(x, \theta) dx d\theta \\ &= \sum_a [(F_e u_a)(\xi)] [(F_o \theta^a)(\pi)] \quad \text{for } u = \sum_a u_a(x) \theta^a, \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{F}}v)(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-m/2} \hbar^{n/2} \iota_n \int_{\mathbf{R}^{m,n}} e^{i\hbar^{-1}(\langle \xi|x \rangle - \langle \pi|\theta \rangle)} v(\xi, \pi) d\xi d\pi \\ &= \sum_b [(\bar{F}_e v_b)(x)] [(\bar{F}_o \pi^b)(\theta)] \quad \text{for } v = \sum_a v_b(\xi) \pi^b \end{aligned} \quad (84)$$

と定義する。

命題 A.2 1. 任意の $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{m,n})$ に対して

$$\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}u = u, \quad \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}v = v, \quad \|\mathcal{F}u\| = \|u\|. \quad (85)$$

2. $\delta(\theta) = \theta_1 \cdots \theta_n$ とおくと、

$$(\mathcal{F}\delta)(\xi, \pi) = (F_e \delta)(\xi) (F_o \delta)(\pi) = (2\pi\hbar)^{-m/2} \hbar^{n/2} \iota_n. \quad (86)$$

3. また、以下の性質を持つ。

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \bar{\partial}_\theta^\alpha u))(\xi, \pi) &= (i\hbar^{-1})^{|\alpha|} (-i\hbar^{-1})^{|\alpha|} \xi^\alpha \pi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi, \pi), \\ (\mathcal{F}(x^\alpha \theta^\alpha u))(\xi, \pi) &= (i\hbar)^{|\alpha|} (i\hbar)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \bar{\partial}_\pi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi, \pi), \\ (\mathcal{F}(e^{i\hbar^{-1}(\langle \xi'|x \rangle - \langle \pi'|\theta \rangle)} u))(\xi, \pi) &= (\mathcal{F}u)(\xi - \xi', \pi - \pi'), \\ (\mathcal{F}(u(x - x', \theta - \theta')))(\xi, \pi) &= e^{-i\hbar^{-1}(\langle \xi|x' \rangle - \langle \pi|\theta' \rangle)} (\mathcal{F}u)(\xi, \pi), \\ (\mathcal{F}u)(t\xi, s\pi) &= |t|^{-m} |s|^n (\mathcal{F}u)(t^{-1}\xi, s^{-1}\pi) \quad \text{for } t, s \in \mathbf{R}^\times. \end{aligned} \quad (87)$$

4. $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^{m,n}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^{m,n})$ は、線形連続写像で次の評価を満たす。

$$|||\mathcal{F}u|||_k \leq C_{mn} |||u|||_k. \quad (88)$$

最後に積分記号下での変数変換則を記す為に、supertrace と superdeterminant の概念を導入しよう。 A と B を $m \times m$ 及び $n \times n$ 行列で偶の要素をもつもの、 C と D を $m \times n$ 及び $n \times m$ 行列で奇の要素を持つものとする。行列 $J = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$ に対し J の supertrace を

$$\text{str } J = \text{tr } A - \text{tr } B, \quad (89)$$

で定め、 A 或は B が可逆の時 その superdeterminant を

$$\text{sdet } J = (\det A)(\det(B - DA^{-1}C))^{-1} = (\det(A - CB^{-1}D))(\det B)^{-1} \quad (90)$$

と定義する。

命題 A.3 (cf. [6]) $A(X)$ と $B(X)$ を $m \times m$ 及び $n \times n$ 行列で偶の要素をもつもの、 $C(X)$ と $D(X)$ を $m \times n$ 及び $n \times m$ 行列で奇の要素を持つもので、 $X = (x, \theta) \in \mathbb{R}^{m,n}$ の superdifferentiable 関数とする。行列 $J(X) = \begin{bmatrix} A(X) & C(X) \\ D(X) & B(X) \end{bmatrix}$ の super determinant は次の性質を持つ。

$$\partial_X \text{sdet } J(X) = (\text{sdet } J(X)) \text{str}(J^{-1} \partial_X J(X)) = (\text{sdet } J(X)) \text{str}(\partial_X J(X) J^{-1}). \quad (91)$$

この時、積分記号下での変数変換則として

命題 A.4 $(y, \omega) = (y(x, \theta), \omega(x, \theta))$ を $\mathbb{R}^{m,n}$ 上の diffeomorphism とすると、

$$\int_{\mathbb{R}^{m,n}} u(y, \omega) dy d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m,n}} u(x, \theta) J(x, \theta) dx d\theta. \quad (92)$$

但し、 $J(x, \theta)$ は (y, ω) より定まる Jacobian 行列で

$$J(x, \theta) = \text{sdet} \begin{bmatrix} \partial_x y(x, \theta) & \vec{\partial}_\theta y(x, \theta) \\ \partial_x \omega(x, \theta) & \vec{\partial}_\theta \omega(x, \theta) \end{bmatrix}. \quad (93)$$

参考文献

- [1] L. Alvarez-Gaumé, Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. Commun. Math. Phys. (90) 1983 pp.161-173.
- [2] F.A. Berezin and M.S. Marinov, Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics. Ann. Physics. (104) 1977 pp.336-362.

