

岩澤理論の一般化についての概説

東京国立大理 栗原 哲人 (Masato Kurihara)

この稿の目標は、いわゆる岩澤理論が ideal 類群 (あるいは
不分級 abel 拡大の Galois 群) 以外の多くの対象について存在
しているということの (ごく基本的な) 解説である。このよ
うな岩澤理論の一般化については、Mazur [M] に始まると思わ
れる。ここでは簡単な例についてしか述べないが、興味
のある読者は稿末の文献等を御覧下さい。

§1. good ordinary reduction を持つ楕円曲線

1.1. この §1 は主に [M] の解説である。 K は有限次代数体、
 E は K 上の楕円曲線、 p は素数とし、 K_∞/K は円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と
する。すなわち $\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}) (= \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ μ_{p^n} : 1 の p^n 乗根全
体) の中の $\mathbb{Q}$ の unique $\mathbb{Z}_p$ 拡大であり、 $K_\infty = K \cdot \mathbb{Q}_\infty$ とする。こ
のとき基本的な問いとして次の問題が与えられる。

予想 R (Mazur) $E(K_\infty)$ は有限生成 abel 群である。

これを予想として信じる根拠は岩澤理論の哲学にある。すると E を K_∞ の整数環上の楕円曲面と見たときの Néron Severi 群は $E(K_\infty)$ と深い関連があるが、岩澤理論の言う K_∞ の整数環と代数閉体上の曲線の類似を考えると、閉体上の曲面の Néron Severi 群の有限生成性の類似として $E(K_\infty)$ の有限生成性を考えることが出来る。

岩澤理論はさらに有限体上の曲線の Jacobian の Tate 加群への Frobenius の作用からその曲線の L 関数が得られるということの類似として、円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の ideal 類群への $\text{Gal}(k_\infty/k)$ の作用から (zeta 関数の p 進世界での出現である) p 進 L 関数が得られるという驚くべき美しい結論を得ている。上の場合に対しこれのよう事を考えると、有限体上の曲面 X に対し $NS(X_{\overline{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow H^2(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ であり、 H^2 の L 関数が Frobenius で表せるということの類似を考えると、 $E(k_\infty)$ は“含む”ような cohomology があり、これへの $\text{Gal}(k_\infty/k)$ の作用により、 E の p 進 L 関数が得られるのではないかと推測できる。これをもう少し正確に書いていこう。

任意の代数体 L と L 上の楕円曲線 E に対し、 E の p 中分点全体 $E_{p^\infty} (= \bigcup_{n \geq 1} E[p^n](L))$ に関する Selmer 群 $\text{Sel}(L, E_{p^\infty})$ と普通通り

$$\text{Sel}(L, E_{p^\infty}) := \ker(H^1(L, E_{p^\infty}) \rightarrow \prod_{v: \text{all primes}} H^1(L_v, E_{p^\infty}) / E(L_v) \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p)$$

を定義する。ここには $E(L_v) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ は Kummer sequence により
 $H^1(L_v, E_p^\infty)$ の部分群とみることにする。 $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$,
 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K_\infty/K)]] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ とおく。最後の同
 型は fix した Γ の生成元に $1+T$ に対応させることとする。
 ここでは $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)$ という Λ 加群を考える。これは
 $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty) = \varinjlim \text{Sel}(K_n, E_p^\infty)$ (K_n は K_∞/K の中間体) と見、
 する。 [M] ではこのような Selmer 群ではなく flat coho-
 mology を使っているが、ここでは普通の Selmer 群を使う
 ことにする。以下次の仮定をおく。

仮定 E は p の上にある K の素点 π で good ordinary
 reduction を持つ。

予想 S (Mazur) 上の仮定の下で Selmer 群の Pontryagin dual
 $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)^\vee$ は torsion Λ 加群。

Remarks 1. $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)^\vee$ が有限生成 Λ 加群であることは (仮
 定よりして) すぐに分かる。従って、もしもこの予想 S は予想 R に
 導く。また逆に、 K_∞/K の素点 π の有限次中間体 K_n で
 Tate Shafarevich 群 $\text{III}(E/K_n)$ の p 中 torsion 部分が有限であれば
 予想 R が予想 S に導くことも示すことができる。

2. $K/\mathbb{Q}$ が有限次 abel 拡大, $E/\mathbb{Q}$ が modular 楕円曲線。

と云、加藤和也氏は予想 S を証明した [K]。

1.2. 以下簡単のため $p \neq 2$ とし, $E \in \mathbb{Q}$ 上の modular な楕円曲線, すなわち S parametrization $X_0(N) \rightarrow E$ があるとする。また E は p での good ordinary reduction を持つとする。 $k/\mathbb{Q}$ は有限次 abelian 拡大とする。 Mazur と Swinnerton-Dyer により p 進 L 関数 $L_p(E/k, s)$ が定義されている [MS]。 $L_p(E/k, s)$ についてはここに詳しく述べる余裕がないが, $L_p(E/k, s)$ の $s=1$ での値が普通の L 関数 $L(E/k, s)$ の $s=1$ での値に関連している。たとえば

$$\text{order}_{s=1} L_p(E/k, s) = \text{order}_{s=1} L(E/k, s) = \text{rank } E(k)$$

と予想される。最後 $\alpha = 1$ は Birch Swinnerton-Dyer 予想である。上の予想については $\text{order} = 0, 1$ のとき Mazur, Swinnerton-Dyer, Gross, Zagier, Perrin-Riou 等による結果がある。 $L_p(E/k, 1)$ という値も $L(E/k, 1)$ という値と関連している。また $L_p(E/k, s)$ には $L(E/k, s)$ と同じ型の関数等式が存在する。さらに $L_p(E/k, s)$ は岩澤関数である。すなわち $L_p(E/k, s) = G_p(E/k, (Y)^{s-1} - 1)$, $G_p(E/k, T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ とする中級数 G_p が存在する。ここに Y は 1.1 で述べた $\text{Gal}(K_\infty/k)$ の生成元, $\kappa: \text{Gal}(K_\infty/k) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ は同分指標である。また $G_p(E/k, T)$ については次の結果がある,

定理 (Rohrlich) $G_p(E/K, T) \neq 0$

このとき E/K についての岩澤主予想は次のように定形化される。

予想 IMC (岩澤主予想) 予想 S の下には

$$\text{char}_\Lambda(\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee) = (G_p(E/K, T))$$

ここに $\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee$ は $\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})$ の Pontryagin dual.

$\text{char}_\Lambda(M)$ は有限生成 torsion Λ 加群 M に対し M の特性中級数で生成される単項 ideal を表す。

上はもう少し詳しく χ part に分けて考えることができ、すなわち $\chi: \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ は $K/\mathbb{Q}$ の指標とすると、

$$\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(K/\mathbb{Q})] \text{ 加群 } M \text{ に対し } M^\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(K/\mathbb{Q})]} \mathbb{O}_\chi, \quad \mathbb{O}_\chi = \mathbb{Z}_p[\text{Im} \chi]$$

$\mathbb{O}_\chi$ は $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が χ を通じて作用、と定義する。このとき G_p の χ -part $G_p(E/K, \chi, T)$ を定義され。

$$\text{char}_{\mathbb{O}_\chi[\Gamma_T]}(\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^{\vee \chi}) = (G_p(E/K, \chi, T))$$

と予想される。

Remarks 1. 一般の楕円曲線 E について E が p の上の特異点で

good ordinary reduction を持つとき、 p 適当関数 $G_p(E/K, T)$ は存

在すると思われる。そして一般に ordinary, critical な motive (あるいはもう少し一般に Paniskin 条件を満たす motive) に対し岩澤関数となるような p -進 L の存在が予想されている (cf. [CP]). そして岩澤主予想も定形化される [G].

2. 加藤 G は $\text{char}(\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^{\vee X}) \ni G_p(E/K, \chi, T)$ を示した. [K]

1.3. λ, μ 不変量について。Selmer 群は Mordell Weill 群と Tate Shafarevich 群に分かれる

$$0 \rightarrow E(K_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty}) \rightarrow \text{III}(E/K_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

ここで、 λ 不変量 ($G_p(E/K, T) \in (\text{多項式}) \times (\text{unit})$ と書いたとき n 多項式の次数) は Mordell Weill 群から寄与 λ^{MW} と Tate Shafarevich 群から寄与 λ^{III} に分かれる。すなわち $\lambda = \lambda(G_p(E/K, T))$ としたとき

$$\lambda = \lambda^{\text{MW}} + \lambda^{\text{III}}, \quad \lambda^{\text{MW}} = \left[G_p(E/K, T) = 0 \text{ かつ } T = J-1 \text{ (} J: 1 \text{ の } p^n \text{-乗根 for some } n \text{) なる型の解の数} \right]$$

と表すと λ^{MW} は Mordell Weill 群から寄与と考えられる

$$\lambda^{\text{MW}} = \text{rank } E(K_\infty)$$

と予想される。1.2 で述べた加藤 G の結果 $G_p(E/K, T) \in \text{char}(\text{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee)$ は

$$\text{rank } E(K_\infty) \leq \lambda^{\text{MW}}$$

と導く。特に $\text{rank } E(K_\infty) < \infty$ での予想 R は導かれる。

μ 不変量 について 2 回 次の予想がある。

予想 μ E の p 等分点 $\wedge$ の表現 $\rho_{E[p]}: \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$
 が既約であれば $\mu(G_p(E/K, T)) = 0$. (ここに中報数 $f(T) \in \wedge$ の μ 不変量 $\mu(f(T))$ とは $f(T)$ が 1 かつ p で割れるかである.)