- [3] F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, Clifford Analysis, Pittman, Boston, 1982.
- [4] R. Casalbuoni, On the quantization of systems with anticommuting variables. Nuovo Cimento A, (33) 1976 pp.115-125.
- [5] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsh and B. Simon, Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry. Springer-Verlag, GMT, New York, 1987.
- [6] B. deWitt, Supermanifolds, Cambridge Univ. Press, London, 1984.
- [7] R. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Modern Phys. (20) 1948 pp.367-387.
- [8] R. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill Book Co. New York, 1965.
- [9] D. Fujiwara, A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J. D'Analyse Math. (35) 1979 pp.41-96.
- [10] D. Friedan and P. Windey, Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index and the chiral anomaly, Nuclear Phys. B (FS 11), (253) 1984 pp.395-416.
- [11] E. Getzler, Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, Commun. Math. Phys. (92) 1983 pp.163-178.
- [12] J. Hoyos, M. Quiros, J. Ramirez Mittelbrunn and F.J. de Urries, Generalized supermanifolds. I,II,III, J.Math.Phys. (25) 1984 pp.833-854.
- [13] A. Inoue and Y. Maeda, On integral transformations associated with a certain Lagrangian- as a prototype of quantization, J. Math. Soc. Japan (37) 1985 pp.219-244.
- [14] A. Inoue and Y. Maeda, Studies of Schrödinger equations with spin using superanalysis.I. A general scheme of constructing a fundamental solution. (to appear).
- [15] A. Intissar, A Remark on the convergence of Feynman path integrals for Weyl pseudo-differential operators on $\mathbb{R}^n$, Comm. in Partial Differential Equations, (7) 1982 pp.1403-1437.

- [16] H. Kitada, On a construction of the fundamental solution for Schrödinger equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (27) 1980 pp.193-226.
- [17] J. Mañes and B. Zumino, WKB method, susy quantum mechanics and the index theorem, Nuclear Phys. B (FS 16), (270) 1986 pp.651-686.
- [18] A. Rogers, A global theory of supermanifolds, J.Math.Phys. (21) 1980 pp.1352-1365.
- [19] 朝永振一郎、スピンはめぐる、中央公論社 自然選書、1974.
- [20] V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, Superanalysis I. Differential calculus, Theor. Math. Phys. (59) 1983 pp.317-335.
- [21] V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, Superanalysis II. Integral calculus, Theor. Math. Phys. (60) 1984 pp.743-765.
- [22] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, Nuclear Phys.B (202) 1982 pp.253-316.
- [23] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J.Diff.Geom. (17) 1982 pp.661-692.

Schrödinger eq.		Pauli eq. = Schrödinger eq. + spin		
$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_j - A_j \right)^2 u + V u$		$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2M} \left(\gamma_j \left(\frac{\hbar}{i} \partial_j - A_j \right) \right)^2 \psi + \Phi \psi$		
		spin rep.	super rep.	matrix rep.
		$\gamma_j = \rho_0(e_j)$	$\gamma_j = \rho(e_j)$	$\gamma_j = r \times r$ matrix
$u(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$		$\psi(q, t) \in L^2(S)$	$u(x, \theta, t) \in \tilde{L}_e^2(\mathbb{R}^{m, l+1}, \Lambda^{\mathbb{C}})$	$\tilde{\psi}(q, t) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^r)$
$\mathbb{R}^m$			$\mathbb{R}^{m, l+1}$	
$L(x, \dot{x})$	$H(x, \xi)$		$H(x; \xi, \theta; \pi)$	
$C^\infty(T(\mathbb{R}^m), \mathbb{R})$	$C^\infty(T^*(\mathbb{R}^m), \mathbb{R})$		$C^\infty(T^*(\mathbb{R}^{m, l+1}), \Lambda_{ev})$	
$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} = \frac{\delta L}{\delta x}$	$\dot{x} = \{H, x\}$ $\dot{\xi} = \{H, \xi\}$		$\dot{x} = \{H, x\}, \dot{\xi} = \{H, \xi\}$ $\dot{\theta} = \{H, \theta\}, \dot{\pi} = \{H, \pi\}$	
$\phi_L(t, s, x, y)$	$\phi_H(t, s, x, \xi)$		$\phi(t, s, x; \xi, \theta; \pi)$	
$\mu_L(t, s, x, y)$	$\mu_H(t, s, x, \xi)$		$\mu(t, s, x; \xi, \theta; \pi)$	
$(E_L(t, s)u)(x)$	$(E_H(t, s)u)(x)$	$(E(t, s)\psi)(q)$	$(E(t, s)u)(x, \theta)$	