Remarks 1. Greenberg は μ と一般的な μ 不変量の予想を持つ。
 ている。

2. $E = X_0(11)$, $X_0(17)$, $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ に対して比較的小さな p に対して χ^{MW} , χ^{III} の表は [MS] にある。

3. $E = X_0(11)$, $K = \mathbb{Q}$ のとき, よく知られていっているように

$E[5](\mathbb{Q}) \neq 0$ であり $\rho_{E[5]}$ は可約である。このとき

$\text{Sel}(\mathbb{Q}, E_{\infty})^{\vee} \sim \wedge/5$.

1.4. 次のような型の予想を (一般的) weak Leopoldt 予想とよぶ。

予想 WL E を代数体 K 上の楕円曲線とすると

$H^2(\text{Gal}(M_{\infty}/K_{\infty}), E_{p^{\infty}}) = 0$. ここに M_{∞}/K_{∞} は p と E の bad reduction を持つ素点の外で不変最大の K_{∞} の拡大。

命題 $K(E[p])_{\infty}/K(E[p])$ の普通の意味での μ 不変量 $= 0$

であれば予想 WL は成立する。

なぜなら $H^2(M_\infty/K(E[P])_\infty, \mathbb{Z}/p) = 0$ (by Iwasawa) による。

また cohomology の計算により (Euler 標数の計算等を用いて rank を計算すると) 確かめがた。

命題 予想 S の状況で、予想 S は予想 WL に導く。

§2. ideal 類群, 一般論への示唆

ideal 類群は étale cohomology でとらえられる。普通の意味での岩澤主予想を §1 と同じ型に定式化すると次のようになる。

$K \in \text{CM 体}$ とする。 $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(L_\infty/K_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$

(L_∞ は K_∞ の最大不分岐, pro- p , abel 拡大) に注意すると

予想 IMC (岩澤主予想) $\chi \in \text{odd character}$ とすると

$$\text{char}_{\mathcal{O}_X[[T]]}(H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\vee \chi}) = (G_p(\chi^\vee \omega, T))$$

ここに $G_p(\chi^\vee \omega, T)$ は p 進 L 関数 $L_p(\chi^\vee \omega, s)$ に対応する巾級数である。(その存在は Deligne Ribet による。そして L abel 体 π と π は Kubota Leopoldt の p 進 L .)

このように岩澤主予想の定式化は §1 では $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)$ の

§2 では $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ が使われた。[BK] では有限次代数体 L に対し $H_f^1(L, -) = H_{f, \text{Spec } \mathcal{O}_L}^1(L, -)$ なる cohomology が定義されている。定義には p -adic Hodge 理論が本質的に使われる。 $H_f^1(L, -)$ は整数論的に非常に微妙で重要な対象を表している。

$$\pm \quad H_f^1(L, E_p^\infty) = \text{Sel}(L, E_p^\infty)$$

$$H_f^1(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

である。そこで

$$H_f^1(K_\infty, -) := \varinjlim H_f^1(K_n, -)$$

という群が岩澤理論の一般化で中心的役割を果たすと考えられることになっている。(H_f^1 は本当は普通の L -関数の値を表すのに適しており p -adic L を表すには若干の修正を必要とする。§4 でその例を述べる。上のように H_f^1 が岩澤理論の大群であるということとを述べるのに、もう少し cohomology 論的に整理した形で述べることにしようが、ここでは述べるまい。)

Remark 普通の意味の岩澤理論を表すのに $M_\infty/K_\infty \in K_\infty$ の p の外で不分岐な最大 pro- p , abel 拡大 $L \subset \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ の $\pm$ part を使う必要がある。これは r を総定代数体, $r \geq 2$ を偶数としたとき $\text{étale cohomology } H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{K_\infty}[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ である。このとき $H_f^1(K_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)) = H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{K_\infty}[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ であり H_f^1 で書けることになった。

§3. modular form

$f = \sum a_n \tau^n \in \text{level } N, \text{ weight } k$ a newform とする。 k は $p \nmid k$ good, ordinary reduction, $p \nmid N$, $p \nmid ap$ と仮定する。 k と k §1 と k , k 同様の議論が述べられる。

$V \in f$ に伴う p 進表現とする。 $p \nmid N$

$$\rho_f: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}) \quad ([\mathbb{F}:\mathbb{Q}_p] < \infty)$$

(ρ_f は pN の外で不変且, $k \nmid pN$ に対し $\text{Tr}(\rho_f(\text{Frob}_x)) = a_x$) に対応する Galois 加群とする。 $T \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -stable lattice とし、有限次代数体 K に対し ρ_f の T による $H_f^1(K_\infty, V/T) \in \rho_f$ と

予想 S $H_f^1(K_\infty, V/T)^V$ は torsion $\wedge$ 加群

$k > 2$ のときは今度は次のように ρ_f と k の予想を support する。 K_∞/K の p 進中間体 K_n に対し $H_f^1(K_n, V(2-k)) = 0$ であるのは予想 S から出る。 一方, $V \in \text{weight } \geq 0$ の motive の p 進表現とすると有限次代数体 L に対し $H_f^1(L, V) = 0$ は一般に予想とされている。

$K/\mathbb{Q}$ が有限次 abel 拡大のとき p 進 L 関数 $G_p(f, K, T)$ が定義され、岩澤主予想は次のように定式化された ($[K]$ の証明は k と k である。)

予想 IMC $\text{char}_\Lambda (H_f^1(K_\infty, V/T)^\vee) = (G_p(\gamma, K, T))$

μ 不変量について注意を一言述べよう。 μ 不変量については §1 と同じ予想があるが、一般に μ は T のとり方による。たとえば $f = \text{Ramanujan's } \Delta$, $p=691$ とすると (もちろん $p \nmid T$ は可約な場合) T とし $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow T/p \rightarrow \mathbb{Z}/p(11) \rightarrow 0$ なる lattice E とすると $\mu=0$, $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p(11) \rightarrow T'/p \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$ なる lattice T' とすると $\mu=1$ である (私は T の方が自然な lattice と思う。)
[P1]

§4. 楕円曲線, §1 以外の場合

枚数が少ないので簡単に書く。 E は有限次体 K 上の楕円曲線, p は K の素点で supersingular reduction とする。このとき $\text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)^\vee$ は $\mathbb{T}$ Λ -torsion になっている。このとき予想 S は次のようになる。

予想 S $\text{rank}_\Lambda \text{Sel}(K_\infty, E_p^\infty)^\vee = [K:\mathbb{Q}]$

一方 p 進 L 関数も p 進 ζ 関数になるらしい。(中級者ではよく知られている) このときは Perrin-Riou にある理論がある [P2]。

E が multiplicative reduction を持つとす。 $\text{Sel}(K_n, E_p^\infty)$ は定形化に適する。実際、 $E/\mathbb{Q}$ は modular な楕円曲線、 $p \nmid N$ split multiplicative reduction を持つとすると、 S_1 のような p 進 L 関数 $G_p(E/\mathbb{Q}, T)$ に対して

$$\text{order}_{T=0} G_p(E/\mathbb{Q}, T) = 1 + \text{order}_{s=1} L(E/\mathbb{Q}, s)$$

と予想される。この予想を持つ、 $E/\mathbb{Q}$ を構成しなくてはならぬ。そのために $\mathbb{Q}_p$ の有限な拡大 K に対して $H_g^2(K, -)$ の cohomology theory を定義する。 $H_g^1(K, E_p^\infty)$ は [BK] の $H_g^1(K, E_p^\infty)$ と同じとれる。 [BK] 2.17 上の群は divisible である。上の H_g^1 は divisible である。 Tate curve $E = \mathbb{G}_m/\mathbb{Z}$ に対して $0 \rightarrow E(K) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow H_g^1(K, E_p^\infty) \rightarrow \mathbb{Z}_p/\text{ord}_E(\mathcal{O}) \rightarrow 0$ (exact) となる。この H_g^1 は p のとき λ の local condition により、Selmer 群を構成すると、上の予想を吸収したような Λ 加群が得られる。岩澤の予想が定形化される。

参考文献

- [BK] S. Bloch and K. Kato, L -functions and Tamagawa number of Motives, The Grothendieck Festschrift Vol I (1990)
- [CP] J. Coates and B. Perrin-Riou, On p -adic L -functions attached to motives over $\mathbb{Q}$, Alg. Number Th. in honor of Iwasawa (1989)

- [G] R. Greenberg, Iwasawa theory for p -adic representations,
Alg. Number Theory in honor of Iwasawa (1989)
- [K] K. Kato, 保型形式と岩澤理論, this volume
- [M] B. Mazur, Rational Points of abelian varieties with values
in towers of number fields, Invent math 18 (1972)
- [MS] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer, Arithmetic of Weil curves,
Invent. math 25 (1974)
- [P1] B. Perrin-Riou, Variation de la fonction L p -adique par
isogénie, Alg Number Theory in honor of Iwasawa (1989)
- [P2] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations
 p -adiques sur un corps local, Invent math 115 (1994)